

Володимир Кофанов¹ (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)

ЗАДАЧА БОЯНОВА – НАЙДЬОНОВА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ І ЗАДАЧА ЕРДЬОША ДЛЯ ПОЛІНОМІВ ТА СПЛАЙНІВ

We solve the extremal problem

$$\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \rightarrow \sup, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad p > 0,$$

in the class of pairs (x, I) of functions $x \in S_{\varphi}^k$ such that $\varphi^{(i)}$ are the comparison functions for $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$, and the intervals $I = [a, b]$ satisfy the conditions

$$L(x)_p \leq A, \quad \mu\{\text{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\} \leq \mu,$$

where $L(x)_p := \sup \left\{ \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \right\}$. In particular, we solve the same problems on the classes $W_{\infty}^r(\mathbf{R})$ and on the bounded sets of spaces of trigonometric polynomials and splines and the Erdős problem for the positive (negative) parts of polynomials and splines.

Розв'язано екстремальну задачу

$$\|x_{\pm}^{(k)}\|_{L_p[a,b]} \rightarrow \sup, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad p > 0,$$

на класі пар (x, I) функцій $x \in S_{\varphi}^k$, похідні яких $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$, мають функціями порівняння відповідні похідні $\varphi^{(i)}$, та інтервалів $I = [a, b]$, які задовольняють умови

$$L(x)_p \leq A, \quad \mu\{\text{supp}_{[a,b]} x_{\pm}^{(k)}\} \leq \mu,$$

де $L(x)_p := \sup \left\{ \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \right\}$. Як наслідок розв'язано такі ж задачі на класах $W_{\infty}^r(\mathbf{R})$ і на обмежених множинах просторів тригонометричних поліномів і сплайнів та задачу Ердьоша для додатних (від'ємних) частин поліномів і сплайнів.

1. Вступ. Нехай $G = \mathbf{R}$ або $G = [\alpha, \beta]$. Будемо розглядати простори $L_p(G)$, $0 < p \leq \infty$, усіх вимірних за Лебегом функцій $x : G \rightarrow \mathbf{R}$, для яких $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, де

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{якщо } 0 < p < \infty, \\ \text{vrai sup}_{t \in G} |x(t)|, & \text{якщо } p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbf{N}$ і $p, s \in (0, \infty]$ через $L_{p,s}^r$ позначимо простір усіх функцій $x \in L_p(\mathbf{R})$, що мають локально абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$ -го порядку включно, до того ж $x^{(r)} \in L_s(\mathbf{R})$. Будемо писати $\|x\|_p$ замість $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ і L_{∞}^r замість $L_{\infty, \infty}^r$.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 47]), що задача знаходження точної сталої C в нерівності типу Колмогорова – Надя

$$\|x^{(k)}\|_q \leq C \|x\|_p^{\alpha} \|x^{(r)}\|_s^{1-\alpha} \quad (1.1)$$

¹ E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com.

на класі функцій $x \in L_{p,s}^r$, де $\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметри $q, p, s \geq 1$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k < r$, задовольняють умову $\alpha \leq (r-k)/r$, рівносильна екстремальній задачі

$$\|x^{(k)}\|_q \rightarrow \sup \quad (1.2)$$

на класі функцій $x \in L_{p,s}^r$ з обмеженнями

$$\|x^{(r)}\|_s \leq A_r, \quad \|x\|_p \leq A_0, \quad (1.3)$$

де A_0, A_r — задані додатні числа.

Даній тематиці присвячено значну кількість робіт (детальну бібліографію можна знайти в роботах [1–3]). Зазначимо, що в роботі [4] досліджено питання про збіг точних сталих у нерівностях типу (1.1) для періодичних функцій і таких же нерівностях для неперіодичних функцій на осі. Попри велику кількість робіт, присвячених нерівностям вигляду (1.1), точна стала C в цій нерівності відома для всіх $r \in \mathbf{N}$ і всіх $k < r$ лише в небагатьох випадках. Тому цікавою є наступна модифікація задачі (1.2) з обмеженнями (1.3), розглянута Бояновим і Найдьоновим [5].

Будемо говорити, що $f \in L_\infty^1$ є функцією порівняння для $x \in L_\infty^1$, якщо $\|x_\pm\|_\infty \leq \|f_\pm\|_\infty$ і з рівності $x(\xi) = f(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, випливає нерівність $|x'(\xi)| \leq |f'(\eta)|$, якщо вказані похідні існують.

Непарну 2ω -періодичну функцію $\varphi \in L_\infty^1$ назовемо S -функцією, якщо вона має такі властивості: φ парна щодо $\omega/2$, $|\varphi|$ опукла догори на $[0, \omega]$ і строго монотонна на $[0, \omega/2]$. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ і S -функції $\varphi \in L_\infty^{k+1}$ через S_φ^k позначимо клас функцій $x \in L_\infty^{k+1}$ таких, що $\varphi^{(i)}$ є функцією порівняння для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$. Прикладами класів S_φ^k є соболевські класи

$$\left\{ x \in L_\infty^r : \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, \|x\|_\infty \leq A_0 \right\},$$

а також обмежені підмножини просторів T_n (тригонометричних поліномів порядку $\leq n$) і простори $S_{n,r}$ (сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $l\pi/n, l \in \mathbf{Z}$).

Для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ Б. Боянов і Н. Найдьонов [5] розв'язали задачу

$$\int_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \rightarrow \sup, \quad k = 1, 2, \dots,$$

на класі S_φ^k , де Φ — неперервно диференційовна функція на $[0, \infty)$ така, що $\Phi(t)/t$ не спадає і $\Phi(0) = 0$. Як наслідок вони розв'язали задачу Ердьоша [6] про характеристику тригонометричного полінома з фіксованою рівномірною нормою, графік якого на заданому відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ має максимальну довжину. Цю ж задачу для неперіодичних сплайнів на осі було розв'язано в роботі [7].

Через W позначимо клас неперервних, невід'ємних і опуклих функцій Φ , визначених на $[0, \infty)$, таких що $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ покладемо [8]

$$L(x)_p := \sup \left\{ \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \right\}. \quad (1.4)$$

Зазначимо, що $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ і $L(x')_1 \leq 2\|x\|_\infty$.

В роботах [9–11] розв'язано задачу Боянова–Найдьонова і для $k = 0$, а саме задачу

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \quad (1.5)$$

на класі функцій S_φ^0 , що задовольняють умову $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$. Як наслідок отримано розв'язок задачі

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

на класах функцій $x \in S_\varphi^k$.

Задачу Боянова–Найдьонова і нерівності типу Колмогорова–Надя для функцій з несиметричними обмеженнями на старшу похідну розглянуто в роботах [12, 13]. Серед інших робіт, присвячених цій тематиці, відмітимо статті [14, 15].

У цій статті розв'язано задачу (теорема 1)

$$\int_a^b \Phi(x_\pm^p(t)) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \quad (1.7)$$

на класі пар (x, I) функцій $x \in S_\varphi^0$ і відрізків $I = [a, b]$, для яких $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$ і виконано відповідну умову

$$\mu(\text{supp}_{[a,b]} x_\pm) \leq \mu, \quad \mu > 0, \quad (1.8)$$

а також задачу (теорема 2)

$$\int_a^b \Phi(x_\pm^{(k)}(t)) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

на класі пар (x, I) функцій $x \in S_\varphi^k$ і відрізків $I = [a, b]$, для яких виконується відповідна умова

$$\mu(\text{supp}_{[a,b]} x_\pm^{(k)}) \leq \mu, \quad \mu > 0, \quad (1.10)$$

де

$$\text{supp}_{[a,b]} x := \{t \in [a, b] : |x(t)| > 0\}.$$

Зокрема, задачі (1.7) і (1.9) з обмеженнями (1.8) і (1.10) відповідно розв'язано (теорема 3) на класах $\Omega_p^r(A_0, A_r) := \{x \in L_\infty^r : \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}$ і на обмежених підмножинах просторів T_n і $S_{n,r}$ (теореми 4, 5).

Крім того, одержано розв'язок (теорема 6) аналога задачі Ердьоша про характеристизацію пари (x, I) , що складається з полінома $T \in T_n$ із заданою рівномірною нормою і відрізка I з мірою носія $\mu(\text{supp}_I T'_\pm)$, обмеженою заданим числом, для якої підсумкова довжина дуг графіка додатної (від'ємної) частини полінома $T_\pm$ на відрізку I є максимальною. Ту ж саму задачу розв'язано в цій же теоремі для сплайнів із множини $\tilde{S}_{n,r} := \{s(\cdot + \tau) : s \in S_{n,r}, \tau \in \mathbf{R}\}$.

2. Допоміжні твердження. Зазначимо, що якщо функція $x \in S_\varphi^0$ задовольняє умову $L(x)_p < \infty$ з деяким $p > 0$ і $|x(t)| > 0$ для $t \in (a, b)$, до того ж $a = -\infty$ або $b = +\infty$, то $x(t) \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow -\infty$ або $t \rightarrow +\infty$. В цьому випадку будемо вважати $x(-\infty) = 0$ або $x(+\infty) = 0$.

Для сумовної на відрізьку $[a, b]$ функції x символом $r(x, t)$ позначимо перестановку функції $|x|$ (див., наприклад, [16], §1.3). При цьому покладемо $r(x, t) = 0$ для $t > b - a$.

Лема 1. Нехай φ – S -функція з періодом 2ω , $p > 0$, $\Phi \in W$, а функція $x \in S_\varphi^0$ задовольняє умову

$$L(x)_p \leq L(\varphi)_p, \quad (2.1)$$

де величина $L(x)_p$ означена рівністю (1.4).

Якщо інтервал (скінченний або нескінченний) $(a_\pm, b_\pm) \subset \mathbf{R}$ і відрізок $[A_\pm, B_\pm] \subset \mathbf{R}$ такі, що

$$x(a_\pm) = x(b_\pm) = 0, \quad x_\pm(t) > 0, \quad t \in (a_\pm, b_\pm), \quad (2.2)$$

і

$$\varphi(A_\pm) = \varphi(B_\pm) = 0, \quad \varphi_\pm(t) > 0, \quad t \in (A_\pm, B_\pm), \quad (2.3)$$

то для довільного $\xi > 0$ і будь-якої функції $\Phi \in W$ виконуються нерівності

$$\int_{a_\pm}^{a_\pm + \xi} \Phi(\bar{x}_\pm^p(t)) dt \leq \int_{A_\pm}^{A_\pm + \xi} \Phi(\bar{\varphi}_\pm^p(t)) dt \quad (2.4)$$

і

$$\int_{b_\pm - \xi}^{b_\pm} \Phi(\bar{x}_\pm^p(t)) dt \leq \int_{B_\pm - \xi}^{B_\pm} \Phi(\bar{\varphi}_\pm^p(t)) dt, \quad (2.5)$$

де $\bar{x}_\pm$ – звуження $x_\pm$ на $(a_\pm, b_\pm)$, а $\bar{\varphi}_\pm$ – звуження $\varphi_\pm$ на $[A_\pm, B_\pm]$, до того ж за межами відповідних проміжків вважаємо функції $\bar{x}_\pm$ і $\bar{\varphi}_\pm$ рівними нулю.

Крім того, якщо

$$b_\pm - a_\pm \leq B_\pm - A_\pm, \quad (2.6)$$

то для довільного відрізка $[\alpha_\pm, \beta_\pm] \subset [A_\pm, B_\pm]$, для якого

$$\beta_\pm - \alpha_\pm = b_\pm - a_\pm, \quad (2.7)$$

має місце нерівність

$$\int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi(x_\pm^p(t)) dt \leq \int_{\alpha_\pm}^{\beta_\pm} \Phi(\varphi_\pm^p(t)) dt, \quad \Phi \in W. \quad (2.8)$$

Доведення. Зафіксуємо функцію x і проміжки $(a_{\pm}, b_{\pm})$ та $[A_{\pm}, B_{\pm}]$, що задовольняють умови леми. Встановимо нерівність (2.4) (нерівність (2.5) встановлюється аналогічно).

Спочатку встановимо нерівність

$$\int_0^{\xi} r^p(\bar{x}_{\pm}, t) dt \leq \int_0^{\xi} r^p(\bar{\varphi}_{\pm}, t) dt, \quad \xi > 0. \quad (2.9)$$

Переконаємося насамперед у тому, що різниця $\delta_{\pm}(t) := r(\bar{x}_{\pm}, t) - r(\bar{\varphi}_{\pm}, t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Для доведення цього факту зазначимо, що

$$\delta_{\pm}(0) \leq \|x_{\pm}\|_{\infty} - \|\varphi\|_{\infty} \leq 0, \quad (2.10)$$

оскільки $x \in S_{\varphi}^0$. Внаслідок цієї нерівності і співвідношень (2.2), (2.3) для довільного $z_{\pm} \in [0, \|\bar{x}_{\pm}\|_{L_{\infty}[a_{\pm}, b_{\pm}]})$ існують такі точки

$$t_i^{\pm} \in [a_{\pm}, b_{\pm}], \quad i = 1, \dots, m, \quad m \geq 2, \quad y_j^{\pm} \in [A_{\pm}, B_{\pm}], \quad j = 1, 2,$$

що

$$z_{\pm} = \bar{x}_{\pm}(t_i^{\pm}) = \bar{\varphi}_{\pm}(y_j^{\pm}). \quad (2.11)$$

Внаслідок включення $x \in S_{\varphi}^0$ для точок $t_i^{\pm}$ і $y_j^{\pm}$, що задовольняють (2.11), виконується нерівність

$$|\bar{x}'_{\pm}(t_i^{\pm})| \leq |\bar{\varphi}'_{\pm}(y_j^{\pm})|. \quad (2.12)$$

Тому якщо точки $\theta_1^{\pm}, \theta_2^{\pm} > 0$ вибрано так, що

$$z_{\pm} = r(\bar{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm}) = r(\bar{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm}),$$

то за теоремою про похідну перестановки (див., наприклад, [16], твердження 1.3.2) з урахуванням нерівності (2.12) отримуємо

$$|r'(\bar{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm})| = \left[\sum_{i=1}^m |\bar{x}'_{\pm}(t_i^{\pm})|^{-1} \right]^{-1} \leq \left[\sum_{j=1}^2 |\bar{\varphi}'_{\pm}(y_j^{\pm})|^{-1} \right]^{-1} = |r'(\bar{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm})|.$$

Звідси внаслідок (2.10) випливає, що різниця $\delta^{\pm}(t) := r(\bar{x}_{\pm}, t) - r(\bar{\varphi}_{\pm}, t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Те ж саме правильно і для різниці $\delta_p^{\pm}(t) := r^p(\bar{x}_{\pm}, t) - r^p(\bar{\varphi}_{\pm}, t)$.

Розглянемо інтеграл

$$I_p^{\pm}(\xi) := \int_0^{\xi} \delta_p^{\pm}(t) dt, \quad \xi \geq 0.$$

Зрозуміло, що $I_p^{\pm}(0) = 0$, і внаслідок умови (2.1) для $\xi \geq \max\{b_{\pm} - a_{\pm}, B_{\pm} - A_{\pm}\}$ маємо

$$I_p^{\pm}(\xi) \leq L(x_{\pm})_p - L(\varphi_{\pm})_p \leq 0.$$

Крім того, похідна $(I_p^\pm)'(t) = \delta_p^\pm(t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Отже, $I_p^\pm(\xi) \leq 0$ для всіх $\xi \geq 0$. Нерівність (2.9) встановлено. З неї внаслідок теореми Гарді – Літлвуда – Поліа (див., наприклад, [16], теорема 1.3.11) випливає, що

$$\int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi(x_\pm^p(t)) dt \leq \int_{A_\pm}^{B_\pm} \Phi(\varphi_\pm^p(t)) dt, \quad \Phi \in W. \quad (2.13)$$

Встановимо тепер нерівність (2.4). Переходячи до зсувів функцій $\bar{x}$ і $\bar{\varphi}$, можемо вважати, що

$$a_\pm = A_\pm = 0. \quad (2.14)$$

Тоді з включення $x \in S_\varphi^0$ випливає, що різниця $\Delta^\pm(t) := \bar{x}_\pm(t) - \bar{\varphi}_\pm(t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Внаслідок монотонного зростання функцій $f(t) = t^p$ і $\Phi \in W$ те ж саме правильно і для різниці $\Delta_\Phi^\pm(t) := \Phi(\bar{x}_\pm^p(t)) - \Phi(\bar{\varphi}_\pm^p(t))$. Покладемо

$$I_\Phi^\pm(\xi) := \int_0^\xi \Delta_\Phi^\pm(t) dt, \quad \xi \geq 0.$$

Зрозуміло, що $I_\Phi^\pm(0) = 0$. Враховуючи також нерівність (2.13) і припущення (2.14), отримуємо

$$I_\Phi^\pm(\xi) \leq \int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi(\bar{x}_\pm^p(t)) dt - \int_{A_\pm}^{B_\pm} \Phi(\bar{\varphi}_\pm^p(t)) dt \leq 0$$

для $\xi \geq \max\{b_\pm - a_\pm, B_\pm - A_\pm\}$. Крім того, похідна $(I_\Phi^\pm)'(t) = \Delta_\Phi^\pm(t)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Отже, $I_\Phi^\pm(\xi) \leq 0$ для всіх $\xi \geq 0$, що внаслідок припущення (2.14) рівносильно нерівності (2.4).

Залишилось встановити нерівність (2.8) за умов (2.6), (2.7). Нехай останні дві умови виконано. Тоді, переходячи, якщо потрібно, до зсуву функції x , можна вважати, що

$$a_\pm = \alpha_\pm, \quad b_\pm = \beta_\pm. \quad (2.15)$$

Тому з включення $x \in S_\varphi^0$ і умови (2.2) випливає нерівність

$$x_\pm(t) \leq \varphi_\pm(t), \quad t \in [a_\pm, b_\pm].$$

Звідси внаслідок припущення (2.15) безпосередньо отримуємо нерівність (2.8).

Лему 1 доведено.

При доведенні леми 1 було отримано нерівність (2.13). Таким чином, має місце наслідок.

Наслідок 1. За умов леми 1 для довільної функції $\Phi \in W$ виконується нерівність

$$\int_{a_\pm}^{b_\pm} \Phi(x_\pm^p(t)) dt \leq \int_{A_\pm}^{B_\pm} \Phi(\varphi_\pm^p(t)) dt = \int_0^{2\omega} \Phi(\varphi_\pm^p(t)) dt. \quad (2.16)$$

Лема 2. Нехай φ — S -функція з періодом 2ω , $p > 0$, $\Phi \in W$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Якщо функція $x \in S_\varphi^0$ задовольняє умову

$$L(x)_p \leq L(\varphi)_p, \quad (2.17)$$

де величина $L(x)_p$ означена рівністю (1.4), і одну з вимог

$$\delta_\pm := \mu\left(\text{supp}_{[a,b]} x_\pm\right) \leq \omega, \quad (2.18)$$

то для довільної функції $\Phi \in W$ виконується відповідна нерівність

$$\int_a^b \Phi(x_\pm^p(t)) dt \leq \int_{m^\pm - \Theta^\pm}^{m^\pm + \Theta^\pm} \Phi(\varphi_\pm^p(t)) dt, \quad (2.19)$$

де $m^\pm$ — точки локального максимуму функцій $\varphi_\pm$, а числа $\Theta^\pm > 0$ такі, що

$$\varphi(m^\pm - \Theta^\pm) = \varphi(m^\pm + \Theta^\pm), \quad (2.20)$$

до того ж

$$2\Theta^\pm = \delta_\pm. \quad (2.21)$$

Доведення. Зафіксуємо функцію $x \in S_\varphi^0$ і відрізок $[a, b]$, що задовольняють умови леми 2. Встановимо (2.19) для x_+ (для x_- доведення проводиться аналогічно). Нехай відрізок $[a, b]$ задовольняє відповідну вимогу (2.18). Будемо вважати, що

$$x_+(a) > 0, \quad x_+(b) > 0 \quad (2.22)$$

(якщо хоча б одна з цих нерівностей не виконується, встановлення нерівності (2.19) лише спрощується).

Нехай функція x не має нулів на (a, b) . Оскільки $L(x)_p < \infty$ внаслідок умови (2.17), то існує такий інтервал (c, d) (скінченний або нескінченний), що $(a, b) \subset (c, d)$, до того ж

$$x_+(c) = x_+(d) = 0, \quad x_+(t) > 0, \quad t \in (c, d).$$

Через $\bar{x}_+$ позначимо звуження x_+ на (c, d) , а через $\bar{\varphi}_+$ — звуження φ_+ на $[0, 2\omega]$. Застосовуючи до інтервалу (c, d) нерівність (2.16), отримуємо оцінку

$$\int_c^d \Phi(\bar{x}_+^p(t)) dt \leq \int_0^{2\omega} \Phi(\bar{\varphi}_+^p(t)) dt,$$

яку можна записати у вигляді

$$\int_0^{d-c} \Phi(r^p(\bar{x}_+, t)) dt \leq \int_0^{2\omega} \Phi(r^p(\bar{\varphi}_+, t)) dt. \quad (2.23)$$

Як і при доведенні леми 1, можна перевірити, що різниця $\delta_\Phi(t) := \Phi(r^p(\bar{x}_+, t)) - \Phi(r^p(\bar{\varphi}_+, t))$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс), і за допомогою цього факту і нерівності (2.23) встановити нерівність

$$\int_0^\xi \Phi(r^p(\bar{x}_+, t)) dt \leq \int_0^\xi \Phi(r^p(\bar{\varphi}_+, t)) dt, \quad \xi > 0.$$

Зрозуміло, що ця нерівність також матиме місце, якщо під $\bar{x}_+$ розуміти звуження x_+ на (a, b) . Розуміючи під $\bar{x}_+$ саме таке звуження, отримуємо

$$\int_a^b \Phi(\bar{x}_+^p(t)) dt = \int_0^{b-a} \Phi(r^p(\bar{x}_+, t)) dt \leq \int_0^{b-a} \Phi(r^p(\bar{\varphi}_+, t)) dt = \int_{m^+ - \Theta^+}^{m^+ + \Theta^+} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt,$$

де m^+ — точка локального максимуму сплайна φ_+ , а $\Theta^+ > 0$ задовольняє умови (2.20) і (2.21), до того ж $\delta_+ = b - a$. Отже, нерівність (2.19) у випадку, коли x не має нулів на (a, b) , встановлено.

Нехай тепер x має нулі на (a, b) . Покладемо

$$a' := \inf \{t \in (a, b) : x_+(t) = 0\}, \quad b' := \sup \{t \in (a, b) : x_+(t) = 0\}.$$

Тоді внаслідок (2.22) носій $\text{supp}_{[a,b]} x_+$ має вигляд

$$\text{supp}_{[a,b]} x_+ = (a, a') \cup (b', b) \cup \bigcup_k (a_k, b_k), \quad (2.24)$$

де $(a_k, b_k) \subset (a', b')$, до того ж

$$x(a_k) = x(b_k) = 0, \quad x_+(t) > 0, \quad t \in (a_k, b_k)$$

(не виключено, що множина таких інтервалів (a_k, b_k) є порожньою). З огляду на співвідношення (2.18), припущення (2.22) і означення чисел a' , b' маємо

$$\delta_+ = (a' - a) + (b - b') + \sum_k (b_k - a_k) \leq \omega. \quad (2.25)$$

Нехай A_+ і B_+ — два сусідніх нулі функції φ , до того ж $\varphi_+(t) > 0$ для $t \in (A_+, B_+)$. Внаслідок (2.17) $L(x)_p < \infty$. Тому існують інтервали (α', a') , (b', β') (скінченні або нескінченні), для яких

$$x_+(\alpha') = x_+(a') = 0, \quad x_+(t) > 0, \quad t \in (\alpha', a'),$$

і

$$x_+(b') = x_+(\beta') = 0, \quad x_+(t) > 0, \quad t \in (b', \beta').$$

Застосовуючи до інтервалів (α', a') , (b', β') і відрізка $[A_+, B_+]$ нерівності (2.4), (2.5), отримуємо

$$\int_{b'}^b \Phi(x_+^p(t)) dt \leq \int_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt, \quad \xi = b - b', \quad (2.26)$$

і

$$\int_a^{a'} \Phi(x_+^p(t)) dt \leq \int_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt, \quad \eta = a' - a \quad (2.27)$$

(внаслідок (2.25) замість $\bar{x}_+$ в нерівності (2.4) можна написати x_+ , а замість $\bar{\varphi}_+ - \varphi_+$). Внаслідок (2.25) існують такі інтервали (α_k, β_k) , що попарно не перетинаються, $(\alpha_k, \beta_k) \subset (A_+ + \xi, B_+ - \eta)$ і $\beta_k - \alpha_k = b_k - a_k$. Для них на підставі співвідношення (2.8) виконується нерівність

$$\int_{\alpha_k}^{b_k} \Phi(x_+^p(t)) dt \leq \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt. \quad (2.28)$$

Підсумовуючи оцінки (2.26)–(2.28) і враховуючи (2.24), маємо

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi(x_+^p(t)) dt &= \int_a^{a'} \Phi(x_+^p(t)) dt + \int_{b'}^b \Phi(x_+^p(t)) dt + \sum_k \int_{\alpha_k}^{b_k} \Phi(x_+^p(t)) dt \leq \\ &\leq \int_{A_+}^{A_+ + \xi} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt + \int_{B_+ - \eta}^{B_+} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt + \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt. \end{aligned}$$

Оскільки $\beta_k - \alpha_k = b_k - a_k$, то внаслідок (2.25) $\xi + \eta + \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = \delta_+$. Тому сума інтегралів у правій частині отриманої оцінки не перевищує

$$\int_0^{\delta_+} r(\Phi(\varphi_+^p), t) dt = \int_{m^+ - \Theta^+}^{m^+ + \Theta^+} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt,$$

де m^+ — точка локального максимуму функції φ_+ , а $\Theta^+ > 0$ задовольняє співвідношення (2.20) і (2.21). Нерівність (2.19) встановлено.

Лемму 2 доведено.

Наслідок 2. За умов лемми 2 і виконання одного з припущень

$$\mu(\text{supp}_{[a,b]} x_{\pm}) \leq \omega$$

має місце відповідна нерівність

$$\int_a^b \Phi(x_{\pm}^p(t)) dt \leq \int_0^{2\omega} \Phi(\varphi_{\pm}^p(t)) dt. \quad (2.29)$$

3. Розв’язання задачі Боянова – Найдьонова на класах функцій із заданою функцією порівняння. Нехай $p, \omega > 0$, φ — S -функція з періодом 2ω . Покладемо

$$L_\varphi(p, \omega) := \{x \in S_\varphi^0 : L(x)_p \leq L(\varphi)_p\}, \quad (3.1)$$

де величина $L(x)_p$ означена рівністю (1.4). Зафіксуємо число $\mu > 0$ і введемо клас $L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$ пар (x, I) функцій x і відрізків $I = [a, b]$ співвідношенням

$$L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu) := \{(x, I) : x \in L_\varphi(p, \omega), \mu(\text{supp}_I x_\pm) \leq \mu\}. \quad (3.2)$$

Запишемо число μ у вигляді

$$\mu = n \cdot \omega + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in [0, \omega/2). \quad (3.3)$$

Зазначимо, що якщо числа $\tau^\pm \in \mathbf{R}$ і відрізок $[A, B]$ такі, що

$$B - A = 2n\omega + 2\Theta, \quad (3.4)$$

$$\varphi_\pm(A + \Theta + \tau^\pm) = \varphi_\pm(B - \Theta + \tau^\pm) = \|\varphi\|_\infty, \quad (3.5)$$

то $(\varphi(\cdot + \tau^\pm), [A, B]) \in L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$.

Теорема 1. Нехай $p, \omega, \mu > 0$, φ — S -функція з періодом 2ω . Тоді для довільної функції $\Phi \in W$

$$\sup \left\{ \int_a^b \Phi(x_\pm^p(t)) dt : (x, [a, b]) \in L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu) \right\} = \int_A^B \Phi(\varphi_\pm^p(t + \tau^\pm)) dt,$$

де множини $L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$, числа $\tau^\pm$ і відрізок $[A, B]$ визначені співвідношеннями (3.1)–(3.5).

Доведення. Зафіксуємо довільну пару $(x, I) \in L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$, що складається з функції x і відрізка $I = [a, b]$. Доведемо теорему для x_+ (для x_- доведення проводиться аналогічно). Спочатку встановимо нерівність

$$\mathcal{I} := \int_a^b \Phi(x_+^p(t)) dt \leq \int_A^B \Phi(\varphi_+^p(t + \tau^+)) dt := \mathcal{I}(\mu). \quad (3.6)$$

Почнемо з випадку $\text{supp}_{[a, b]} x_+ = \mu$. Оскільки для μ виконується співвідношення (3.3), то відрізок $[a, b]$ можна записати у вигляді

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k, \beta_k] \cup [\alpha, \beta],$$

причому інтервали (α_k, β_k) , (α, β) попарно не перетинаються і

$$\mu(\text{supp}_{[\alpha_k, \beta_k]} x_+) = \omega, \quad \mu(\text{supp}_{[\alpha, \beta]} x_+) = 2\Theta.$$

Тому

$$\int_a^b \Phi(x_+^p(t)) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \Phi(x_+^p(t)) dt + \int_\alpha^\beta \Phi(x_+^p(t)) dt.$$

Застосовуючи для оцінки інтегралів у правій частині цієї рівності нерівності (2.29) і (2.19), отримуємо

$$\int_a^b \Phi(x_+^p(t)) dt \leq n \int_0^{2\omega} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt + \int_{m^+-\Theta}^{m^++\Theta} \Phi(\varphi_+^p(t)) dt = \int_A^B \Phi(\varphi_+^p(t + \tau^+)) dt,$$

де m^+ — точка локального максимуму функції φ , а остання рівність у цій низці співвідношень випливає з (3.4). Отже, нерівність (3.6) встановлено у випадку $\sup_{[a,b]} x_+ = \mu$.

Нехай тепер $\mu_1 := \sup_{[a,b]} x_+ < \mu$. Зазначимо, що число μ однозначно зображується у вигляді (3.3), і тому цим числом однозначно (з точністю до зсуву) визначаються відрізок $[A, B]$ і число τ^+ . Отже, інтеграл $\mathcal{I}(\mu)$ у правій частині (3.6) однозначно визначається числом μ . При цьому очевидно, що $\mathcal{I}(\mu)$ не спадає як функція від μ . Тому, повторюючи міркування з попереднього випадку, для інтеграла $\mathcal{I}$ в лівій частині (3.6) отримуємо оцінку

$$\mathcal{I} \leq \mathcal{I}(\mu_1) \leq \mathcal{I}(\mu).$$

Таким чином, нерівність (3.6) повністю встановлено. Залишилось зазначити, що для пари $(\varphi(\cdot + \tau^\pm), [A, B]) \in L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$, що складається з функції $x(\cdot) = \varphi(\cdot + \tau^+)$ і відрізка $[A, B]$, які задані співвідношеннями (3.3)–(3.5), нерівність (3.6) перетворюється в рівність.

Теорему 1 доведено.

Нехай $k \in \mathbf{N}$, $\omega > 0$, φ — S -функція з періодом 2ω , така що $\varphi \in L_\infty^{k+1}$, $x \in S_\varphi^k$. Тоді $\varphi^{(i)}$ є функцією порівняння для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, k$. Тому

$$L(x^{(k)})_1 \leq 2\|x^{(k-1)}\|_\infty \leq 2\|\varphi^{(k-1)}\|_\infty = L(\varphi^{(k)})_1. \quad (3.7)$$

Отже, $x^{(k)} \in S_{\varphi^{(k)}}(1, \omega)$. Зафіксуємо число $\mu > 0$ і введемо клас пар (x, I) функцій x і відрізків $I = [a, b]$ співвідношенням

$$S_{\varphi, k}^\pm(\omega, \mu) := \{(x, I) : x \in S_\varphi^k, \mu(\sup_I x_\pm^{(k)}) \leq \mu\}. \quad (3.8)$$

З наведених означень і співвідношення (3.7) випливає імплікація

$$(x, I) \in S_{\varphi, k}^\pm(\omega, \mu) \Rightarrow (x^{(k)}, I) \in L_{\varphi^{(k)}}^\pm(1, \omega, \mu), \quad (3.9)$$

де множини $L_\varphi^\pm(p, \omega, \mu)$ визначені за допомогою (3.2).

Запишемо число μ у вигляді

$$\mu = n\omega + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in (0, \omega/2). \quad (3.10)$$

Виберемо далі числа $\tau_k^\pm \in \mathbf{R}$ і відрізок $[A, B]$ так, щоб

$$B - A = 2n\omega + 2\Theta, \quad (3.11)$$

$$\varphi_\pm^{(k)}(A + \Theta + \tau_k^\pm) = \varphi_\pm^{(k)}(B - \Theta + \tau_k^\pm) = \|\varphi^{(k)}\|_\infty. \quad (3.12)$$

Тоді $(\varphi(\cdot + \tau^\pm), [A, B]) \in S_{\varphi, k}^\pm(\omega, \mu)$.

Теорема 2. Нехай $k \in \mathbf{N}$, $\omega, \mu > 0$, φ – S -функція з періодом 2ω , така що $\varphi \in L_{\infty}^{k+1}$. Тоді для довільної функції $\Phi \in W$

$$\sup \left\{ \int_a^b \Phi(x_{\pm}^{(k)}(t)) dt : (x, I) \in S_{\varphi, k}^{\pm}(\omega, \mu) \right\} = \int_A^B \Phi(\varphi_{\pm}^{(k)}(t + \tau_k^{\pm})) dt,$$

де множина $S_{\varphi, k}^{\pm}(\omega, \mu)$, числа $\tau_k^{\pm}$ і відрізок $[A, B]$ задані співвідношеннями (3.8)–(3.12).

Доведення. Внаслідок імплікації (3.9), якщо $(x, I) \in S_{\varphi, k}^{\pm}(\omega, \mu)$, то $(x^{(k)}, I) \in L_{\varphi^{(k)}}^{\pm}(1, \omega, \mu)$, де множина $L_{\varphi}^{\pm}(p, \omega, \mu)$ визначена в (3.2). Тому, застосовуючи теорему 1 до класу $L_{\varphi^{(k)}}^{\pm}(1, \omega, \mu)$, отримуємо твердження теореми 2.

Теорему 2 доведено.

Поклавши $\Phi(t) = t^{q/p}$ в теоремі 1 і $\Phi(t) = t^q$ в теоремі 2, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 3. Нехай $k \in \mathbf{N}$, $p, \omega, \mu > 0$, φ – S -функція з періодом 2ω , $\Phi \in W$. Тоді для довільних $q \geq p$

$$\sup \left\{ \int_a^b x_{\pm}^q(t) dt : (x, I) \in L_{\varphi}^{\pm}(p, \omega, \mu) \right\} = \int_A^B \varphi_{\pm}^q(t + \tau^{\pm}) dt,$$

де множини $L_{\varphi}^{\pm}(p, \omega, \mu)$, числа $\tau^{\pm}$ і відрізок $[A, B]$ задані співвідношеннями (3.1)–(3.5).

Крім того, якщо $k \in \mathbf{N}$, $\mu > 0$, $\varphi \in L_{\infty}^{k+1}$, то для довільного $q \geq 1$

$$\sup \left\{ \int_a^b (x_{\pm}^{(k)}(t))^q dt : (x, I) \in S_{\varphi, k}^{\pm}(\omega, \mu) \right\} = \int_A^B (\varphi_{\pm}^{(k)}(t + \tau_k^{\pm}))^q dt,$$

де множини $S_{\varphi, k}^{\pm}(\omega, \mu)$, числа $\tau_k^{\pm}$ і відрізок задані співвідношеннями (3.8)–(3.12).

4. Розв'язання задачі Боянова – Найдьонова на соболевських класах. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, позначимо зсув r -го 2π -періодичного інтеграла з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, що задовольняє умову $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ покладемо $\varphi_{\lambda, r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$.

Нехай $A_r, A_0, p > 0$. Виберемо $\lambda > 0$ так, щоб

$$A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda, r})_p, \quad (4.1)$$

де величина $L(x)_p$ визначена рівністю (1.4), і покладемо

$$\varphi(t) := A_r \varphi_{\lambda, r}(t). \quad (4.2)$$

Зрозуміло, що $\varphi \in S$ -функцією з періодом $2\pi/\lambda$, до того ж $\|\varphi^{(r)}\|_{\infty} = A_r$, $L(\varphi)_p = A_0$. Розглянемо клас функцій

$$\Omega_p^r(A_0, A_r) := \{x \in L_{\infty}^r : \|x^{(r)}\|_{\infty} \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}. \quad (4.3)$$

Лема 3 [11]. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $A_0, A_r, p > 0$. Тоді для довільного $k = 0, 1, \dots, r-1$

$$\Omega_p^r(A_0, A_r) \subset S_{\varphi}^k,$$

де функція φ визначена рівністю (4.2), а число λ – рівністю (4.1).

Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$; $\mu > 0$. Розглянемо множину пар (x, I) функцій x і відрізків $I = [\alpha, \beta]$, визначених співвідношенням

$$\Omega_p^{r,k}(A_0, A_r)_\pm := \left\{ (x, I) : x \in \Omega_p^r(A_0, A_r), \mu(\text{supp}_I x_\pm^{(k)}) \leq \mu \right\}. \quad (4.4)$$

Запишемо число μ у вигляді

$$\mu = n \frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in (0, \pi/(2\lambda)). \quad (4.5)$$

Виберемо далі числа $\tau^\pm \in \mathbf{R}$ і відрізок $[A, B]$ так, щоб

$$B - A = 2n \frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad (4.6)$$

$$(\varphi_{\lambda, r-k})_\pm(A + \Theta + \tau^\pm) = (\varphi_{\lambda, r-k})_\pm(B - \Theta + \tau_k^\pm) = \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_\infty. \quad (4.7)$$

Тоді $(\varphi_{\lambda, r}(\cdot + \tau^\pm), [A, B]) \in \Omega_p^{r,k}(A_0, A_r)_\pm$.

З теорем 1, 2 і леми 3 випливає таке твердження.

Теорема 3. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $A_0, A_r, p > 0$, $\Phi \in W$. Тоді

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(x_\pm^p(t)) dt : (x, [\alpha, \beta]) \in \Omega_p^{r,0}(A_0, A_r)_\pm \right\} = \int_A^B \Phi((A_r \varphi_{\lambda, r})_\pm(t + \tau^\pm)) dt,$$

а якщо $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, то

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(x_\pm^{(k)}(t)) dt : (x, [\alpha, \beta]) \in \Omega_p^{r,k}(A_0, A_r)_\pm \right\} = \int_A^B \Phi(A_r(\varphi_{\lambda, r-k})_\pm(t + \tau^\pm)) dt,$$

де класи $\Omega_p^{r,k}(A_0, A_r)_\pm$, числа λ , $\tau^\pm$ і відрізок $[A, B]$ визначені в (4.3)–(4.7).

Поклавши $\Phi(t) = t^{q/p}$, $q \geq p$, у першому співвідношенні теореми 3 і $\Phi(t) = t^q$, $q \geq 1$, у другому, отримаємо (як у наслідку 3) точні оцінки норм $\|x_\pm^{(k)}\|_{L_q[\alpha, \beta]}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, на класах $\Omega_p^{r,k}(A_0, A_r)_\pm$.

Теорему 3 доведено в [17].

5. Розв'язання задачі Боянова–Найдьонова на просторах тригонометричних поліномів. Через T_n позначимо простір тригонометричних поліномів порядку не вищого за n . Для $A_0, p > 0$ покладемо

$$T_n(A_0, p) := \{T \in T_n : L(T)_p \leq A_0 L(\sin n(\cdot))_p\},$$

де величина $L(x)_p$ визначена рівністю (1.4).

Лема 4 [11]. Нехай $n \in \mathbf{N}$, $A_0, p > 0$. Для довільного $k = 0, 1, \dots$

$$T_n(A_0, p) \subset S_\varphi^k,$$

де $\varphi(t) = A_0 \sin nt$.

Нехай $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\mu > 0$. Введемо множину пар (T, I) поліномів T і відрізка $I = [\alpha, \beta]$ співвідношенням

$$T_{n,k}^{\pm}(A_0, p, \mu) := \left\{ (T, I) : T \in T_n(A_0, p), \mu(\text{supp}_I T_{\pm}^{(k)}) \leq \mu \right\}. \quad (5.1)$$

Запишемо число μ у вигляді

$$\mu = m \frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in (0, \pi/(2n)). \quad (5.2)$$

Виберемо далі числа $\tau^{\pm} \in \mathbf{R}$ і відрізок $[A, B]$ так, щоб

$$B - A = 2m \frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad (5.3)$$

$$(\sin n(A + \Theta + \tau^{\pm}))_{\pm} = (\sin n(B - \Theta + \tau^{\pm}))_{\pm} = 1. \quad (5.4)$$

З теорем 1, 2 і леми 4 випливає таке твердження.

Теорема 4. Нехай $A_0, p, \mu > 0$, $\Phi \in W$. Тоді

$$\sup \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(T_{\pm}^p(t)) dt : (T, [\alpha, \beta]) \in T_{n,0}^{\pm}(A_0, p, \mu) \right\} = \int_A^B \Phi \left(\left(A_0 \sin n(t + \tau^{\pm}) \right)_{\pm}^p \right) dt$$

і для довільного $k \in \mathbf{N}$

$$\sup \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(T_{\pm}^{(k)}(t)) dt : (T, [\alpha, \beta]) \in T_{n,k}^{\pm}(A_0, p, \mu) \right\} = \int_A^B \Phi \left(n^k A_0 \left(\sin n(t + \tau^{\pm}) \right)_{\pm} \right) dt,$$

де класи $T_{n,k}^{\pm}(A_0, p, \mu)$, числа $\tau^{\pm}$ і відрізок $[A, B]$ визначені в (5.1)–(5.4).

6. Розв'язання задачі Боянова – Найдьонова на просторах сплайнів. Через $S_{n,r}$ позначимо простір 2π -періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$. Для $A_0, p > 0$ покладемо

$$S_{n,r}(A_0, p) := \{s(\cdot + \tau) : s \in S_{n,r}, L(s)_p \leq A_0 L(\varphi_{n,r})_p, \tau \in \mathbf{R}\},$$

де величина $L(x)_p$ визначена рівністю (1.4).

Лема 5 [11]. Нехай $r, n \in \mathbf{N}$, $A_0, p > 0$. Для довільного $k = 0, 1, \dots, r-1$

$$S_{n,r}(A_0, p) \subset S_{\varphi}^k,$$

де $\varphi(t) = A_0 \varphi_{n,r}(t)$.

Нехай $r, n \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, $\mu > 0$. Розглянемо множину пар (s, I) сплайнів s і відрізків $I = [\alpha, \beta]$, визначених співвідношенням

$$S_{n,r}^k(A_0, p, \mu)_{\pm} := \left\{ (s, I) : s \in S_{n,r}(A_0, p), \mu(\text{supp}_I s_{\pm}^{(k)}) \leq \mu \right\}. \quad (6.1)$$

Запишемо число μ у вигляді

$$\mu = m \frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in (0, \pi/(2n)). \quad (6.2)$$

Виберемо далі числа $\tau^\pm \in \mathbf{R}$ і відрізок $[A, B]$ так, щоб

$$B - A = 2m\frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad (6.3)$$

$$(\varphi_{n,r-k})_\pm(A + \Theta + \tau^\pm) = (\varphi_{n,r-k})_\pm(B - \Theta + \tau^\pm) = \|\varphi_{n,r-k}\|_\infty. \quad (6.4)$$

З теорем 1, 2 і леми 5 випливає таке твердження.

Теорема 5. Нехай $r, n \in \mathbf{N}$, $A_0, p, \mu > 0$, $\Phi \in W$. Тоді

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(s_\pm^p(t)) dt : (s, [\alpha, \beta]) \in S_{n,r}^0(A_0, p, \mu)_\pm \right\} = \int_A^B \Phi((A_0 \varphi_{n,r})_\pm(t + \tau^\pm)) dt,$$

а для довільного $k = 1, 2, \dots, r-1$

$$\sup \left\{ \int_\alpha^\beta \Phi(s_\pm^{(k)}(t)) dt : s \in S_{n,r}^k(A_0, p, \mu)_\pm \right\} = \int_\alpha^\beta \Phi(A_0(\varphi_{n,r-k})_\pm(t + \tau^\pm)) dt,$$

де класи $S_{n,r}^k(A_0, p, \mu)_\pm$, числа $\tau^\pm$ і відрізок $[A, B]$ визначені в (6.1)–(6.4).

7. Розв'язання задачі Ердьоша на просторах тригонометричних поліномів і сплайнів.

Б. Боянов і Н. Найдьонов [5] розв'язали задачу Ердьоша [6] про характеризацію тригонометричного полінома $T \in T_n$ з фіксованою рівномірною нормою, графік якого на заданому відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ має максимальну довжину.

В наступній теоремі розв'язано аналогічну задачу про характеризацію пари (T, I) , що складається з полінома $T \in T_n$ із заданою рівномірною нормою і відрізка I з мірою носія $\mu(\text{supp}_I T'_\pm)$, обмеженою заданим числом, для якої підсумкова довжина дуг графіка долатної (від'ємної) частини полінома T на відрізку I є найбільшою. Ту ж саму задачу розв'язано в цій теоремі для сплайнів з множини

$$\tilde{S}_{n,r} := \{s(\cdot + \tau) : s \in S_{n,r}, \tau \in \mathbf{R}\}.$$

Як відомо, довжина дуги $l[a, b]$ графіка функції $x \in L^1[a, b]$ задається формулою $l[a, b] = \int_a^b \sqrt{1 + x'(t)^2} dt$. Зрозуміло, що для функції $\Phi_0(t) = \sqrt{1 + t^2}$ має місце включення $\Phi_0 \in W$. Тому, поклавши $\Phi = \Phi_0$, $k = 1$, $p = \infty$ в теоремах 4 і 5, отримаємо таке твердження.

Теорема 6. Нехай $n \in \mathbf{N}$, $M, \mu > 0$ і μ має вигляд

$$\mu = m\frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \Theta \in (0, \pi/(2n)).$$

Серед усіх пар (x, I) поліномів $x \in T_n$ із заданою рівномірною нормою M і відрізків I сім'ї

$$S := \{I \subset \mathbf{R} : \mu(\text{supp}_I x'_\pm) \leq \mu\}$$

найбільшу підсумкову довжину дуг графіка додатної (від'ємної) частини $x_\pm$ на відрізку I має поліном $x(t) = M \sin n(t + \tau^\pm)$ на відрізку $[A, B]$, для якого

$$B - A = 2m\frac{\pi}{n} + 2\Theta, \quad (7.1)$$

$$(\sin n(A + \Theta + \tau^\pm))_\pm = (\sin n(B - \Theta + \tau^\pm))_\pm = 1.$$

Серед усіх пар (x, I) зсувів сплайнів $x \in \tilde{S}_{n,r}$ із заданою рівномірною нормою M і відрізків I сім'ї S найбільшу підсумкову довжину дуг графіка додатної (від'ємної) частини $x_\pm$ на відріzkі I має зсув сплайна $x(t) = \frac{M}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty} \varphi_{n,r}(t + \tau^\pm)$ на відріzkі $[A, B]$, для якого виконується рівність (7.1) і

$$(\varphi_{n,r-1})_\pm(A + \Theta + \tau^\pm) = (\varphi_{n,r-1})_\pm(B - \Theta + \tau^\pm) = \|\varphi_{n,r-1}\|_\infty.$$

Література

1. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
2. В. Ф. Бабенко, *Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям*, Укр. мат. журн., **52**, № 1, 5–29 (2000).
3. M. K. Kwong, A. Zettl, *Norm inequalities for derivatives and differences*, Lect. Notes Math., **1536** (1992).
4. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Сравнение точных констант в неравенствах для производных на действительной оси и на окружности*, Укр. мат. журн., **55**, № 5, 579–589 (2003).
5. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau–Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263–280 (1999).
6. P. Erdős, *Open problems in approximation theory* (B. Bojanov, Ed.), SCT Publ., Singapore (1994), p. 238–242.
7. В. А. Кофанов, *Неравенства для непериодических сплайнов на действительной оси и их производных*, Укр. мат. журн., **66**, № 2, 216–225 (2014).
8. A. Pinkus, O. Shisha, *Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation*, J. Approx. Theory, **35**, № 2, 148–168 (1982).
9. В. А. Кофанов, *О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси*, Укр. мат. журн., **61**, № 6, 765–776 (2009).
10. V. A. Kofanov, *Some extremal problems of various metrics and sharp inequalities of Nagy–Kolmogorov type*, East J. Approx., **16**, № 4, 313–334 (2010).
11. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969–984 (2011).
12. В. А. Кофанов, *Задача Боянова–Найденова для функций с несимметричными ограничениями на старшую производную*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 368–381 (2019).
13. В. А. Кофанов, *Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными*, Укр. мат. журн., **64**, № 5, 1062–1075 (2012).
14. В. А. Кофанов, *Задача Боянова–Найденова для дифференцируемых функций на оси и неравенства разных метрик*, Укр. мат. журн., **71**, № 6, 786–800 (2019).
15. V. A. Kofanov, *Inequalities of different metrics for differentiable periodic functions*, Ukr. Math. J., **67**, № 2, 230–242 (2015).
16. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наук. думка, Киев (1992).
17. V. V. Kameneva, V. A. Kofanov, *Bojanov–Naidenov problem for positive (negative) parts of differentiable functions on the real domain*, Res. Math., **26**, 25–30 (2018).

Одержано 13.07.22