DOI: 10.37863/umzh.v74i11.7287

УДК 517.922

С. Л. Гефтер, А. Б. Гончарук[1] (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З НЕОДНОРІДНІСТЮ У ВИГЛЯДІ ФОРМАЛЬНОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ НАД КІЛЬЦЕМ ІЗ НЕАРХІМЕДОВИМ НОРМУВАННЯМ[2]

Consider a linear nonhomogeneous differential equation of the mth order with constant coefficients from the valuation ring K of a non-Archimedean field. We establish sufficient conditions for the uniqueness and existence of the solution of this equation in the ring of formal power series $K[[x]]$. In addition, the fundamental solution of the equation is obtained, and it is shown that its convolution with the inhomogeneity is a unique solution of the analyzed equation.

Розглядається лінійне неоднорідне диференціальне рівняння m-го порядку зі сталими коефіцієнтами, що належать кільцю нормування K неархімедового поля. Отримано достатні умови існування та єдиності його розв'язку в кільці формальних степеневих рядів $K[[x]]$. Крім того, для цього рівняння побудовано такий фундаментальний розв'язок, що його згортка з неоднорідністю є єдиним розв'язком розглянутого рівняння.

1. Вступ. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \quad a_m \neq 0. \tag{1}$$

Припустимо, що коефіцієнти цього рівняння є дійсними, а функція $f(x)$ — неперервною. Тоді задача Коші для рівняння (1) з початковими умовами $w(0) = w_0^0, w'(0) = w_0^1, \ldots, w^{(m-1)}(0) = w_0^{m-1}$ має єдиний розв'язок

$$w(x) = w_h(x) + \int\limits_0^x K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

де $w_h(x)$ — розв'язок однорідного рівняння з розглянутими початковими умовами, а $K(x,\xi)$ — функція Коші рівняння (1).

Припустимо, що $f(x)$ — поліном і $a_0 \neq 0$. Тоді, як відомо, рівняння (1) має єдиний поліноміальний розв'язок. Зазначимо, що цей розв'язок складно знайти за допомогою формули (2), оскільки невідомими є початкові умови, що йому відповідають. З іншого боку, якщо F — довільне поле нульової характеристики, $f \in F[x]$ і $a_0 \neq 0$, то єдиний поліноміальний розв'язок рівняння (1) можна знайти суто алгебраїчним методом невизначених коефіцієнтів. Якщо тепер коефіцієнти полінома $f(x)$ належать деякій області цілісності K, то метод невизначених коефіцієнтів дає розв'язок із коефіцієнтами з поля часток кільця K. Ці коефіцієнти можуть не належати K (див. приклад 2).

У цій роботі ми вивчаємо рівняння (1) з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду. Нехай $f(x)$ — формальний степеневий ряд із коефіцієнтами, що належать полю F. Тепер метод невизначених коефіцієнтів є застосовним до розв'язання задачі Коші для рівняння (1) (див. [5], гл. VII). Він дає нескінченну кількість розв'язків цього рівняння у кільці формальних степеневих рядів: один розв'язок для кожного набору початкових умов. Варто зазначити, що

[1] Відповідальна за листування, e-mail: angoncharuk@ukr.net.

[2] Підтримано Національним фондом досліджень України (проєкт 2020.02/0096).

у випадку, коли коефіцієнти ряду $f(x)$ належать області цілісності K, у багатьох важливих ситуаціях рівняння (1) має не більше одного розв'язку із кільця $K[[x]]$ (див. теорему 5). Таким чином, у цьому випадку метод невизначених коефіцієнтів не працює, оскільки заздалегідь не відомі початкові умови, що можуть відповідати єдиному розв'язку.

У 1808 році Б. Бріссон [2], зокрема, зазначив, що за позначенням $D = \dfrac{d}{dx}$ рівняння $Dw + w = f$ формально має розв'язок $w = f - Df + D^2 f - \ldots$ (див. також [23]). Зауважимо, що у випадку, коли у розглянутому рівнянні f є поліномом над деяким кільцем, ця сума дає поліноміальний розв'язок рівняння з коефіцієнтами з того ж кільця. У. Броджи узагальнив результат Б. Бріссона на випадок диференціального рівняння (1) (див. [13], § 5, 22.1). Він знайшов розв'язок цього рівняння у вигляді суми ряду

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x), \tag{3}$$

в якій коефіцієнти c_k задовольняють рівняння

$$\bigl(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0\bigr)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots . \tag{4}$$

Раніше всі ці конструкції розглядались лише у класичній ситуації, тобто над полями дійсних або комплексних чисел, при виконанні відповідних умов збіжності. Звісно, без виконання додаткових умов ряд Бріссона $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(x)$ може бути скрізь розбіжним, наприклад якщо $f(x) = e^x$. Класичні умови збіжності ряду типу (3) можна знайти, наприклад, у [18] (гл. 3, розд. 3) і [25] (гл. 1).

Ми будемо розглядати інші ситуації, в яких можна застосувати конструкцію Броджи (3). У пункті 2 повністю досліджено випадок поліноміальної неоднорідності над довільною областю цілісності. У пункті 3 ми пояснимо, як можна розуміти фразу „ряд (3) формально задовольняє рівняння (1)". У випадку, коли неоднорідність $f(x)$ є формальним степеневим рядом над областю цілісності характеристики нуль (див. [19], означення 1.43), але не є поліномом, ми покажемо, що ряд (3) не є коректно визначеним формальним степеневим рядом, оскільки в якості його „коефіцієнтів" з'являються нескінченні суми елементів кільця (теорема 4). Варто зазначити, що пошук розв'язків рівнянь у вигляді формальних степеневих рядів і означення „формальних" розв'язків рівнянь у ситуаціях, коли звичайний розв'язок рівняння може не існувати, породжує нові постановки задач у сучасній теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [1]).

У роботі [9] (приклад 2.1) показано, що диференціальне рівняння $y' + y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ не має розв'язку у кільці $\mathbb{Z}[[x]]$. У теорема 2.1 зі статті [10] стверджується, що у таких прикладах можна надати зміст коефіцієнтам формального розв'язку (3), якщо розглядати нескінченні суми цілих чисел у кільці цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ (див. також [3], твердження 7.3). Зазначимо, що кільце $\mathbb{Z}_p$ є кільцем нормування поля p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ щодо стандартного неархімедового нормування (див., наприклад, [22], розд. 1.2). Варто зауважити, що вперше теорему існування розв'язків диференціального рівняння над неархімедовим полем було доведено у статті [20].

Основні результати роботи містяться у пункті 4, в якому розглядається довільне поле F нульової характеристики з неархімедовим нормуванням $|\cdot|$ [22] (розд. 1.2) і його кільце нормування $K = \{s \in F \colon |s| \le 1\}$ [17] (гл. XII, § 4). Знайдено деякі умови єдиності розв'язку рівняння (1) (теорема 5). За додаткової умови повноти поля F щодо нормування $|\cdot|$ отримано теорему існування розв'язку цього рівняння й показано, що єдиний розв'язок рівняння (1) має вигляд (3), де збіжність ряду (3) тепер розуміється щодо топології покоефіцієнтної збіжності (теорема 6). Ця теорема є основним результатом роботи. Про топологію покоефіцієнтної збіжності див. [12] (гл. 1, розд. 3). Отримані результати уточнено у частковому випадку, коли $K = \mathbb{Z}_p$ (теорема 7).

У роботі [10] ми побудували деякий аналог згортки (добутку Гурвиця) ряду Ейлера $\mathcal{E}_b(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!b}{x^2} + \frac{2!b^2}{x^3} - \ldots$ та довільного формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами. Було показано, що ряд Ейлера можна розглядати як фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора першого порядку $b\frac{d}{dx} - I$ (див. також [8]). У пункті 5 цієї статті цю конструкцію узагальнено на випадок рівняння (1) та довільного кільця нормування поля, що є повним щодо неархімедового нормування. Крім того, знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок диференціального оператора другого порядку (див. приклади 5, 6 та зауваження 5). Інший, суто алгебраїчний, підхід до поняття фундаментального розв'язку диференціального оператора було розглянуто у роботах [11] і [28] (приклад 6).

На завершення цього пункту зазначимо, що ми досліджуємо лише лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами у кільцях формальних степеневих рядів над областями цілісності нульової характеристики. Розв'язки у вигляді формальних степеневих рядів та більш загальних рядів для класичних лінійних диференціальних рівнянь з раціональними та мероморфними коефіцієнтами вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 21, 26]). Щодо лінійних диференціальних рівнянь у просторах збіжних p-адичних степеневих рядів та рівнянь над полями додатної характеристики див., наприклад, [6, 7, 14 – 16, 24].

2. Поліноміальна неоднорідність. Нехай K — довільна область цілісності з одиницею. В цьому пункті сформульовано і доведено кілька простих результатів, що виникають, якщо розглядати рівняння (1) з поліноміальною неоднорідністю і шукати його розв'язок у вигляді (3).

Теорема 1. *Нехай елементи $a_0, a_1, \ldots, a_m$, належать області K. Рівняння* (1) *має поліноміальний розв'язок для будь-якого $f \in K[x]$ тоді й лише тоді, коли елемент a_0 є оборотним. При цьому поліноміальний розв'язок є єдиним, має вигляд* (3) *і його степінь дорівнює степеню $f(x)$.*

Доведення. Позначимо $D = \frac{d}{dx}$ і $P(t) = a_m t^m + \ldots + a_1 t + a_0$. Якщо a_0 є оборотним, поліном $P(t)$ також є оборотним у кільці формальних степеневих рядів $K[[t]]$. Тоді рівняння (1) можемо записати як $P(D)w = f$, і це рівняння має єдиний розв'язок $w = P^{-1}(D)f$. Оскільки формальний степеневий ряд $(P(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ є оборотним до $P(t)$, то його коефіцієнти однозначно визначені рівністю (4). Тому розв'язок $P^{-1}(D)f$ рівняння (1) знаходиться за формулою (3).

З іншого боку, нехай рівняння має поліноміальний розв'язок для будь-якого полінома $f(x)$, зокрема для $f(x) = 1$. Степені похідних $w', \ldots, w^{(m)}$ менші за степінь w. Тоді максимальний степінь w повинен дорівнювати 0, тобто розв'язок рівняння (1) має вигляд $w(x) = C$. Тому $a_0 C = 1$, тобто елемент a_0 є оборотним.

Теорему 1 доведено.

Для рівнянь першого і другого порядку коефіцієнти c_j, а отже і розв'язок у вигляді (3), можуть бути знайдені явно.

***Зауваження* 1.** Нехай елементи a_0, a_1, a_2 належать області K, $f \in K[x]$ і a_0 — оборотний елемент.

Якщо $m = 1$, то

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j t^j.$$

Отже, $c_j = (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j$. Рівняння $a_1 w' + a_0 w = f(x)$ має єдиний у $K[x]$ розв'язок

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_0^{-k-1} a_1^k f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} a_1^n (k+1)(k+2)\ldots(k+n) f_{k+n} \right) x^k.$$

Якщо $m = 2$, маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{a_0^{n+k+1}} a_1^n a_2^k t^{n+2k} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Отже,

$$c_j = \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Рівняння $a_2 w'' + a_1 w' + a_0 w = f(x)$ має єдиний у $K[x]$ розв'язок

$$w(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(x) \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-k} \binom{j-k}{k} \frac{a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (k+1)(k+2)\ldots(k+j) f_{k+j} \sum_{n=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-n} \binom{j-n}{n} \frac{a_1^{j-2n} a_2^n}{a_0^{j-n+1}} \right) x^k.$$

***Зауваження* 2.** Позначимо через F поле часток кільця K. Якщо $a_0 \neq 0$ не є оборотним у K, то, застосовуючи теорему 1 для F, отримуємо єдиний в $F[x]$ розв'язок рівняння (1). Отже, або цей розв'язок належить $K[x]$, або рівняння (1) не має розв'язку в $K[x]$. Якщо ж $a_0 = 0$ і K нескінченне, то рівняння (1) або має нескінченно багато розв'язків в $K[x]$, або не має жодного. Справді, розв'язуватимемо рівняння (1) щодо $v(x) = w^{(l)}(x)$, де l — мінімальний номер, для якого $a_l \neq 0$. Це рівняння має єдиний розв'язок з $F[x]$. Отримуємо рівняння $w^{(l)}(x) = v(x)$, яке або має нескінченно багато розв'язків, або не має жодного розв'язку в $K[x]$.

***Приклад* 1.** Розглянемо рівняння $3w' + 2w = 2x + 5$ над $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$. В цьому випадку $a_0 = 2 \neq 0$, $a_1 = 3$. Тому $c_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{1}{2}$ і $c_1 = -\dfrac{a_1}{a_0^2} = -\dfrac{3}{4}$. За теоремою 1 єдиний розв'язок з $\mathbb{Q}[x]$ має вигляд

$$w(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) = \frac{1}{2}(2x+5) - 2 \cdot \frac{3}{4} = x + 1 \quad \text{і} \quad w \in \mathbb{Z}[x].$$

***Приклад* 2.** Рівняння $3w' + 2w = x + 5$ має таку саму ліву частину, як і рівняння з попереднього прикладу, тому $c_0 = \dfrac{1}{2}$, $c_1 = -\dfrac{3}{4}$. За теоремою 1 єдиний в $\mathbb{Q}[x]$ розв'язок має вигляд

$$w(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) = \frac{1}{2}(x+5) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Він не належить $\mathbb{Z}[x]$, і тому рівняння не має розв'язків в $\mathbb{Z}[x]$.

***Приклад* 3.** Рівняння $w'(x) = x$ не має розв'язків в $\mathbb{Z}[x]$, але має нескінченно багато розв'язків у кільці $\mathbb{Z}_{(3)}[[x]]$, де $\mathbb{Z}_{(3)} = \left\{\dfrac{n}{m} : (n,m) = 1 \text{ і } m \text{ не ділиться на } 3\right\}$. Справді, поліноми $w(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$, і лише вони, є розв'язками цього рівняння в $\mathbb{Q}[x]$. Для будь-якого $C \in \mathbb{Z}_{(3)}$ розв'язок належить $\mathbb{Z}_{(3)}[x]$ і не належить $\mathbb{Z}[x]$.

3. Неоднорідність з кільця $K[[x]]$. Спочатку зазначимо, що рівняння вигляду (1) з неоднорідністю, що належить $K[[x]] \setminus K[x]$, не може мати розв'язку з $K[x]$. Справді, якщо поліном w є розв'язком рівняння (1), то неоднорідність (1) дорівнює $a_m w^{(m)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w$, тобто також є поліномом. Але таке рівняння може мати розв'язок у $K[[x]]$. Як видно з доведення теореми 1, для поліноміальної неоднорідності природно шукати розв'язок (1) у вигляді (3). Якщо неоднорідність належить $K[[x]]$, то, взагалі кажучи, сума (3) формальних степеневих рядів не є коректно визначеною. Проте її можна розглядати як „формальний" розв'язок і використовувати для знаходження розв'язку рівняння (1).

3.1. Формальний розв'язок. Нехай K — довільна область цілісності з одиницею. Розглянемо кільце $K[[x]][[y]]$ формальних степеневих рядів, що мають вигляд

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) y^k,$$

де $w_k \in K[[x]]$. Нехай $\tilde{D} \colon K[[x]][[y]] \to K[[x]][[y]]$ — K-лінійний оператор, який кожному ряду $w(x,y)$ ставить у відповідність ряд $\dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)\, y$. Для будь-якого $f \in K[[x]]$ за означенням покладемо $\tilde{f}(x,y) = f(x)$. Розглянемо в кільці $K[[x]][[y]]$ рівняння

$$a_m \tilde{D}^m w + a_{m-1} \tilde{D}^{m-1} w + \ldots + a_1 \tilde{D} w + a_0 w = \tilde{f}, \tag{5}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$.

Теорема 2 (існування та єдиність розв'язку)**.** *Нехай a_0 — оборотний елемент K. Тоді рівняння* (5) *у кільці $K[[x]][[y]]$ має єдиний розв'язок*

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) y^k, \tag{6}$$

де коефіцієнти c_k знаходяться з рівності (4).

Доведення. Як було зазначено в доведенні теореми 1, поліном $P(t) = a_m t^m + \ldots + a_1 t + a_0$ оборотний у $K[[t]]$. Рівняння (5) можна записати у вигляді $P(\tilde{D})w = \tilde{f}$. Воно має єдиний розв'язок $(P(\tilde{D}))^{-1}\tilde{f}$, де $(P(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Оскільки $(\tilde{D}^k \tilde{f})(x,y) = f^{(k)}(x) y^k$, ми отримуємо розв'язок (6).

Якщо f належить $K[x]$ і елемент a_0 є оборотним, сума ряду (3) є розв'язком рівняння (1). Якщо f належить $K[[x]] \setminus K[x]$, можна говорити, що (3) є *формальним* розв'язком рівняння (1).

Означення 1. *Нехай* w_k *належить* $K[[x]]$. *Ряд* $w(x)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ *є формальним розв'язком рівняння* (1), *якщо* $w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)y^k$ *задовольняє рівняння* (5).

Розглянемо тепер диференціальне рівняння (1) над K з неоднорідністю $f\in K[[x]]$ і наведемо зв'язок між ним і рівнянням (5).

Теорема 3. *Припустимо, що коефіцієнт* a_0 *рівняння* (1) *оборотний.*

1. *Якщо послідовність* $\{c_k\}$ *задовольняє рівність* (4), *то ряд* (3) *є формальним розв'язком рівняння* (1).

2. *Нехай* K — *область цілісності нульової характеристики і* $f\in K[[x]]\setminus K[x]$. *Якщо ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ *є формальним розв'язком рівняння* (1), *то послідовність* $\{c_k\}$ *задовольняє рівність* (4).

Доведення. Перше твердження випливає з теореми 2.

Нехай тепер $b_k\in K,\ k=1,2,3,\ldots,$ і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)}(x)$ задовольняє рівняння (1). Якщо c_k — послідовність, що задовольняє (4), то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(b_k-c_k)f^{(k)}(x)y^k$ є розв'язком однорідного рівняння

$$a_m\tilde{D}^m w+a_{m-1}\tilde{D}^{m-1}w+\ldots+a_1\tilde{D}w+a_0w=0. \qquad (7)$$

З теореми 2 випливає, що $(b_k-c_k)f^{(k)}(x)=0$ для будь-якого k.

Тепер припустимо від супротивного, що існує j, для якого $b_j\neq c_j$. Оскільки K — область цілісності, то $\dfrac{(j+i)!}{j!}f_{j+i}=0$ для будь-якого i. З огляду на те, що K є областю цілісності характеристики нуль, маємо $f_j=f_{j+1}=\ldots=0$, тобто $f\in K[x]$, що суперечить умові теореми.

Теорему 3 доведено.

Наступна лема за деяких умов розв'язку рівняння (5) ставить у відповідність розв'язок рівняння (1).

Лема 1. *Нехай деякий* K*-лінійний оператор* $T\colon K[[x]][[y]]\to K[[x]]$ *з областю визначення* $\mathfrak{D}(T)$ *задовольняє такі умови*:

1) $\tilde{D}(\mathfrak{D}(T))\subset\mathfrak{D}(T)$;

2) $T(\tilde{D}w)=(Tw)'(x)$ *для кожного* $w\in\mathfrak{D}$;

3) $T\tilde{f}=f$ *для будь-якого* $f\in K[[x]]$, *якщо* $\tilde{f}(x,y)=f(x)$.

Якщо $w\in\mathfrak{D}(T)$ *є розв'язком рівняння* (5), *то* Tw *є розв'язком рівняння* (1).

Доведення. Оскільки w належить $\mathfrak{D}(T)$, то $\tilde{D}w,\tilde{D}^2w,\ldots,\tilde{D}^m w$ належать $\mathfrak{D}(T)$. Ряд $w(x,y)\in\mathfrak{D}(T)$ є розв'язком рівняння (5), тому

$$T(a_m\tilde{D}^m w+a_{m-1}\tilde{D}^{m-1}w+\ldots+a_1\tilde{D}w+a_0w)=T\tilde{f}.$$

Для будь-якого j маємо $T(\tilde{D}^j w(x,y))=(Tw)^{(j)}$ і $T\tilde{f}=f$, а тому

$$a_m(Tw)^{(m)}+a_{m-1}(Tw)^{(m-1)}+\ldots+a_1(Tw)'+a_0Tw=f.$$

Лему 1 доведено.

3.2. Збіжність формального розв'язку в M-адичній топології. У кільці $K[[x]]$ будемо розглядати максимальний ідеал $M=xK[[x]]$ та відповідну M-адичну топологію (див., наприклад, [4], розд. III.1). Збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x),\ w_k(x)\in K[[x]]$, в цій топології означає, що коефіцієнт при кожному степені x^n є сумою скінченної кількості елементів з K.

Наслідок **1.** *Нехай ряд* $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$, *що збігається в кільці* $K[[x]]$ *в* M*-адичній топології, є формальним розв'язком рівняння* (1). *Тоді цей ряд є розв'язком рівняння* (1) *і дорівнює ряду* (3). *Також його можна записати у вигляді*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (k+1)(k+2)\ldots(k+n) f_{k+n} \right) x^k, \tag{8}$$

де коефіцієнт при кожному степені x^k *є скінченною сумою елементів* K.

Доведення. Нехай відображення $T\colon K[[x]][[y]] \to K[[x]]$ з областю визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y^k \colon \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) \ \text{ збігається в } M\text{-адичній топології} \right\}$$

задається рівністю

$$T(v(x,y)) = v(x,1). \tag{9}$$

Оператор T задовольняє всі умови леми 1. Справді, оскільки $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ збігається в M-адичній топології, то $\sum_{k=0}^{\infty} v_k'(x)$ також збігається в цій топології, тому $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)y \in \mathfrak{D}(T)$. Також $T\tilde{f}(x,y) = f(x)$ для $f \in K[[x]]$ і

$$T\Big(\tilde{D}w\Big) = T\left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)y\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)y\right)\bigg|_{y=1} = \frac{\partial w}{\partial x}(x,1) = (Tw)'.$$

Нехай $w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) y^k$. Тоді з леми 1 маємо, що $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ є розв'язком рівняння (1). За теоремою 2 $w(x)$ можна записати як (3). Неважко перевірити, що коефіцієнт при степені x^k дорівнює $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (k+1)(k+2)\ldots(k+n) f_{k+n}$.

Наслідок 1 доведено.

Нехай тепер характеристика поля часток F кільця K дорівнює 0. Розглянемо рівняння (1) з неоднорідністю із $F[[x]]$. За теоремою 3 ряд (3) є формальним розв'язком рівняння (1). В теоремі 4 стверджується, що ряд (3) збігається в M-адичній топології тоді й лише тоді, коли f — поліном.

Оскільки ряд (8) збігається в M-адичній топології тоді й лише тоді, коли формальний коефіцієнт $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (k+j)! f_{k+j}$ має скінченну кількість ненульових доданків для кожного k, отримуємо наступну умову збіжності.

Лема 2. *Нехай* $c_j, f_j \in F$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ — *довільні елементи поля* F. *Ряд* (8) *збігається у кільці* $F[[x]]$ *в* M*-адичній топології тоді й лише тоді, коли для кожного* k *існує* i *таке, що* $c_j f_{j+k} = 0$ *для будь-якого* $j > i$.

Наступний приклад демонструє, що теорема 4 не випливає очевидним чином з цієї леми, тому що умова леми може виконуватись навіть якщо ні $\{c_j\}$, ні $\{f_j\}$ не є фінітними послідовностями.

Приклад **4.** Нехай $F = \mathbb{Q}$. Розглянемо послідовність $\{c_i\}$, для якої $c_j = 1$, якщо існує r таке, що $j = 2^r$; інакше $c_i = 0$. Також розглянемо таку послідовність $\{f_i\}$, що $f_i = 1$, якщо $i = 2^r + r$, і $f_i = 0$ в іншому випадку.

Для будь-якого k позначимо $i = 2^{k+1}$. Оскільки для будь-якого $j > i$, для якого $c_j \neq 0$, існує таке r, що $j = 2^r$, маємо $j = 2^r > i = 2^{k+1}$, отже, $k \leq r - 1$. Тоді $f_{k+j} = f_{2^r+k} = 0$, позаяк $2^{r-1} + r - 1 < 2^r < 2^r + k < 2^r + r$. Отже, якщо $c_j \neq 0$, то $f_{k+j} = 0$, а тому $c_j f_{j+k} = 0$.

Незважаючи на це, якщо $\{c_j\}$ не є довільною послідовністю, а задовольняє (4), справджується така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $f \in F[[x]]$, $a_0, \ldots, a_m \in F$, $a_0 \neq 0$ *і* c_j *задовольняють рівність* (4). *Ряд* (3) *збігається в* M*-адичній топології в* $F[[x]]$ *тоді й лише тоді, коли* $f \in F[x]$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що оскільки послідовність $\{c_j\}$ задовольняє рівняння (4), вона не є фінітною і є розв'язком системи

$$a_0 c_0 = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{j} a_i c_{j-i} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=0}^{m} a_i c_{j-i} = 0, \quad j = m+1, m+2, \ldots.$$

Далі, зазначимо, що для будь-якого j існує таке $1 \leq i \leq m$, що $c_{j+i} \neq 0$. Справді, якщо існує таке j, що $c_{j+1} = c_{j+2} = \ldots = c_{j+m} = 0$, то з системи маємо $c_i = 0$ для всіх $i \geq j+1$. Це суперечить тому, що послідовність $\{c_j\}$ не є фінітною.

Доведемо тепер, що коли ряд $f(x)$ не є поліномом, то для деякого k послідовність $\{c_j(k+ + j)! f_{k+j}\}$ не є фінітною. Припустимо протилежне, тобто для кожного k існує таке i_k, що $c_j f_{k+j} = 0$ для будь-якого $j > i_k$. Розглянемо таке $j > \max_{k=0,1,\ldots,m} i_k$, що $c_j \neq 0$. Тоді $f_j = f_{j+1} = \ldots = f_{j+m} = 0$. Як показано раніше, існує таке $1 \leq i \leq m$, що $c_{j+i} \neq 0$, отже, $f_{j+i} = f_{j+i+1} = \ldots = f_{j+i+m} = 0$. Таким чином, оскільки $j + i + m > j + m$, для кожного $k > j$ маємо $f_k = 0$, що суперечить припущенню.

Теорему 4 доведено.

4. Кільце з неархімедовим нормуванням. ***4.1. Загальний випадок.*** Нехай $(F, |\cdot|)$ — поле характеристики нуль з неархімедовим нормуванням і $K = \{s \in F : |s| \leq 1\}$ — його кільце нормування. Зауважимо, що елемент $a \in K$ є оборотним тоді й лише тоді, коли $|a| = 1$. В цьому пункті на кільці $K[[x]]$ ми будемо розглядати топологію покоефіцієнтної збіжності (див. [12], гл. 1, розд. 3).

Теорема 5. *Нехай у рівнянні* (1) *коефіцієнти* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *належать* K, $|a_0| = 1$ *і* $|a_i| < 1$ *для будь-якого* $1 \leq i \leq m$. *Тоді це рівняння має не більше одного розв'язку в* $K[[x]]$.

Доведення. Розглянемо однорідне рівняння

$$a_m y^{(m)}(x) + a_{m-1} y^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{10}$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді $y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots$. Тоді для будь-якого k виконується рівність

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(k+i)!}{k!} a_i y_{k+i} = 0.$$

Тому

$$y_k = -a_0^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(k+i+1)!}{k!} a_{i+1} y_{k+i+1}. \tag{11}$$

Для набору індексів $i_1, \ldots, i_k$ позначимо $s_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$, $p_k = \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1}$. Тоді отримаємо

$$y_0 = -a_0^{-1} \sum_{i_1=0}^{m-1} (s_1+1)! p_1 y_{s_1+1} = a_0^{-2} \sum_{i_1=0}^{m-1} p_1 \sum_{i_2=0}^{m-1} (s_2+2)! a_{i_2+1} y_{s_2+2} =$$

$$= a_0^{-2} \sum_{i_1,i_2=0}^{m-1} (s_2+2)! p_2 y_{s_2+2} = -a_0^{-3} \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{m-1} (s_3+3)! p_3 y_{s_3+3} = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{m-1} (s_k+k)! p_k y_{s_k+k}.$$

Позначивши $b = \max_{i=1}^{m} |a_i| < 1$, переконаємося, що $|p_k| \le b^k \to 0$ при $k \to \infty$. Оскільки нормування $|\cdot|$ неархімедове, то $|y_0| \le b^k$, а отже, $y_0 = 0$. Так само з рівності (11) отримуємо, що $y_k = 0$ для всіх k.

Теорему 5 доведено.

Тепер сформулюємо умови існування розв'язку. Для цього розглянемо перетворення T, що задається рівністю (9) і має область визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) y^k : \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) \text{ збігається в топології покоефіцієнтної збіжності в } K[[x]] \right\}.$$

Теорема 6. *Нехай F повне щодо $|\cdot|$, $|a_0| = 1$ і $|a_i| < 1$ для всіх $1 \le i \le m$. Тоді ряд* (3) *збігається в кільці $K[[x]]$ у топології покоефіцієнтної збіжності і його сума є єдиним в $K[[x]]$ розв'язком рівняння* (1).

Доведення. Відображення T задовольняє умови леми 1. Справді, так само, як в доведенні наслідку 1, можна показати, що $T\left(\tilde{D}v\right) = (Tv)'(x)$ і $T\tilde{f}(x,y) = f(x)$ для $f \in K[[x]]$. Якщо $v \in \mathfrak{D}(T)$, то для будь-якого j ряд $\sum_{i=0}^{\infty} v_{ij}$ збігається в K щодо нормування $|\cdot|$. Тоді для будь-якого j ряд $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_{i(j+1)}$ також збігається в K щодо $|\cdot|$. Таким чином,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_{i(j+1)} x^j \right) y^i \in \mathfrak{D}(T).$$

За теоремою 2 ряд $w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) y^k$ є розв'язком рівняння (5). Перевіримо, що $w(x,y)$ належить $\mathfrak{D}(T)$. Для цього оцінимо коефіцієнти c_j ряду $w(x,y)$, що знаходяться з рівності (4). Маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m} = \frac{a_0^{-1}}{1 - a_0^{-1}\big(-a_1 - a_2 t - \ldots - a_m t^{m-1}\big)t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0^{-n-1} \big(a_1 + a_2 t + \ldots + a_m t^{m-1}\big)^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} (-1)^n \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_m!} \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m}}{a_0^{n+1}} t^{n+i_2+2i_3+\ldots+(m-1)i_m}.$$

Розглянемо степінь t^j. З огляду на те, що $j = n+i_2+2i_3+\ldots+(m-1)i_m \leq mn$, отримуємо нерівність $n \geq \left[\dfrac{j}{m}\right]$.

Оскільки $|\cdot|$ неархімедове, то $|c_j|$ не більший за максимум серед усіх чисел

$$\left|(-1)^n \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_m!} \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m}}{a_0^{n+1}}\right|$$

таких, що $n + i_2 + 2i_3 + \ldots + (m-1)i_m = j$.

Позначаючи $b = \max_{i=1}^m |a_i| < 1$, одержуємо

$$\left|(-1)^n a_0^{-n-1} \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m}\right| < b^n \leq b^{[\frac{j}{m}]}. \tag{12}$$

Оскільки $b < 1$, то

$$|c_j| \leq b^{[\frac{j}{m}]} \to 0 \ \text{ при } \ j \to \infty. \tag{13}$$

Позаяк $\left|\dfrac{(j+k)!}{k!} f_{k+j}\right| \leq 1$ для будь-якого k, то ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \dfrac{(j+k)!}{k!} f_{k+j}$ з рівності (8) збігається в K. Тут ми скористалися тим фактом, що в повному неархімедовому полі ряд $\sum a_k$ збігається тоді й лише тоді, коли $\{a_k\}$ прямує до 0 [22] (розд. 2.1).

Таким чином, $w \in \mathfrak{D}(T)$. Тепер з леми 1 випливає, що Tw є розв'язком рівняння (1).

Теорему 6 доведено.

4.2. Випадок цілих чисел. У частковому випадку, коли $(F, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ — поле p-адичних чисел [22] (розд. 1.2), кільце нормування $\mathbb{Q}_p$ є кільцем цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$.

Наступний результат є уточненням теореми 6 у випадку, коли коефіцієнти рівняння (1) є цілими числами.

Теорема 7. *Нехай елементи $a_0, a_1, \ldots, a_m$ належать $\mathbb{Z}$. Тоді рівняння* (1) *має єдиний розв'язок з $\mathbb{Z}_p[[x]]$ для будь-якого простого p, що не є дільником a_0.*

Доведення. Якщо p не є дільником a_0, то $|a_0|_p = 1$. Ряди $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \dbinom{n+k}{n} n! f_{k+n}$ збігаються в $\mathbb{Z}_p$, оскільки $|c_n \binom{n+k}{n} f_{k+n}|_p \leq 1$ і $|n!|_p$ прямує до 0. Тому, використовуючи таке саме відображення T, що і в попередній теоремі, робимо висновок, що існує розв'язок рівняння (1) з $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

Тепер доведемо єдиність. Для набору індексів $i_1, \ldots, i_k$ позначимо $s_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$. Коефіцієнти розв'язку $y(x)$ однорідного рівняння задовольняють рівність

$$y_0 = k! \cdot (-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_k=0, k \in \mathbb{N}}^{m-1} \frac{(s_k+k)!}{k!} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1} y_{s_k+k}$$

для будь-якого k. Оскільки

$$\left|(-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_k=0,k\in\mathbb{N}}^{m-1} \frac{(s_k+k)!}{k!} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1} y_{s_k+k}\right|_p \leq 1$$

і $|k!|_p \to 0$ при $k \to \infty$, то $y_0 = 0$. Так само отримуємо і рівності $y_k = 0$ для всіх $k \geq 1$.

Теорему 7 доведено.

***Зауваження* 3.** Розв'язок з кільця $\mathbb{Z}_p[[x]]$ не обов'язково належить $\mathbb{Z}[[x]]$. Наприклад, рівняння $w' + w = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, за попередньою теоремою, має єдиний розв'язок в $\mathbb{Z}_p[[x]]$, але, як було зазначено у вступі, не має розв'язку у кільці $\mathbb{Z}[[x]]$.

5. Фундаментальний розв'язок. Нехай K — довільна область цілісності з одиницею, а $\frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ — модуль формальних рядів Лорана, що мають вигляд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{x^j}$. У цьому пункті розглядатимемо модуль $\frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ як аналог кільця $K[[x]]$. Ми побудуємо аналог згортки формального ряду Лорана і формального степеневого ряду і знайдемо фундаментальний розв'язок $\mathcal{E}$ диференціального оператора $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{d^i}{dx^i}$, що дозволить записати розв'язок рівняння (1) у вигляді згортки $\mathcal{E}$ з неоднорідністю f. У класичній теорії лінійних диференціальних рівнянь фундаментальний розв'язок оператора $\mathcal{F}$ — це розв'язок рівняння $\mathcal{F}\mathcal{E} = \delta$, де δ є дельта-функцією і $\mathcal{E}$ належить простору узагальнених функцій (див., наприклад, [27], гл. 3). В розглядуваній ситуації аналогом дельта-функції буде моном Лорана $\frac{1}{x}$ (див. лему 5).

Спочатку розглянемо в модулі $\frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = g(x), \tag{14}$$

де $a_0, \ldots, a_m \in K$ і $g(x) \in \frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$.

Лема 3. *Нехай елемент a_0 оборотний, $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j}{x^j}$, а послідовність $\{c_k\}$ визначено з рівності* (4). *Тоді ряд*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(x) \tag{15}$$

є коректно визначеним рядом Лорана й єдиним у кільці $\frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ розв'язком рівняння (14). *Цей ряд також можна записати у вигляді*

$$w(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i c_i g_{\ell-i} i! \binom{\ell-1}{i} \right) x^{-\ell}. \tag{16}$$

Доведення. Спочатку встановимо єдиність. Нехай $w \in \frac{1}{x}K\left[\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ — розв'язок однорідного рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = 0.$$

Через $-k$ позначимо максимальний степінь x у нетривіальному розв'язку $w(x)$, що має ненульовий коефіцієнт. Тоді максимальний степінь доданків $a_m w^{(m)}(x), a_{m-1} w^{(m-1)}(x), \ldots, a_1 w'(x)$ не перевищує $-k-1$. Таким чином, коефіцієнт при x^{-k} в $w(x)$ дорівнює нулю. З суперечності випливає, що однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок.

Тепер доведемо, що ряд (15) є коректно визначеним. Справді, максимальний степінь $\left\{g^{(k)}\right\}$ зменшується. З цього випливає, що в сумі (15) коефіцієнт при кожному степені x складається зі скінченної кількості доданків із K.

Так само, як і в теоремі 1, можна перевірити, що ряд (15) є розв'язком рівняння (14).

Лему 3 доведено.

Наслідок 2. *Нехай елемент a_0 є оборотним. Тоді рівняння* (14) *з неоднорідністю $g(x) = \dfrac{1}{x}$ має єдиний у кільці $\dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$ розв'язок*

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}. \tag{17}$$

***Приклад* 5.** У випадку $m = 2$ послідовність $\{c_k\}$ знайдено в зауваженні 1. В цьому випадку рівняння

$$a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = \frac{1}{x}$$

має єдиний розв'язок у $\dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$:

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^j \binom{k-j}{j} a_0^{-k+j-1} a_1^{k-2j} a_2^j \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

У статті [9] ми розглядали згортку (добуток Гурвиця) двох формальних рядів Лорана $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{f_i}{x^i} \in \dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$ і $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{g_i}{x^i} \in \dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$, що була визначена таким чином:

$$(f * g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f_{i+1} \frac{g_n^{(i)}(x)}{i!}.$$

Неважко перевірити, що $\left(\dfrac{1}{x} * g\right)(x) = g(x)$ для будь-якого $g \in \dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$. Крім того, $(\mathcal{E} * g)(x)$, де $\mathcal{E}(x)$ визначено в (17), збігається з правою частиною рівності (15), тобто $(\mathcal{E} * g)(x)$ — єдиний розв'язок рівняння (14). Це дозволяє розглядати $\mathcal{E}(x)$ як *фундаментальний розв'язок оператора* $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{m} a_i \dfrac{d^i}{dx^i}$ (див. [27], гл. 3). Випадок рівняння першого порядку розглянуто в [9].

***Приклад* 6.** У випадку $m = 2$ формальний ряд Лорана $\mathcal{E}(x)$ з прикладу 5 є фундаментальним розв'язком оператора $a_2 \dfrac{d^2}{dx^2} + a_1 \dfrac{d}{dx} + a_0 I$ в кільці $\dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$.

***Зауваження* 4.** В [9] також було розглянуто означення згортки формального ряду Лорана $g(x) \in \dfrac{1}{x}\,K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$ з поліномом $f \in K[x]$ у вигляді $(g * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i g_{i+1}\dfrac{f_n^{(i)}(x)}{i!}$. Легко перевірити, що згортка $\mathcal{E} * f$ є єдиним поліноміальним розв'язком рівняння (1).

Нехай тепер $(K, |\cdot|)$ — кільце нормування поля F, де F — повне неархімедове поле характеристики нуль (див. пункт 4). Розглянемо топологію покоефіцієнтної збіжності на кільці $K[[x]]$. За допомогою ряду (17) можна подати розв'язок рівняння (1) як згортку так само, як це зроблено в [10] для рівняння першого порядку у випадку, коли $(K, |\cdot|) = (\mathbb{Z}_p, |\cdot|_p)$.

Лема 4. *Нехай* $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{x^i} \in \dfrac{1}{x}\,K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$ *і* $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in K[[x]]$. *Якщо* $b_i \to 0$, *то ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_{i+1}\frac{f^{(i)}(x)}{i!} \tag{18}$$

збігається в топології покоефіцієнтної збіжності в кільці $K[[x]]$.

Доведення. Коефіцієнти ряду $\dfrac{f^{(i)}(x)}{i!}$ належать K, тому вони не перевищують 1 за нормуванням $|\cdot|$. Оскільки $b_i \to 0$, коефіцієнти при кожному степені x у (18) є збіжними рядами.

З цієї леми випливає, що наступне поняття згортки є коректно визначеним.

Означення 2. *Так само, як у* [8, 10], *згорткою* $(b * f)(x)$ *формального ряду Лорана* $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{b_i}{x^i} \in \dfrac{1}{x}\,K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$, *де* b_i *прямує до* 0, *і довільного формального степеневого ряду* $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in K[[x]]$ *будемо називати суму ряду* (18).

Лема 5 (властивості згортки). *Для будь-яких* $b \in \dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$, *де* b_i *прямує до* 0, *і* $f \in K[[x]]$ *виконуються такі рівності*:

1) $(b * f)'(x) = (b * f')(x) = (b' * f)(x)$;

2) $\left(\dfrac{1}{x} * f\right)(x) = f(x)$.

Доведення. Оскільки $b'(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{ib_i}{x^{i+1}}$, то $\big(b' * f\big)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{i-1}b_i}{(i-1)!}\, f^{(i)}(x)$. Тоді отримуємо

$$(b * f)'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i b_{i+1}}{i!} f^{(i+1)}(x) = \big(b * f'\big)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}b_i}{(i-1)!}\, f^{(i)}(x) = (b' * f)(x).$$

Теорема 8. *Припустимо, що виконуються умови теореми* 6. *Тоді єдиний розв'язок з* $K[[x]]$ *рівняння* (1) *має вигляд*

$$w(x) = (\mathcal{E} * f)(x),$$

де $\mathcal{E}(x)$ *визначено рівністю* (17).

Доведення. За умовами теореми 6 послідовності $\{c_k\}$, а тому і $\{k!c_k\}$, прямують до 0 (див. нерівність (12)). Таким чином, за лемою 4 згортка $\mathcal{E} * f$ є коректно визначеною.

Розглянемо диференціальний оператор у кільці $\dfrac{1}{x}K\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$: $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^{m} a_i \dfrac{d^i}{dx^i}$. Тоді рівняння (14) набирає вигляду $\mathcal{F}w = f$. Розв'язок рівняння $(\mathcal{F}w)(x) = \dfrac{1}{x}$ отримуємо за формулою (17). З цього випливає, що $\big(\mathcal{E} * f\big)(x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді, за властивостями згортки (лема 5) маємо

$$\mathcal{F}(\mathcal{E} * f)(x) = (\mathcal{F}\mathcal{E} * f)(x) = \left(\frac{1}{x} * f\right)(x) = f(x).$$

Теорему 8 доведено.

Наступний наслідок уточнює попередній результат для випадку рівняння з цілими коефіцієнтами.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, m$, *і просте число* p *не є дільником* a_0. *Тоді рівняння* (1) *в кільці* $\mathbb{Z}_p[[x]]$ *має єдиний розв'язок*

$$w(x) = (\mathcal{E} * f)(x).$$

Доведення. Нехай $(F, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$. Повторимо міркування з доведення теореми 8, окрім твердження, що $\{c_k\}$ прямує до нуля. Тепер послідовність $\{k!c_k\}$ прямує до нуля 0, оскільки $|k!|_p \to 0$ і $|c_k|_p \leq 1$.

***Зауваження* 5.** Теорема 8 дозволяє розглядати ряд $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ як фундаментальний розв'язок диференціального оператора $\sum_{i=0}^{m} a_i \dfrac{d^i}{dx^i}$ для кільця $K[[x]]$.

Література

1. W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, New York (2000); DOI:10.1017/10.1007/b97608.
2. B. Brisson, *Sur l'intégrazion des équations différentielles partielles*, J. Éc. polytech. Math., **14**, 191 – 261 (1808).
3. P. Buckingham, *Factorial-type recurrence relations and* p*-adic incomplete gamma functions*; ArXiV (2022); DOI: 10.48550/arXiv.2206.12726.
4. P.-J. Cahen, J.-L. Chabert, *Integer-valued polynomials*, Math. Surveys and Monogr., vol. 48 (1997).
5. H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover Books on Math., Dover Publ. (2013).
6. B. Dwork, *Lectures on* p*-adic differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 253, Springer, New York etc. (1982); DOI:10.1007/978-1-4613-8193-8.
7. B. Dwork, G. Gerotto, F. J. Sullivan, *An introduction to* G*-functions. (AM-133)*, vol. 133, Ann. Math. Stud., Princeton Univ. Press (2016); DOI: 10.1515/9781400882540.
8. S. L. Gefter, *Differential operators of infinite order in the space of formal laurent series and in the ring of power series with integer coefficients*, J. Math. Sci., **239**, № 3, 282 – 291 (2019); DOI: 10.1007/s10958-019-04304-y.
9. S. L. Gefter, A. B. Goncharuk, *Fundamental solution of an implicit linear inhomogeneous first order differential equation over an arbitrary ring*, J. Math. Sci., **219**, № 6, 922 – 935 (2016); DOI: 10.1007/s10958-016-3155-9.
10. S. L. Gefter, A. B. Goncharuk, *The Hurwitz product,* p*-adic topology on* $\mathbb{Z}$*, and fundamental solution to linear differential equation in the ring* $\mathbb{Z}[[x]]$, J. Math. Sci., **228**, № 6, 633 – 638 (2018); DOI: 10.1007/s10958-017-3651-6.
11. S. L. Gefter, T. E. Stulova, *Fundamental solution of the simplest implicit linear differential equation in a vector space*, J. Math. Sci., **207**, 166 – 175 (2015); DOI: 10.1007/s10958-015-2363-z.
12. H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag (1971); DOI: 10.1007/978-3-642-65033-8.
13. E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Springer-Verlag (2013); DOI:10.1007/978-3-663-05925-7.
14. K. S. Kedlaya, *p-Adic differential equations*, Cambridge Univ. Press (2010); DOI:10.1017/CBO9780511750922.
15. A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, W. A. Zuniga-Galindo, *Ultrametric pseudodifferential equations and applications*, Encyclopedia Math. and Appl., Cambridge Univ. Press (2018); DOI:10.1017/9781316986707.

16. A. N. Kochubei, *Analysis in positive characteristic*, Cambridge Tracts in Math., Cambridge Univ. Press (2009); DOI:10.1017/CBO9780511575624.
17. S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York (2012); DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0.
18. A. F. Leont'ev, *Generalization of series of exponentials (in Russian)*, Nauka, Moscow (1981).
19. R. Lid, H. Niederreiter, *Finite fields*, Cambridge Univ. Press (1996); DOI:10.1017/CBO9780511525926.
20. E. Lutz, *Sur l'équation $y^2 = x^3 - ax - b$ dans les corps p-adiques*, J. reine und angew. Math., **177**, 238 – 247 (1937).
21. B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Enseign. Math., **20**, 147 – 176 (1974).
22. C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press (2010); DOI:10.1017/CBO9780511729959.
23. S. Pincherlet, *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni*, Rend. Lincei, **5**, 27 – 33 (1896).
24. P. Robba, G. Christol, *Equations différentielles p-adiques: applications aux sommes exponentielles*, Actualités Math., vol. 12, Hermann (1994).
25. P. C. Sikkema, *Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients; researches in connection with integral functions of finite order*, P. Noordhoff, Groningen (1953); DOI: 10.2307/3610004.
26. M. F. Singer, *Formal solutions of differential equations*, J. Symbolic Comput., **10**, 59 – 94 (1990).
27. V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow (1979).
28. О. Л. Півень, С. Л. Гефтер, *Диференціальні оператори нескінченного порядку в модулі формальних узагальнених функцій та у кільці формальних степеневих рядів*, Укр. мат. журн., **74**, № 6, 784 – 799 (2022); DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6955.

Одержано 19.08.22