DOI: 10.37863/umzh.v74i11.7292

УДК 517.54, 517.95

С. В. Грищук[1], **С. А. Плакса** (Ін-т математики НАН України, Київ)

БІГАРМОНІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ КУТА І МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ

We consider a piecewise continuous biharmonic problem in an angle and the corresponding Schwartz-type boundary-value problem for monogenic functions in a commutative biharmonic algebra. These problems are reduced to a system of integral equations on the positive semiaxis. It is shown that, on each segment of this semiaxis, the set of solutions of the system coincides with the set of solutions of a certain system of Fredholm integral equations.

Розглядається кусково-неперервна бігармонічна задача у куті і відповідна їй крайова задача типу задачі Шварца для моногенних функцій у комутативній бігармонічній алгебрі. Вказані задачі редуковано до системи інтегральних рівнянь на додатній півпрямій. Показано, що на кожному відрізку цієї півпрямої множина розв'язків системи збігається з множиною розв'язків певної системи інтегральних рівнянь Фредгольма.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел і

$$D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon\ x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ 0 < \theta < \alpha,\ \ 0 < r < \infty\big\}$$

з фіксованим $\alpha \in (0;2\pi)$ — кут у декартовій площині xOy з вершиною в початку координат.

Розглянемо *бігармонічну задачу* (див., наприклад, [1]), яка полягає у відшуканні бігармонічної функції $u\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, тобто функції, що задовольняє рівняння

$$\Delta^2 u(x,y) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in D, \tag{1}$$

якщо граничні значення її частинних похідних першого порядку на множині $\partial D \setminus \{(0,0)\}$ задовольняють умови

$$\begin{gathered}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_1(x_0,y_0),\\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in D} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u_3(x_0,y_0) \quad \forall (x_0,y_0) \in \partial D \setminus \{(0,0)\}\end{gathered} \tag{2}$$

і справджуються оцінки

$$\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| \le c\,(x^2+y^2)^{-\beta_0/2}, \quad x^2+y^2 \to 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| \le c\,(x^2+y^2)^{-\beta_\infty/2}, \quad x^2+y^2 \to \infty, \quad (x,y) \in D, \tag{4}$$

де $\beta_0, \beta_\infty \in (0,1)$ і стала c не залежить від (x,y).

Будемо припускати лише, що задані функції $u_j : \partial D \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1,3\}$, неперервні на множині $\partial D \setminus \{(0,0)\}$. Водночас з оцінок (3), (4) випливає, що для заданих функцій повинні виконуватись нерівності

$$|u_j(x_0,y_0)| \le c\,(x_0^2+y_0^2)^{-\beta_0/2}, \quad x_0^2+y_0^2 \to 0, \quad (x_0,y_0) \in \partial D, \tag{5}$$

[1] Відповідальний за листування, e-mail: serhii.gryshchuk@gmail.com.

$$|u_j(x_0, y_0)| \le c\,(x_0^2 + y_0^2)^{-\beta_\infty/2}, \quad x_0^2 + y_0^2 \to \infty, \quad (x_0, y_0) \in \partial D, \tag{6}$$

де стала c не залежить від (x_0, y_0).

Теорію крайових задач для еліптичних рівнянь в областях з кусково-гладкими межами розвинуто в роботах багатьох авторів (див., наприклад, роботи [2 – 5] і наведену в них бібліографію). При цьому вивчено питання існування і єдиності розв'язків крайових задач для еліптичних операторів у вагових просторах, досліджено асимптотичні властивості розв'язків в околах кутових точок та вплив кутових точок на гладкість розв'язків тощо.

Для розв'язування крайових задач для бігармонічних функцій розвинено методи, що використовують аналітичні функції комплексної змінної, техніка використання яких базується на зображенні бігармонічних функцій формулою Гурса. Це дозволяє зводити крайові задачі для бігармонічних функцій до відповідних крайових задач для пари аналітичних функцій. Далі з використанням зображення аналітичних функцій інтегралами типу Коші в загальному випадку отримують систему інтегро-диференціальних рівнянь. У випадку, коли межа області є кривою Ляпунова, зазначена система, як правило, зводиться до системи рівнянь Фредгольма. Таку схему розроблено (див., наприклад, [6 – 8]) для розв'язування основних задач плоскої теорії пружності з використанням спеціальної бігармонічної функції, яка називається функцією напружень Ері. Інші методи зведення крайових задач плоскої теорії пружності до інтегральних рівнянь розвинено в роботах [1, 9 – 15].

У роботі [16] показано, що для обмеженої області, межа якої є кривою Радона (тобто кривою з обмеженим обертанням (див. [17])) з кутовими точками у випадку заданих граничних функцій, що задовольняють умову Гельдера, основні крайові задачі плоскої теорії пружності можна звести до інтегрального рівняння типу рівняння Мусхелішвілі (див. [6]).

Розглядалися також крайові задачі для бігармонічних функцій в областях з конкретними кусково-гладкими межами (див., наприклад, [18 – 22]). Зокрема, у роботі [19] з використанням багатошарових потенціалів бігармонічну задачу для квадранта з неперервними крайовими умовами редуковано до системи інтегральних рівнянь. У роботі [20] до системи інтегральних рівнянь редуковано основну бігармонічну задачу для квадранта про відшукання бігармонічної функції за заданими значеннями функції на межі області та значеннями її нормальної похідної в усіх точках межі, за винятком кутової точки.

Новий метод розв'язування бігармонічної задачі, який базується на зв'язку бігармонічних функцій з моногенними функціями у двовимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем комплексних чисел та на зображенні розв'язків гіперкомплексними інтегралами, аналогічними класичним інтегралам Шварца і інтегралам типу Коші, розвинено в роботах [23 – 28]. Цей метод у загальному випадку дозволяє редукувати бігармонічну задачу й основну бігармонічну задачу безпосередньо до систем інтегральних рівнянь, оминаючи інтегро-диференціальні рівняння. У роботах [24 – 27] встановлено достатні умови фредгольмовості вказаної системи для обмежених областей з гладкими межами, що належать більш широким класам, ніж клас кривих Ляпунова, який, як правило, розглядався раніше в плоскій теорії пружності.

У даній роботі гіперкомплексний метод розв'язання бігармонічної задачі застосовується у випадку конкретної необмеженої кутової області D, яку ми розглядаємо як модельний приклад для вдосконалення методики розв'язання задачі за наявності кутових точок на межі області.

2. Крайова задача для моногенних функцій у бігармонічній алгебрі, асоційована з бігармонічною задачею. У роботі [29] асоціативну комутативну двовимірну алгебру $\mathbb{B}$ з одиницею e над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ названо *бігармонічною*, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє вимоги

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0 \tag{7}$$

(який також названо *бігармонічним*), і запропоновано таблицю множення для такого базису:

$$e_1^2 = e_1, \qquad e_2 e_1 = e_2, \qquad e_2^2 = e_1 + 2ie_2,$$

де i — уявна комплексна одиниця.

У роботі [30] доведено єдиність бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ і показано, що вона породжується небігармонічним базисом $\{e, \rho\}$, де

$$\rho = 2e_1 + 2ie_2, \tag{8}$$

при цьому $\rho^2 = 0$, а також описано всі бігармонічні базиси в $\mathbb{B}$. Зауважимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна чотиривимірним алгебрам над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, розглянутим у роботах [31, 32].

Задамо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ в алгебрі $\mathbb{B}$, де $a = z_1 e_1 + z_2 e_2$ і $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Як і в роботі [29], розглянемо *бігармонічну площину* $\mu := \{\zeta = x\, e_1 + y\, e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Області D декартової площини xOy поставимо у відповідність конгруентну їй область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\}$ у площині μ. Їх межі позначатимемо відповідно через ∂D та ∂D_ζ. Скрізь далі $\zeta := x\, e_1 + y\, e_2,\ z := x + iy$, де $(x, y) \in D$, і $\zeta_0 := x_0 e_1 + y_0 e_2$, де $(x_0, y_0) \in \partial D$.

Оскільки в бігармонічній площині немає дільників нуля, то похідна функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ визначається так, як і для аналітичних функцій комплексної змінної, а саме,

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}.$$

Функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ називається *моногенною* в області D_ζ, якщо її похідна $\Phi'(\zeta)$ існує у кожній точці $\zeta \in D_\zeta$.

Кожну функцію $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ записують у вигляді

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2, \tag{9}$$

де $U_j : D \longrightarrow \mathbb{R},\ j = \overline{1, 4}$, — дійснозначні компоненти-функції. Для них також будемо використовувати позначення $\mathrm{U}_j[\Phi] := U_j,\ j = \overline{1, 4}$.

У роботі [29] доведено, що функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ моногенна в області D_ζ тоді й лише тоді, коли всі її дійснозначні компоненти з розкладу (9) диференційовні в D і виконується аналог умов Коші – Рімана

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2. \tag{10}$$

У роботах [33, 34] доведено, що кожна моногенна функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ має похідні $\Phi^{(n)}(\zeta)$ усіх порядків в області D_ζ і задовольняє рівняння (1) в області D на підставі першого зі співвідношень (7) і рівності

$$\Delta^2\Phi(\zeta) = \Phi^{(4)}(\zeta)\,(e_1^2 + e_2^2)^2.$$

Тому всі компоненти $U_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1,4}$, з розкладу (9) є бігармонічними функціями в області D.

Крім того, кожна бігармонічна в D функція $U(x,y)$ є першою компонентою $U_1 \equiv U$ з розкладу (9) для деякої моногенної функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$. Всі такі функції Φ знайдено в роботах [33, 34] у явному вигляді для обмежених однозв'язних областей, але з урахуванням теореми єдиності для моногенних функцій (див. [34]) результат поширюється на необмежені однозв'язні області, до яких належить задана кутова область D_ζ.

Нехай Φ_1 — моногенна функція в області D_ζ, яка має своєю першою компонентою шукану функцію $u(x,y)$ бігармонічної задачі, тобто Φ_1 має розклад

$$\Phi_1(\zeta) = u(x,y)\,e_1 + U_2(x,y)\,ie_1 + U_3(x,y)\,e_2 + U_4(x,y)\,ie_2 \quad \forall\zeta \in D_\zeta.$$

З умови (10) для $\Phi = \Phi_1$ випливає рівність $\partial U_3(x,y)/\partial x = \partial u(x,y)/\partial y$. Тому

$$\Phi_1'(\zeta) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,e_1 + \frac{\partial U_2(x,y)}{\partial x}\,ie_1 + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,e_2 + \frac{\partial U_4(x,y)}{\partial x}\,ie_2 \quad \forall\zeta \in D_\zeta.$$

Отже, бігармонічна задача з крайовими умовами (2) редукується до еквівалентної крайової задачі про знаходження моногенної в області D_ζ функції $\Phi \equiv \Phi_1'$ у випадку, коли значення двох компонент $\mathrm{U}_j[\Phi]$, $j \in \{1,3\}$, розкладу (9) задано на множині $\partial D_\zeta \setminus \{0\}$.

Наведемо точне формулювання крайової задачі для моногенних функцій, що є предметом цього розгляду.

Розглянемо кусково-неперервну (1–3)-*задачу* про знаходження моногенної функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, для якої граничні значення компонент $\mathrm{U}_j[\Phi(\zeta)]$, $j \in \{1,3\}$, з розкладу (9) задовольняють крайові умови

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_j[\Phi(\zeta)] = u_j(\zeta_0) \quad \forall\zeta_0 \in \partial D_\zeta \setminus \{0\}, \quad j \in \{1,3\}, \tag{11}$$

де $u_j : \partial D_\zeta \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1,3\}$, — задані неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \{0\}$ функції (при цьому ми ототожнюємо задані функції бігармонічної задачі та (1–3)-задачі: $u_j(x_0,y_0) \equiv u_j(\zeta_0)$, $j \in \in \{1,3\}$). Крім того, шукана функція Φ у відповідності з оцінками (3), (4) повинна задовольняти нерівності

$$\Big|\mathrm{U}_j[\Phi(\zeta)]\Big| \le c\,\|\zeta\|^{-\beta_0}, \quad \zeta \to 0, \quad \zeta \in D_\zeta, \tag{12}$$

$$\Big|\mathrm{U}_j[\Phi(\zeta)]\Big| \le c\,\|\zeta\|^{-\beta_\infty}, \quad \|\zeta\| \to \infty, \quad \zeta \in D_\zeta, \tag{13}$$

при $j \in \{1,3\}$, де $\beta_0, \beta_\infty \in (0,1)$ і стала c не залежить від ζ.

У роботі [35] задачі такого типу названо *бігармонічними задачами Шварца* з огляду на їхню пряму аналогію з класичною задачею Шварца про відшукання аналітичної функції комплексної змінної, коли значення її дійсної частини задано на межі області.

Після розв'язання (1–3)-задачі моногенна функція Φ_1 (а разом з нею і перша її компонента — розв'язок u бігармонічної задачі) знаходиться в результаті контурного інтегрування

$$\Phi_1(\zeta) = \int\limits_{\gamma_{\zeta_1\zeta}} \Phi(\tau)\,d\tau + \mathrm{const} \quad \forall \zeta \in D_\zeta$$

вздовж спрямлюваної кривої $\gamma_{\zeta_1\zeta} \subset D_\zeta$, що сполучає фіксовану точку $\zeta_1 \in D_\zeta$ з точкою ζ. Зазначимо, що внаслідок справедливості інтегральної теореми Коші для моногенних функцій (див. [34]) результат такого інтегрування не залежить від вибору кривої $\gamma_{\zeta_1\zeta}$.

Скрізь далі інтеграли вздовж необмеженого контуру Γ розуміються у сенсі головного значення за Коші, тобто

$$\int\limits_{\Gamma} g(\tau,\cdot)\,d\tau := \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{\{\tau\in\Gamma\,:\,\|\tau\|\le N\}} g(\tau,\cdot)\,d\tau.$$

Будемо шукати розв'язки (1–3)-задачі у класі функцій, що зображуються у вигляді бігармонічного інтеграла типу Коші

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\zeta} \varphi(\tau)(\tau-\zeta)^{-1}\,d\tau =: \mathcal{B}[\varphi](\zeta) \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{14}$$

де

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta)\,e_1 + \varphi_3(\zeta)\,e_2 \quad \forall \zeta \in \partial D_\zeta \tag{15}$$

і функції $\varphi_j : \partial D_\zeta \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1,3\}$, неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \{0\}$, а умови на їхню поведінку на нескінченності та в околі нуля будуть наведені нижче.

3. Допоміжні твердження. Позначимо $k_1 := \cos\alpha$, $k_2 := \sin\alpha$. Введемо до розгляду відкриті промені $R_+ := \{xe_1 : x \in (0,+\infty)\}$ і $L_\alpha := \{rk_1e_1 + rk_2e_2 : r \in (0,+\infty)\}$, що є частинами межі ∂D_ζ.

Розглядаючи функцію $v : R_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ як функцію дійсної змінної, зберігаємо для неї те ж саме позначення, тобто $v(x) \equiv v(xe_1)$ при $x > 0$.

Для функції $v : L_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$, визначеної на промені L_α, введемо до розгляду функцію дійсної змінної $\widetilde{v}(r) := v(r(k_1e_1 + k_2e_2))$ при $r > 0$.

При $s_1, s \in (0,\infty)$ позначимо

$$q(s_1,s) := \big(s^2 - 2k_1ss_1 + s_1^2\big)^2 \equiv \big((k_1s - s_1)^2 + k_2^2s^2\big)^2.$$

Нехай $E \subset \mathbb{R}$. Для функції $v_* : E \longrightarrow \mathbb{R}$, неперервної на множині E, розглянемо її модуль неперервності на E:

$$\omega_E(v_*,\varepsilon) = \sup_{t_1,t_2\in E\,:\,|t_1-t_2|\le\varepsilon} |v_*(t_1) - v_*(t_2)|.$$

Лема 1. *Нехай функція* $\upsilon\colon \partial D_\zeta \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *неперервна на* $\partial D_\zeta \setminus \{0\}$ *і задовольняє нерівності*

$$\big|\upsilon(\tau)\big| \le c\,\|\tau\|^{-\beta_0}, \quad \tau \to 0, \quad \tau \in \partial D_\zeta \setminus \{0\}, \tag{16}$$

$$\big|\upsilon(\tau)\big| \le c\,\|\tau\|^{-\beta_\infty}, \quad \|\tau\| \to \infty, \quad \tau \in \partial D_\zeta, \tag{17}$$

де $\beta_0, \beta_\infty \in (0,1)$ *і стала* c *не залежить від* τ. *Тоді компоненти* $\mathrm{U}_1[\mathcal{B}[\upsilon]]$, $\mathrm{U}_3[\mathcal{B}[\upsilon]]$, $\mathrm{U}_4[\mathcal{B}[\upsilon]]$ *інтеграла* $\mathcal{B}[\upsilon]$ *неперервно продовжуються на* $\partial D_\zeta \setminus \{0\}$ *з області* D_ζ. *При цьому для всіх* $\zeta_0 \in R_+$ *справджуються рівності*

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_1[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = \frac{1}{2}\,\upsilon(\|\zeta_0\|) + \frac{k_2^3\|\zeta_0\|}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{s^2\,\widetilde{\upsilon}(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds, \tag{18}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_3[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = -\frac{k_2^2\|\zeta_0\|}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{s\big(k_1 s - \|\zeta_0\|\big)\,\widetilde{\upsilon}(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds, \tag{19}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_4[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = \frac{k_2\|\zeta_0\|}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Big(k_2^2 s^2 - \big(k_1 s - \|\zeta_0\|\big)^2\Big)\widetilde{\upsilon}(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds, \tag{20}$$

а для всіх $\zeta_0 \in L_\alpha$ *— рівності*

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_1[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = \frac{1}{2}\,\widetilde{\upsilon}(\|\zeta_0\|) + \frac{k_2^3\|\zeta_0\|^3}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\upsilon(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds, \tag{21}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_3[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = \frac{k_2^2\|\zeta_0\|^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\big(s - k_1\|\zeta_0\|\big)\upsilon(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds, \tag{22}$$

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in D_\zeta} \mathrm{U}_4[\mathcal{B}[\upsilon](\zeta)] = \frac{k_2\|\zeta_0\|}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Big(k_2^2\|\zeta_0\|^2 - \big(s - k_1\|\zeta_0\|\big)^2\Big)\upsilon(s)}{q\big(\|\zeta_0\|, s\big)}\,ds. \tag{23}$$

Доведення. Для точки $\tau = t_1 e_1 + t_2 e_2 \in \partial D_\zeta$, де $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, позначимо $t := t_1 + i t_2$. Легко отримуємо вираз (див., наприклад, [33, 34])

$$(\tau - \zeta)^{-1} = \frac{1}{t - z}\,e_1 + \frac{t_2 - y}{(t-z)^2}\,\frac{i}{2}\,\rho.$$

Тоді $\mathcal{B}[\upsilon]$ записуємо у вигляді суми двох інтегралів:

$$\mathcal{B}[\upsilon] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R_+} \upsilon(\tau)\left(e_1\frac{dt}{t-z} + \left(\frac{t_2 - y}{(t-z)^2}\,dt - \frac{dt_2}{t-z}\right)\frac{i\rho}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha} \upsilon(\tau)\left(e_1\frac{dt}{t-z} + \left(\frac{t_2 - y}{(t-z)^2}\,dt - \frac{dt_2}{t-z}\right)\frac{i\rho}{2}\right) := I_+ + I_\alpha. \tag{24}$$

Враховуючи рівність $i\rho/2 = ie_1 - e_2$, що випливає з рівності (8), виділяємо компоненти $\mathrm{U}_j[I_+]$, $\mathrm{U}_j[I_\alpha]$ інтегралів $I_+,\ I_\alpha$ при $j = 1,3,4$. Оскільки $t_2 = 0$ при $\tau \in R_+$, то

$$\mathrm{U}_1[I_+] = \frac{y^3}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\upsilon(t)}{|t-z|^4}\,dt, \tag{25}$$

$$\mathrm{U}_3[I_+] = \frac{y^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\upsilon(t)\,(t-x)}{|t-z|^4}\,dt, \tag{26}$$

$$\mathrm{U}_4[I_+] = \frac{y}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\upsilon(t)\left(y^2-(t-x)^2\right)}{|t-z|^4}\,dt. \tag{27}$$

Виконаємо такі перетворення інтеграла I_α:

$$I_\alpha = \frac{e_1}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{t_1-x-i(t_2-y)}{|t-z|^2}(dt_1+i\,dt_2) +$$

$$+\,\frac{ie_1-e_2}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_2-y)\,dt_1-(t_1-x)\,dt_2}{(t-z)^2} =$$

$$= -\frac{e_1}{2\pi}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_2-y)\,dt_1-(t_1-x)\,dt_2}{|t-z|^2} + \frac{e_1}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_1-x)\,dt_1+(t_2-y)\,dt_2}{|t-z|^2} +$$

$$+\,\frac{ie_1-e_2}{2\pi i}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{\big((t_1-x)^2-(t_2-y)^2-2i(t_1-x)(t_2-y)\big)\big((t_2-y)\,dt_1-(t_1-x)\,dt_2\big)}{|t-z|^4}.$$

З урахуванням рівностей $t = |t|\,e^{i\alpha} = t_1 + it_2$ і $z = |z|\,e^{i\psi}$, де $0 < \psi < \alpha$, маємо

$$(t_2-y)\,dt_1-(t_1-x)\,dt_2 = k_1(k_2|t|-y)\,d|t| - k_2(k_1|t|-x)\,d|t| = (k_2x-k_1y)\,d|t| = \delta_z\,d|t|,$$

де $\delta_z := |z|\sin(\alpha-\psi)$.

Оскільки $\|\tau\| = |t|$, в результаті отримуємо

$$\mathrm{U}_1[I_\alpha] = -\frac{\delta_z}{\pi}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_2-y)^2}{|t-z|^4}\,d\|\tau\|, \tag{28}$$

$$\mathrm{U}_3[I_\alpha] = \frac{\delta_z}{\pi}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_1-x)(t_2-y)}{|t-z|^4}\,d\|\tau\|, \tag{29}$$

$$\mathrm{U}_4[I_\alpha] = \frac{\delta_z}{2\pi}\int\limits_{L_\alpha}\upsilon(\tau)\,\frac{(t_1-x)^2-(t_2-y)^2}{|t-z|^4}\,d\|\tau\|. \tag{30}$$

Доведемо рівність (18). Для цього спочатку запишемо рівність (25) у вигляді

$$\mathrm{U}_1[I_+] = \frac{y^3}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\upsilon(t) - \upsilon(x)}{\big((t-x)^2 + y^2\big)^2}\, dt + \frac{y^3\, \upsilon(x)}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\big((t-x)^2 + y^2\big)^2} =: I_1 + I_2.$$

Зауважимо, що якщо $\zeta \to \zeta_0 \equiv x_0 e_1 \in R_+$, то $z \to x_0$ і $y \to 0$. Тому, не зменшуючи загальності, вважаємо, що $|z - x_0| < x_0/4$. При цьому маємо рівність

$$I_1 = \frac{y^3}{\pi} \int\limits_{x-|y|}^{x+|y|} \frac{\upsilon(t) - \upsilon(x)}{\big((t-x)^2 + y^2\big)^2}\, dt + \frac{y^3}{\pi} \left(\int\limits_{x_0/2}^{x-|y|} + \int\limits_{x+|y|}^{\infty} \right) \frac{\upsilon(t) - \upsilon(x)}{\big((t-x)^2 + y^2\big)^2}\, dt +$$

$$+ \frac{y^3}{\pi} \int\limits_0^{x_0/2} \frac{\upsilon(t) - \upsilon(x)}{\big((t-x)^2 + y^2\big)^2}\, dt =: I_1' + I_1'' + I_1'''$$

і отримуємо співвідношення

$$|I_1'| \le \frac{|y|^3}{\pi} \int\limits_{x-|y|}^{x+|y|} \frac{\omega_{[x_0/2,\infty)}(\upsilon, |y|)}{y^4}\, dt = \frac{2}{\pi}\, \omega_{[x_0/2,\infty)}(\upsilon, |y|) \to 0, \quad y \to 0,$$

$$|I_1''| \le \frac{|y|^3}{\pi} \left(\int\limits_{x_0/2}^{x-|y|} + \int\limits_{x+|y|}^{\infty} \right) \frac{\omega_{[x_0/2,\infty)}(\upsilon, |t-x|)}{|t-x|^4}\, dt \le$$

$$\le \frac{2|y|^3}{\pi} \int\limits_{|y|}^{\infty} \frac{\omega_{[x_0/2,\infty)}(\upsilon, \eta)}{\eta^4}\, d\eta \to 0, \quad y \to 0.$$

Крім того, враховуючи оцінку (16), одержуємо

$$|I_1'''| \le c\, \frac{|y|^3}{x_0^4} \int\limits_0^{x_0/2} \max\{t^{-\beta_0}, 1\}\, dt \to 0, \quad y \to 0.$$

Після обчислення інтеграла у виразі I_2 маємо

$$I_2 \to \frac{1}{2}\, \upsilon(x_0), \quad z \to x_0.$$

Тепер для доведення рівності (18) залишилося зауважити, що другий доданок з правої частини цієї рівності отримується в результаті граничного переходу під знаком інтеграла у виразі (28) при $\zeta \to \zeta_0 \equiv x_0 e_1 \in R_+$.

Аналогічно встановлюються співвідношення

$$\mathrm{U}_j[I_+] \to 0, \quad \zeta \to \zeta_0 \in R_+, \quad j = 3, 4,$$

і рівності (19), (20).

В свою чергу, рівності (21) – (23) встановлюються аналогічно рівностям (18) – (20).

Лему доведено.

Лема 2. *За умов леми* 1 *компоненти* $\mathrm{U}_1[\mathcal{B}[v]]$, $\mathrm{U}_3[\mathcal{B}[v]]$, $\mathrm{U}_4[\mathcal{B}[v]]$ *інтеграла* $\mathcal{B}[v]$ *задовольняють нерівності вигляду* (12), (13).

Доведення. Використаємо зображення (24) інтеграла $\mathcal{B}[v]$ і вирази (25) – (30) відповідних компонент інтегралів I_+, I_α.

Нехай оцінка (16) виконується при $\tau \in \partial D_\zeta \setminus \{0\} : \|\tau\| \equiv |t| < \delta_0$. Покажемо, що для компоненти $\mathrm{U}_1[I_+]$ виконується оцінка вигляду (12) при $\zeta \in D_\zeta : \|\zeta\| \equiv |z| < \delta_0/2$. З цією метою інтеграл (25) запишемо у вигляді суми трьох інтегралів:

$$\mathrm{U}_1[I_+] = \frac{y^3}{\pi}\int\limits_0^{|z|/2}\frac{v(t)}{|t-z|^4}\,dt + \frac{y^3}{\pi}\int\limits_{|z|/2}^{\delta_0}\frac{v(t)}{|t-z|^4}\,dt + \frac{y^3}{\pi}\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{v(t)}{|t-z|^4}\,dt =: I_3 + I_4 + I_5.$$

Враховуючи нерівність (16), отримуємо оцінки

$$|I_3| \le c\,\frac{|y|^3}{|z|^4}\int\limits_0^{|z|/2} t^{-\beta_0}\,dt \le c\,|z|^{-\beta_0},$$

$$|I_4| \le c\,|z|^{-\beta_0}\,|y|^3\int\limits_{|z|/2}^{\delta_0}\frac{dt}{\big((t-x)^2+y^2\big)^2} \le c\,|z|^{-\beta_0},$$

де через c позначено різні сталі, значення яких не залежать від z. Очевидно також, що при $|z| < \delta_0/2$ інтеграл I_5 обмежений сталою, що не залежить від z.

Аналогічно оцінюються компоненти (26) – (30) в околі нуля та компоненти (25) – (30) при $\zeta \in D_\zeta : \|\zeta\| \to \infty$ з використанням нерівності (17) замість нерівності (16).

Лему доведено.

4. Редукція кусково-неперервної (1–3)-задачі до системи інтегральних рівнянь. До шуканого розв'язку (14) кусково-неперервної (1–3)-задачі, де функція φ має вигляд (15) і функції $\varphi_j : \partial D_\zeta \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1,3\}$, задовольняють умови, накладені на функцію v у лемі 1, застосуємо формули (18) – (23). В результаті з урахуванням рівностей

$$\mathrm{U}_1[e_2\mathcal{B}[\varphi_3](\zeta)] = \mathrm{U}_3[\mathcal{B}[\varphi_3](\zeta)], \qquad \mathrm{U}_3[e_2\mathcal{B}[\varphi_3](\zeta)] = \mathrm{U}_1[\mathcal{B}[\varphi_3](\zeta)] - 2\mathrm{U}_4[\mathcal{B}[\varphi_3](\zeta)]$$

і позначення $\xi := \|\zeta_0\|$ крайові умови (11) зводяться до системи інтегральних рівнянь для відшукання функцій φ_1, φ_3:

$$\frac{1}{2}\,\varphi_1(\xi) + \frac{k_2^2\,\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\big(k_2 s^2\,\widetilde{\varphi}_1(s) - s(k_1 s-\xi)\widetilde{\varphi}_3(s)\big)}{q(\xi,s)}\,ds = u_1(\xi),$$

$$\frac{1}{2}\,\varphi_3(\xi) + \frac{k_2\xi}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(k_1 s-\xi)\big((k_1 s-\xi)\widetilde{\varphi}_3(s) - k_2 s\widetilde{\varphi}_1(s)\big)}{q(\xi,s)}\,ds = u_3(\xi),$$

(31)

$$\frac{1}{2}\,\widetilde{\varphi}_1(\xi) + \frac{k_2^2\,\xi^2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\big(k_2\xi\,\varphi_1(s) + (s-k_1\xi)\varphi_3(s)\big)}{q(\xi,s)}\,ds = \widetilde{u}_1(\xi),$$

$$\frac{1}{2}\,\widetilde{\varphi}_3(\xi)+\frac{k_2\xi}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{(s-k_1\xi)\big(k_2\xi\,\varphi_1(s)+(s-k_1s_0)\varphi_3(s)\big)}{q(\xi,s)}\,ds=\widetilde{u}_3(\xi)\quad\forall\xi>0.$$

З лем 1, 2 випливає, що кожен розв'язок системи (31), який відновлює функції φ_1,φ_3 з рівності (15) за формулами

$$\varphi_j(\tau)=\begin{cases}\varphi_j(\|\tau\|) & \text{при}\quad \tau\in R_+,\\ \widetilde{\varphi}_j(\|\tau\|) & \text{при}\quad \tau\in L_\alpha,\quad j\in\{1,3\},\end{cases}$$

такі, що задовольняють умови вигляду (16), (17), за формулою (14) породжує розв'язок кусково-неперервної (1–3)-задачі.

Щоб записати систему (31) у векторному вигляді, введемо необхідні позначення. Нехай $\mathbf{a}(s,\cdot)$ позначає чотиривимірний вектор-стовпець, компонентами якого є дійснозначні функції $a_j(s,\cdot),\ j=\overline{1,4}$, визначені при всіх $s>0$. Аналогічно, $\int_0^\infty \mathbf{a}(s,\cdot)\,ds$ позначає чотиривимірний вектор-стовпець, компонентами якого є інтеграли $\int_0^\infty a_j(s,\cdot)\,ds,\ j=\overline{1,4}$, у випадку, коли ці інтеграли існують.

Через $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$ позначимо банахів простір чотиривимірних векторів-стовпців $\mathbf{b}(s)$, компоненти $b_j(s),\ j=\overline{1,4}$, яких — істотно обмежені функції на множині $[0,\infty)$ з нормою

$$\|\mathbf{b}\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}}:=\max_{j=\overline{1,4}}\{\operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\infty)}|b_j(s)|\}.$$

Через $\mathbf{C}_{[0,\infty)}$ позначимо підпростір простору $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$, утворений векторами-стовпцями $\mathbf{b}(s)$, компоненти $b_j(s),\ j=\overline{1,4}$, яких — неперервні функції на множині $[0,\infty)$, що мають скінченні границі при $s\to\infty$.

Введемо до розгляду вектор-стовпець $\boldsymbol{\varphi}(\xi),\ \xi>0$, компонентами якого є відповідно шукані функції $\varphi_1(\xi),\ \varphi_3(\xi),\ \widetilde{\varphi}_1(\xi),\ \widetilde{\varphi}_3(\xi)$, і вектор-стовпець $\mathbf{u}(\xi),\ \xi>0$, компонентами якого є відповідно задані в системі (31) функції $u_1(\xi),\ u_3(\xi),\ \widetilde{u}_1(\xi),\ \widetilde{u}_3(\xi)$.

Припускаємо, що вектор-функції $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{u}$ мають вигляд

$$\boldsymbol{\varphi}(\xi)=\frac{2(\xi+1)^{\beta_0-\beta_\infty}}{\xi^{\beta_0}}\,\mathbf{g}(\xi),\quad \mathbf{u}(\xi)=\frac{(\xi+1)^{\beta_0-\beta_\infty}}{\xi^{\beta_0}}\,\mathbf{v}(\xi),$$

де вектор-функції

$$\mathbf{g}(\xi):=\begin{pmatrix}g_1(\xi)\\ g_3(\xi)\\ \widetilde{g}_1(\xi)\\ \widetilde{g}_3(\xi)\end{pmatrix},\qquad \mathbf{v}(\xi):=\begin{pmatrix}v_1(\xi)\\ v_3(\xi)\\ \widetilde{v}_1(\xi)\\ \widetilde{v}_3(\xi)\end{pmatrix}$$

належать простору $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$.

Позначимо через $0_{2\times2}$ нульову матрицю розмірності 2×2 і введемо до розгляду функціональну матрицю

$$a(\xi, s) := \begin{pmatrix} k_2^2 s^2 & k_2 s(\xi - k_1 s) \\ k_2 s(\xi - k_1 s) & (k_1 s - \xi)^2 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, розглянемо функціональну матрицю розмірності 4×4, яку з використанням зазначених матриць розмірності 2×2 запишемо у блочному вигляді

$$A(\xi, s) := \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & a(\xi, s) \\ a(s, \xi) & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Тепер при зроблених припущеннях про вектор-функції $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{u}$ запишемо систему (31) у векторному вигляді

$$\mathcal{I}[\mathbf{g}](\xi) + \mathcal{A}[\mathbf{g}](\xi) = \mathbf{v}(\xi) \quad \forall \xi > 0, \tag{32}$$

де $\mathcal{I}$ — тотожний оператор і

$$\mathcal{A}[\mathbf{g}](\xi) := \frac{2k_2\, \xi^{1+\beta_0}\, (\xi+1)^{\beta_\infty - \beta_0}}{\pi} \int\limits_0^\infty A(\xi, s)\mathbf{g}(s) \frac{ds}{s^{\beta_0}\, (s+1)^{\beta_\infty - \beta_0}\, q(\xi, s)}, \tag{33}$$

а рівність (32) виконується майже скрізь на $(0, \infty)$ щодо міри Лебега.

Зафіксуємо довільний відрізок $[a, b]$, де $a > 0$. Розглядаючи рівняння (32) при $\xi \in [a, b]$, записуємо оператор (33) у вигляді суми трьох операторів:

$$\mathcal{A}[\mathbf{g}](\xi) = \frac{2k_2\, \xi^{1+\beta_0}\, (\xi+1)^{\beta_\infty - \beta_0}}{\pi} \int\limits_0^\delta A(\xi, s)\mathbf{g}(s) \frac{ds}{s^{\beta_0}\, (s+1)^{\beta_\infty - \beta_0}\, q(\xi, s)} +$$

$$+ \frac{2k_2\, \xi^{1+\beta_0}\, (\xi+1)^{\beta_\infty - \beta_0}}{\pi} \int\limits_\delta^N A(\xi, s)\mathbf{g}(s) \frac{ds}{s^{\beta_0}\, (s+1)^{\beta_\infty - \beta_0}\, q(\xi, s)} +$$

$$+ \frac{2k_2\, \xi^{1+\beta_0}\, (\xi+1)^{\beta_\infty - \beta_0}}{\pi} \int\limits_N^\infty A(\xi, s)\mathbf{g}(s) \frac{ds}{s^{\beta_0}\, (s+1)^{\beta_\infty - \beta_0}\, q(\xi, s)} =:$$

$$=: \mathcal{A}_\delta[\mathbf{g}](\xi) + \mathcal{A}_0[\mathbf{g}](\xi) + \mathcal{A}_N[\mathbf{g}](\xi),$$

де додатні числа δ, N вибрано так, щоб при всіх $\xi \in [a, b]$ виконувались нерівності

$$\|\mathcal{A}_\delta[\mathbf{g}](\xi)\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}} < \frac{1}{2}\, \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}}, \quad \|\mathcal{A}_N[\mathbf{g}](\xi)\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}} < \frac{1}{2}\, \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}}.$$

Введемо до розгляду оператори

$$\widehat{\mathcal{A}}_\delta[\mathbf{g}](\xi) := \begin{cases} \mathcal{A}_\delta[\mathbf{g}](a) & \text{при} \quad 0 \le \xi < a, \\ \mathcal{A}_\delta[\mathbf{g}](\xi) & \text{при} \quad a \le \xi \le b, \\ \mathcal{A}_\delta[\mathbf{g}](b) & \text{при} \quad \xi \ge b, \end{cases}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_N[\mathbf{g}](\xi) := \begin{cases} \mathcal{A}_N[\mathbf{g}](a) & \text{при} \quad 0 \le \xi < a, \\ \mathcal{A}_N[\mathbf{g}](\xi) & \text{при} \quad a \le \xi \le b, \\ \mathcal{A}_N[\mathbf{g}](b) & \text{при} \quad \xi > b, \end{cases}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}[\mathbf{g}](\xi) := \begin{cases} \mathcal{A}_0[\mathbf{g}](a) & \text{при} \quad 0 \le \xi < a, \\ \mathcal{A}_0[\mathbf{g}](\xi) & \text{при} \quad a \le \xi \le b, \\ \mathcal{A}_0[\mathbf{g}](b) & \text{при} \quad \xi \ge b. \end{cases}$$

Очевидно, що для операторів $\widehat{\mathcal{A}}_\delta$, $\widehat{\mathcal{A}}_N$ при всіх $\xi \ge 0$ виконуються оцінки

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}_\delta[\mathbf{g}](\xi)\right\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}} < \frac{1}{2}\,\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}}, \qquad \left\|\widehat{\mathcal{A}}_N[\mathbf{g}](\xi)\right\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}} < \frac{1}{2}\,\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}}, \tag{34}$$

а оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ діє з простору $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$ у простір $\mathbf{C}_{[0,\infty)}$. При цьому з теореми Асколі – Арцела випливає, що оператор $\widehat{\mathcal{A}}\colon \mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)} \longrightarrow \mathbf{C}_{[0,\infty)}$ є компактним, а тому оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ також компактний у просторі $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$.

Поряд із рівнянням (32) розглянемо рівняння

$$\mathcal{I}[\mathbf{g}](\xi) + \widehat{\mathcal{A}}_\delta[\mathbf{g}](\xi) + \widehat{\mathcal{A}}_N[\mathbf{g}](\xi) + \widehat{\mathcal{A}}[\mathbf{g}](\xi) = \mathbf{v}(\xi) \quad \forall \xi \ge 0. \tag{35}$$

Очевидно, що кожний розв'язок рівняння (32) задовольняє рівняння (35) при $\xi \in [a,b]$ і, навпаки, кожний розв'язок рівняння (35) задовольняє рівняння (32) при $\xi \in [a,b]$.

В теорії операторів у банахових просторах *нетеровим* називають оператор, образ якого є замкненим, а ядро і коядро — скінченновимірними. При цьому різниця між розмірностями ядра і коядра називається *індексом* оператора. Нетерів оператор нульового індексу називається *фредгольмовим* (див., наприклад, [36]).

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{I} + \widehat{\mathcal{A}}_\delta + \widehat{\mathcal{A}}_N + \widehat{\mathcal{A}}$ фредгольмів у просторі $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$.*

Доведення. З оцінок (34) випливає, що оператор $\mathcal{I} + \widehat{\mathcal{A}}_\delta + \widehat{\mathcal{A}}_N$ має обернений у просторі $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$. Отже, оператор $B := \mathcal{I} + \widehat{\mathcal{A}}_\delta + \widehat{\mathcal{A}}_N$ фредгольмів у просторі $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$.

Тепер з теореми про стійкість властивості нетеровості та індексу оператора при його компактному збуренні (див., наприклад, [36]) випливає, що оператор $B + \widehat{\mathcal{A}}$ фредгольмів у просторі $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$.

Теорему доведено.

Отже, на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $a > 0$, множина розв'язків рівняння (32) з простору $\mathbf{L}^\infty_{[0,\infty)}$ збігається з множиною розв'язків рівняння Фредгольма (35) у цьому просторі.

5. Редукція основної бігармонічної задачі з кусково-неперервною крайовою умовою до системи інтегральних рівнянь. Розглянемо основну бігармонічну задачу про знаходження бігармонічної функції $W : D \longrightarrow \mathbb{R}$, що неперервно продовжується на межу ∂D, а її частинні похідні першого порядку неперервно продовжуються на $\partial D \setminus \{(0,0)\}$, у випадку, коли її граничні значення $W(x_0, y_0)$ на межі і значення її нормальної похідної $\partial W/\partial n$ у напрямку зовнішньої нормалі до межі задовольняють крайові умови (пор., наприклад, з [1, с. 13])

$$W(x_0, y_0) = \omega_1(x_0, y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial D,$$

$$\frac{\partial W}{\partial n}(x_0, y_0) = \omega_2(x_0, y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial D \setminus \{(0,0)\}.$$

Крім того, функція W повинна задовольняти нерівності

$$\left|\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right| \le c\,(x^2+y^2)^{-\beta_0/2}, \quad x^2+y^2 \to 0, \quad (x,y) \in D,$$

$$\left|\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right| \le c\,(x^2+y^2)^{-\beta_\infty/2}, \quad x^2+y^2 \to \infty, \quad (x,y) \in D,$$

де $\beta_0, \beta_\infty \in (0,1)$ і стала c не залежить від (x,y).

Якщо задана функція $\omega_1 : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ має неперервну контурну похідну ω_1' на множині $\partial D \setminus \{(0,0)\}$, то розв'язок цієї крайової задачі можна отримати в результаті розв'язання бігармонічної задачі (2), де

$$u_1(x_0, y_0) = \begin{cases} \omega_1'(x_0, y_0) & \text{при} \quad x_0 e_1 + y_0 e_2 \in R_+, \\ -\omega_1'(x_0, y_0)\cos\alpha - \omega_2(x_0, y_0)\sin\alpha & \text{при} \quad x_0 e_1 + y_0 e_2 \in L_\alpha, \end{cases}$$

$$u_3(x_0, y_0) = \begin{cases} -\omega_2(x_0, y_0) & \text{при} \quad x_0 e_1 + y_0 e_2 \in R_+, \\ -\omega_1'(x_0, y_0)\sin\alpha + \omega_2(x_0, y_0)\cos\alpha & \text{при} \quad x_0 e_1 + y_0 e_2 \in L_\alpha, \end{cases}$$

при цьому $W(x,y) = u(x,y) + c$ з деякою сталою $c \in \mathbb{R}$.

Отже, якщо функції ω_1', ω_2 неперервні на множині $\partial D \setminus \{(0,0)\}$ і задовольняють нерівності вигляду (5), (6), то сформульована тут основна бігармонічна задача з кусково-неперервною крайовою умовою редукується до системи інтегральних рівнянь (31), записаної також у векторному вигляді (32).

Зазначимо, що у роботі [20] основну бігармонічну задачу для квадранта з кусково-неперервною крайовою умовою редуковано до системи інтегральних рівнянь при значно жорсткіших умовах на задані функції ω_1, ω_2.

Література

1. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, № 65 (1934).
2. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва, **16**, 209 – 292 (1967).
3. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях*, Успехи мат. наук, **38**, № 2(230), 3 – 76 (1983).
4. A. Kufner, A.-M. Sändig, *Some applications of weighted Sobolev spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, **100**, Teubner, Leipzig (1987).
5. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, vol. 1, Oper. Theory Adv. and Appl., **111**, Springer Sci. & Business Media (2000).
6. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, Москва (1966).
7. A. I. Lurie, *Theory of elasticity*, Springer-Verlag, Berlin etc. (2005).
8. S. G. Mikhlin, N. F. Morozov, M. V. Paukshto, *The integral equations of the theory of elasticity*, Teubner-Texte zur Mathematik, **135**, Springer, Stuttgart etc. (1995).
9. S. G. Mikhlin, *Integral equations and their applications to certain problems in mechanics*, Mathematical Physics and Technology, Pergamon Press, New York (1964).

10. J. Lu, *Complex variable methods in plane elasticity*, Ser. Pure Math., **22**, World Sci., Singapore (1995).
11. В. Д. Купрадзе, *Методы потенциала в теории упругости*, Физматгиз, Москва (1963).
12. Н. С. Кахниашвили, *Исследования плоских задач теории упругости методом теории потенциалов*, Тр. Тбил. ун-та, **50** (1953).
13. Я. Б. Лопатинский, *Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям*, Укр. мат. журн, **5**, № 2, 123 – 151 (1953).
14. О. И. Панич, *О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка*, Мат. сб., **50(92)**, № 3, 335 – 368 (1960).
15. В. Г. Мазья, *Граничные интегральные уравнения*, Анализ-4, Итоги науки и техники, Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **27**, 131 – 228 (1988).
16. Л. Г. Магнарадзе, *Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками*, Тр. Тбил. мат. ин-та, **4**, 43 – 76 (1938).
17. И. О. Радон, *О краевых задачах для логарифмического потенциала*, Успехи мат. наук, **1**, № 3-4(13-14), 96 – 124 (1946).
18. Г. Н. Положий, *Решение некоторых задач плоской теории упругости для областей с угловыми точками*, Укр. мат. журн., **1**, № 4, 16 – 41 (1949).
19. G. Albinus, *Multiple layer potentials for the quadrant and their application to the Dirichlet problem in plane domains with a piecewise smooth boundary*, Banach Center Publ., **10**, №1, 7 – 26 (1983).
20. И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Редукция основной бигармонической задачи для квадранта к несингулярным интегральным уравнениям*, Укр. мат. журн., **47**, № 6, 775 – 784 (1995).
21. Р. Джафаров, *О бесконечной дифференцируемости решений одной краевой задачи для полигармонического уравнения в угловой области*, Укр. мат. вісн., **2**, № 4, 487 – 494 (2005).
22. С. А. Халилов, С. Г. Кравченко, *Решение основной бигармонической проблемы в трапециевидной области*, Открытые информ. и компьютер. интегр. технологии, № 43, 213 – 223 (2009).
23. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Schwartz-type integrals in a biharmonic plane*, Int. J. Pure and Appl. Math., **83**, № 1, 193 – 211 (2013).
24. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem*, Math. Methods Appl. Sci., **39**, № 11, 2939 – 2952 (2016).
25. С. В. Грищук, *Одновимірність ядра системи інтегральних рівнянь Фредгольма для однорідної бігармонічної задачі*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 128 – 139 (2017).
26. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Schwartz-type boundary value problems for monogenic functions in a biharmonic algebra*, Analysis as a Life, Dedicated to Heinrich Begehr on the Occasion of his 80th Birthday (Trends Math.), Birkhäuser, 193 – 211 (2019).
27. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *A hypercomplex method for solving boundary value problems for biharmonic functions*, Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics (Stud. Fuzziness and Soft Comput.), **404**, 231 – 255 (2021).
28. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Schwartz-type boundary value problems for canonical domains in a biharmonic plane*, Ukr. Math. Bull., **18**, № 3, 338 – 358 (2021).
29. В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко, *Бигармонические функции на бигармонической плоскости*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 8, 25 – 27 (1981).
30. И. П. Мельниченко, *Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга*, Укр. мат. журн., **38**, № 2, 252 – 254 (1986).
31. L. Sobrero, *Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata*, Ric. Ingegn., **13**, № 2, 255 – 264 (1934).
32. A. Douglis, *A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables*, Commun. Pure and Appl. Math., **6**, №2, 259 – 289 (1953).
33. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *Моногенные функции в бигармонической алгебре*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1587 – 1596 (2009).
34. S. V. Gryshchuk, S. A. Plaksa, *Basic properties of monogenic functions in a biharmonic plane*, Complex Analysis and Dynamical Systems V, Contemp. Math., **591**, 127 – 134 (2013).
35. В. Ф. Ковалев, *Бигармоническая задача Шварца*, Киев (1986), 19 с. (Препринт, НАН Украины. Ин-т математики; 86.16).
36. S. G Krein, *Linear equations in Banach spaces*, Birkhäuser, Boston (1982).

Одержано 17.08.22