

НЕРІВНОСТІ ТИПУ МАРКОВА – НІКОЛЬСЬКОГО В ОБЛАСТЯХ ІЗ ВНУТРІШНІМИ НУЛЬОВИМИ КУТАМИ В ПРОСТОРІ БЕРГМАНА

The order of growth of the module of an arbitrary algebraic polynomial in a weighted Bergman space $A_p(G, h)$, $p > 0$, is investigated in the regions with exterior nonzero and interior zero angles at finitely many points of the boundary. We establish estimates of the Markov – Nikolskii type for algebraic polynomials and clarify the behavior of derived polynomials at the points of zeros and poles of the weight function in bounded regions with piecewise-smooth boundary.

Досліджується порядок зростання модуля довільного алгебраїчного полінома у зваженому просторі Бергмана $A_p(G, h)$, $p > 0$, в областях, що мають зовнішні ненульові та внутрішні нульові кути у скінченному числі точок межі. Отримано оцінки типу Маркова – Нікольського для алгебраїчних поліномів, а також з'ясовано поведінку похідних поліномів у точках нулів і полюсів вагової функції в обмежених областях з кусково-гладкою межею.

1. Вступ. Нехай $G \subset \mathbb{C}$ — скінченна область, яка містить точку $0 \in G$, обмежена жордановою кривою $L := \partial G$, $\Omega := \text{ext } L := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$, де $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ і $\wp_n$ позначає клас алгебраїчних поліномів $P_n(z)$, $\deg P_n \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $w = \Phi(z)$ — однолисте конформне відображення Ω на Δ , нормоване умовами $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z)/z > 0$, і $\Psi := \Phi^{-1}$ — обернене відображення. Для фіксованого $t \geq 1$ позначимо

$$L_t := \{z : |\Phi(z)| = t\}, \quad L := L_1, \quad G_t := \text{int } L_t, \quad \Omega_t := \text{ext } L_t.$$

Нехай $\{z_j\}_{j=1}^l$ — фіксована система різних точок на кривій L , занумерованих у додатному напрямку. Для деякого фіксованого R_0 , $1 < R_0 < \infty$, і $z \in G_{R_0}$ розглянемо так звану узагальнену вагову функцію Якобі h , яка має вигляд

$$h(z) := h_0(z) \prod_{j=1}^l |z - z_j|^{\gamma_j}, \quad z \in G_{R_0}, \quad (1.1)$$

де $\gamma_j > -2$ для всіх $j = 1, 2, \dots, l$ і функція h_0 є рівномірно відокремленою від нуля в G_{R_0} , тобто існує така стала $c_0 := c_0(G_{R_0}) > 0$, що $h_0(z) \geq c_0 > 0$ для всіх $z \in G_{R_0}$.

Для $p > 0$ та жорданової області G позначимо

$$\|P_n\|_p := \|P_n\|_{A_p(h, G)} := \left(\iint_G h(z) |P_n(z)|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_\infty := \|P_n\|_{A_\infty(1, G)} := \max_{z \in \overline{G}} |P_n(z)|, \quad p = \infty, \quad A_p(1, G) =: A_p(G),$$

де σ — плоска міра Лебега в $\mathbb{C}$.

У цій роботі досліджуються нерівності типу Маркова – Нікольського

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_\infty \leq c_1 \lambda_n \|P_n\|_p, \quad p > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

¹e-mail: pelinozkartepe@gmail.com.

в яких $c_1 = c_1(G, h, p) > 0$ — стала, залежна лише від указаних параметрів, і $\lambda_n = \lambda_n(G, h, p, m) > 0$ — числова послідовність, на предмет того, з якою швидкістю $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ в залежності від геометричних властивостей області G , вагової функції h та p .

У випадку, коли $m = 0$, оцінки типу (1.2) одержано в [7] при $p > 1$ для областей, обмежених кусково-Діні-гладкими кривими без точок звороту; в [9] при $h \equiv 1$; в [11] для $h(z) \neq 1$, $p > 0$ і областей, обмежених квазіконформними кривими; в [6] для $p > 1$ і областей, обмежених кусково-гладкими кривими без точок звороту; в [10] для $p > 0$ і областей, обмежених асимптотично конформними кривими. Оцінки типу (1.2) для деяких значень параметрів G , p та h для многочленів $P_n \in \wp_n$ та їх похідних досліджено в [2–5, 12–14, 18, 25, 27–31, 35].

Ми зосереджуємося на співвідношенні (1.2) у випадку, коли $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а межа області G є кусково-гладкою кривою, що має зовнішні ненульові кути та внутрішні нульові кути, а також для вагової функції h , означеної в (1.1).

Наведемо деякі означення та позначення, які будемо використовувати далі.

Нехай S — спрямлювана жорданова крива або дуга, $|S| := \text{mes } S$ (лінійна міра кривої S) і $z = z(s)$, $s \in [0, |S|]$, — натуральна параметризація кривої S .

Означення 1.1 [32, с. 48] (див. також [17, с. 32]). *Кажуть, що жорданова крива або дуга S є Діні-гладкою, якщо її параметризація $z = z(s)$, $0 \leq s \leq |S|$, задовольняє умови $z'(s) \neq 0$, $0 \leq s \leq |S|$, і $|z'(s_2) - z'(s_1)| < g(s_2 - s_1)$, $s_1 < s_2$, де g — зростаюча функція, для якої*

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x} dx < \infty.$$

Тепер означимо новий клас областей з кусково-Діні-гладкою межею, яка має кути та внутрішні точки звороту одночасно.

Скрізь далі позначатимемо через $c, c_0, c_1, c_2, \dots$ додатні сталі, а через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ достатньо малі додатні числа, взагалі кажучи, різні у різних співвідношеннях, залежні від G . Тут і далі для будь-якого цілого $k \geq 0$ і натурального $m > k$ під $j = \overline{k, m}$ розуміємо таке: $j = k, k+1, \dots, m$.

Означення 1.2 [8]. *Будемо казати, що жорданова область G належить $PDS(1; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$, якщо $L = \partial G$ складається з об'єднання скінченних гладких дуг Діні $\{L_j\}_{j=0}^l$, що з'єднуються в точках $\{z_j\}_{j=0}^l \in L$, таких, що L є локально Діні-гладким в z_0 , і вони мають зовнішні (щодо $\overline{G}$) кути розхилу $\lambda_j\pi$, $0 < \lambda_j \leq 2$, у кутових точках $\{z_j\}_{j=1}^l \in L$, де зустрічаються дві дуги.*

Припустимо, без втрати загальності, що задана область $G \in PDS(1; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_i \leq 2$ (див. означення 1.2) така, що в кожній точці $z_i \in L$, $i = \overline{1, l_1}$, $l_1 \leq l$, вона має зовнішній (щодо $\overline{G}$) ненульовий кут $\lambda_i\pi$, $0 < \lambda_i < 2$, а в кожній точці $z_j \in L$, $j = \overline{l_1+1, l}$, — внутрішній (щодо $\overline{G}$) нульовий кут, тобто зовнішній кут розхилу 2π . Якщо $l_1 = l = 0$, то область G не має жодних кутів, і в цьому випадку будемо писати $G \in DS(1) \equiv DS$; якщо $l_1 = l \geq 1$, то G має лише $\lambda_i\pi$, $0 < \lambda_i < 2$, $i = \overline{1, l_1}$, зовнішніх ненульових кутів, і в цьому випадку будемо писати $G \in PDS(1; \lambda_i)$; якщо $l_1 = 0$ і $l \geq 1$, то G має лише внутрішні нульові кути, і у цьому випадку будемо писати $G \in PDS(1; 2)$.

Далі будемо вважати, що точки $\{z_j\}_{j=1}^l \in L$, означені в (1.1) і в означенні 1.2, збігаються і $w_j := \Phi(z_j)$.

Для спрощення викладу та міркувань, без втрати загальності, візьмемо $l_1 = 1$ і $l = 2$ (випадок $l_1 \geq 2$, $l \geq 3$ розглядається аналогічно). Тоді при цьому припущенні далі матимемо область $G \in PDS(1; \lambda_1, 2)$, $0 < \lambda_1 < 2$, таку, що в точці $z_1 \in L$ область G має зовнішній ненульовий кут $\lambda_1\pi$, $0 < \lambda_1 < 2$, а в точці $z_2 \in L$ — внутрішній нульовий кут. Також будемо писати $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 2$, якщо область G має зовнішні ненульові кути $\lambda_i\pi$, $0 < \lambda_i < 2$, у точках $z_1, z_2 \in L$, і $G \in PDS(1; 2, 2)$, якщо область G має внутрішні нульові кути в точках $z_1, z_2 \in L$.

2. Основні результати. Тепер встановимо оцінки для $|P_n^{(m)}(z)|$, $m \geq 0$, в обмежених областях $G \in PDS(1, \lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, 2}$.

Теорема 2.1. Нехай $p > 0$, $G \in PDS(1; \lambda_1, 2)$ для деякого $0 < \lambda_1 < 2$, $h(z)$ означена в (1.1) для $l = 2$. Тоді для кожного $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, та всіх $m = 0, 1, 2, \dots$ маємо

$$\|P_n^{(m)}\|_{\infty} \leq c_1 \mu_n \|P_n\|_p, \quad (2.1)$$

де $c_1 = c_1(G, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, p) > 0$ — стала, незалежна від n та z ,

$$\mu_n := \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}+2m}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 \geq \frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{2\left(\frac{2+\gamma_2}{p}+m\right)}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \gamma_1 < \frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{2\left(\frac{2}{p}+m\right)}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0. \end{cases}$$

Нехай крива L має ненульовий зовнішній кут в точці z_1 і нульовий внутрішній кут в точці z_2 . В цьому випадку отримуємо такі наслідки з теореми 2.1.

Наслідок 2.1. Нехай $p > 0$, $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деякого $0 < \lambda_j < 2$, $j = 1, 2$, $h(z)$ означена в (1.1) для $l = 2$. Тоді для кожного $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, та всіх $m = 0, 1, 2, \dots$ маємо

$$\|P_n^{(m)}\|_{\infty} \leq c_2 n^{m\tilde{\lambda}} \mu_{n,1} \|P_n\|_p, \quad (2.2)$$

де $c_2 = c_2(G, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2, p) > 0$ — стала, незалежна від z і n , та

$$\mu_{n,1} := \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \quad \gamma_1 \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2 > 0, \\ n^{\frac{(2+\gamma_2)\lambda_2}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \lambda_2 < 2, \quad 0 < \gamma_1 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(2+\gamma_2)-2, \quad \gamma_2 > \frac{1}{\lambda_2}-2, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < \gamma_1 \leq \frac{1}{\lambda_1}-2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\lambda_2}-2, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 < \lambda_2 \leq \frac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \frac{1}{\lambda_1}-2, \quad -2 < \gamma_2 < \frac{1}{\lambda_2}-2, \\ n^{\frac{2\tilde{\lambda}}{p}}, & \frac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \frac{1}{2} < \lambda_2 < 2, \quad -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda} := \max\{\lambda_1; \lambda_2\}.$$

Нехай крива L в обох точках z_1 і z_2 має внутрішні нульові кути. У цьому випадку отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. Нехай $p > 0$, $G \in PDS(1; 2, 2)$, $h(z)$ означена в (1.1) для $l = 2$. Тоді для кожного $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, та всіх $m = 0, 1, 2, \dots$ маємо

$$\|P_n^{(m)}\|_{\infty} \leq c_3 n^{2m} \mu_{n,2} \|P_n\|_p, \quad (2.3)$$

де $c_3 = c_3(G, \gamma_1, \gamma_2, p) > 0$ — стала, незалежна від z і n , $\tilde{\gamma}$ означене, як в (2.1),

$$\mu_{n,2} := \begin{cases} n^{\frac{2(2+\tilde{\gamma}_1)}{p}}, & \gamma_1 \geq \gamma_2, & \gamma_2 > 0, \\ n^{\frac{2(2+\tilde{\gamma}_2)}{p}}, & \gamma_1 > 0, & \gamma_2 > \gamma_1, \\ n^{\frac{4}{p}}, & -2 < \gamma_1 < 0, & -2 < \gamma_2 < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

і $\tilde{\gamma}_j := \max\{0; \gamma_j\}$, $\tilde{\lambda}_j := \max\{1; \lambda_j\}$, $j = 1, 2$.

Тепер можемо встановити оцінки для $|P_n^{(m)}(z)|$, $m \geq 1$, в критичних точках z_j , $j = 1, 2$, в обмежених областях $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, 2}$.

Теорема 2.2. Нехай $p > 0$, $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деякого $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, 2}$, $h(z)$ означена в (1.1) для $l = 2$. Тоді для кожного $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, та всіх $m = 0, 1, 2, \dots$ маємо

$$|P_n^{(m)}(z_j)| \leq c_4 \mu_{n,3} \|P_n\|_p, \quad (2.5)$$

де $c_4 = c_4(G, \gamma_j, \lambda, p) > 0$ — стала, незалежна від n і z , $\tilde{\gamma}_j := \max\{0; \gamma_j\}$, $\tilde{\lambda}_j := \max\{1; \lambda_j\}$, $j = 1, 2$, і

$$\mu_{n,3} := \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\tilde{\gamma}_j}{p} + m\right)\tilde{\lambda}_j}, & \text{якщо } (2 + \tilde{\gamma}_j)\tilde{\lambda}_j > 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_j + \frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2 + \tilde{\gamma}_j)\tilde{\lambda}_j = 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_j + \frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2 + \tilde{\gamma}_j)\tilde{\lambda}_j < 1. \end{cases}$$

Точність оцінок (2.1)–(2.3) і (2.5) з'ясовується порівнянням їх з наступним результатом.

Зауваження 2.1 [12, 19]. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує такий поліном Q_n^* , $T_n^* \in \wp_n$, що для одиничного круга B та вагової функції $h^*(z) = |z - z_1|^2$ справедливим є таке:

$$\|(Q_n^*)'\|_{C(\overline{B})} \succeq n \|Q_n^*\|_{C(\overline{B})} \succeq n^2 \|Q_n^*\|_{A_2(B)},$$

$$|T_n^*(z_1)| \succeq n^2 \|T_n^*\|_{A_2(h^*, B)}.$$

3. Допоміжні твердження. Для невід'ємних функцій $a > 0$ і $b > 0$ будемо використовувати позначення $a \preceq b$ (порядкова нерівність), якщо $a \leq cb$, і $a \asymp b$ еквівалентні, якщо $c_1 a \leq b \leq c_2 a$ для деяких сталих c , c_1 , c_2 (незалежних від a та b).

В [15; 26, с. 97; 33], [33] наведено таке означення K -квазіконформної кривої.

Означення 3.1 [26, с. 97; 33]. Жорданова крива (або дуга) L називається K -квазіконформною ($K \geq 1$), якщо існує K -квазіконформне відображення f області $D \supset L$ таке, що $f(L)$ є колом (або лінійним сегментом).

Нехай $F(L)$ позначає множину всіх плоских гомеоморфізмів f , що зберігають орієнтацію, області $D \supset L$, таких, що $f(L)$ є лінійним сегментом (або колом), і

$$K_L := \inf\{K(f) : f \in F(L)\},$$

де $K(f)$ — максимальна дилатація такого відображення f . Тоді L є квазіконформною кривою, якщо $K_L < \infty$, і K -квазіконформною кривою, якщо $K_L \leq K$.

Відповідно до критерію «трьох точок» [15, с. 100], кожна кусково-гладка крива Діні (без будь-яких нульових кутів) є квазіконформною.

Лема 3.1 [1]. Нехай L є K -квазіконформною кривою, $z_1 \in L$, $z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z : |z - z_1| \leq d(z_1, L_{r_0})\}$, $w_j = \Phi(z_j)$, $(z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \leq d(z_1, L_{R_0})\})$, $w_j = \varphi(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. Тоді:

а) твердження $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3|$ та $|w_1 - w_2| \leq |w_1 - w_3|$ еквівалентні, отже, так само $|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3|$ та $|w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3|$;

б) якщо $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3|$, то

$$\left| \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \right|^{K^{-2}} \leq \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right| \leq \left| \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \right|^{K^2},$$

де $0 < r_0 < 1$, $R_0 := r_0^{-1}$ — стала, що залежить від G .

Нагадаємо, що для $0 < \delta_j < \delta_0 := \frac{1}{4} \min\{|z_i - z_j| : i, j = 1, 2, \dots, l, i \neq j\}$ покладено $\Omega(z_j, \delta_j) := \Omega \cap \{z : |z - z_j| \leq \delta_j\}$, $\delta := \min_{1 \leq j \leq l} \delta_j$, $\Omega(\delta) := \bigcup_{j=1}^l \Omega(z_j, \delta)$, $\widehat{\Omega} := \Omega \setminus \Omega(\delta)$. Також нехай

$$\Delta_j := \Phi(\Omega(z_j, \delta)), \quad \Delta(\delta) := \bigcup_{j=1}^l \Phi(\Omega(z_j, \delta)), \quad \widehat{\Delta}(\delta) := \Delta \setminus \Delta(\delta).$$

Наступна лема є наслідком результатів, наведених у [32, с. 41–58; 17, с. 32–36], та оцінки для $|\Psi'|$ (див., наприклад, [16], § 2.8):

$$|\Psi'(\tau)| \asymp \frac{d(\Psi(\tau), L)}{|\tau| - 1}.$$

Лема 3.2. Нехай жорданова область $G \in PDS(1; \lambda_j)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l_1}$. Тоді:

- i) $|\Psi(w) - \Psi(w_j)| \asymp |w - w_j|^{\lambda_j}$, $|\Psi'(w)| \asymp |w - w_j|^{\lambda_j - 1}$ для довільного $w \in \Delta_j$;
- ii) $|\Psi(w) - \Psi(w_j)| \asymp |w - w_j|$, $|\Psi'(w)| \asymp 1$ для довільного $w \in \widehat{\Delta} \setminus \Delta_j$.

Лема 3.3 [4]. Нехай L — квазіконформна крива і h — функція, означена в (1.1). Тоді для кожного $P_n(z) \in \wp_n$, довільного $R > 1$ та $n = 1, 2, \dots$ маємо

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_R)} \leq \widetilde{R}^{n + \frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h, G)}, \quad p > 0,$$

де $\widetilde{R} = 1 + c(R - 1)$, а c не залежить від n і R .

Лема 3.4. Нехай $G \in C_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$. Тоді для кожного $P_n(z) \in \wp_n$ і довільного $p > 0$ маємо

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_{1+c/n})} \preceq \|P_n\|_{A_p(h, G)}.$$

Цей факт випливає із [19] (лема 2.4), позаяк $PDS(1; \lambda_j) \subset C_\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, l}$.

4. Доведення теорем. Доведення теореми 2.1. Нехай $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деяких $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = \overline{1, 2}$, h означена в (1.1).

Спочатку доведемо теорему для випадку $m = 0$. Нехай $\{\xi_j\}$, $1 \leq j \leq k$, – корені полінома P_n , які лежать в Ω . Позначимо

$$b_j(z) := \frac{\Phi(z) - \Phi(\xi_j)}{1 - \overline{\Phi(\xi_j)}\Phi(z)}, \quad z \in \Omega, \quad (4.1)$$

і нехай

$$B_k(z) := \prod_{j=1}^k b_j(z), \quad z \in \Omega. \quad (4.2)$$

Функція B_k є функцією Бляшке щодо нулів $\{\xi_j\}$, $1 \leq j \leq k$, полінома P_n , що лежать в Ω .

Оскільки

$$B_k(\xi_j) = 0, \quad |B_k(z)| \equiv 1, \quad z \in L, \quad |B_k(z)| < 1, \quad z \in \Omega, \quad (4.3)$$

то для кожного ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < 1$, існує коло $\left\{w : |w| = R_1 := 1 + \varepsilon_2, 0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{n}\right\}$ таке, що $|b_j(\zeta)| > 1 - \varepsilon_2$, $\zeta \in L_{R_1}$, для кожного $j = \overline{1, k}$. Отже, для $B_k(z)$ маємо

$$|B_k(\zeta)| > (1 - \varepsilon_2)^k \succeq 1, \quad \zeta \in L_{R_1}. \quad (4.4)$$

Для $p > 0$ покладемо

$$Q_{n,p}(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_k(z)\Phi^{n+1}(z)} \right]^{p/2}, \quad z \in \Omega. \quad (4.5)$$

Зрозуміло, що функція $Q_{n,p}(z)$ є аналітичною в Ω , неперервною на $\overline{\Omega}$, $Q_{n,p}(\infty) = 0$ і не має нулів в Ω (беремо довільну неперервну гілку $Q_{n,p}(z)$ і для цієї гілки дотримуємось такого ж позначення). За інтегральною формулою Коші для Ω маємо

$$Q_{n,p}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{R_1}} Q_{n,p}(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_{R_1}. \quad (4.6)$$

Звідси, згідно з (4.1)–(4.5), отримуємо оцінку

$$|P_n(z)|^{p/2} = \frac{|B_m(z)\Phi^{n+1}(z)|^{\frac{p}{2}}}{2\pi} \int_{L_{R_1}} \left| \frac{P_n(\zeta)}{B_m(\zeta)\Phi^{n+1}(\zeta)} \right|^{p/2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}$$

$$\leq |\Phi^{n+1}(z)|^{\frac{p}{2}} \int_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)|^{p/2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}. \quad (4.7)$$

Домноживши чисельник і знаменник останнього підінтегрального виразу на $h^{1/2}(\zeta)$, а потім виконавши заміну $\zeta = \Psi(t)$, $z = \Psi(w)$ і застосувавши нерівність Гельдера, одержимо

$$\begin{aligned} \left(\int_{L_{R_1}} \frac{|P_n(\zeta)|^{\frac{p}{2}}}{|\zeta - z|} |d\zeta| \right)^2 &\leq \int_{|t|=R_1} h(\Psi(t)) |P_n(\Psi(t))|^p |\Psi'(t)|^2 |dt| \int_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t)) |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &= \int_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p |dt| \int_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t)) |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: A_n D_n(w), \end{aligned} \quad (4.8)$$

де $f_{n,p}(t) := h^{\frac{1}{p}}(\Psi(t)) P_n(\Psi(t)) (\Psi'(t))^{\frac{2}{p}}$, $|t| = R_1$.

Щоб оцінити інтеграл A_n , розіб'ємо коло $|t| = R_1$ на n частин δ_j , $j = \overline{1, n}$, з $\text{mes } \delta_j = \frac{2\pi R_1}{n}$, а потім застосуємо теорему про середнє:

$$A_n := \int_{|t|=R_1} |f_{n,p}(t)|^p |dt| = \sum_{j=1}^n \int_{\delta_j} |f_{n,p}(t)|^p |dt| = \sum_{j=1}^n |f_{n,p}(t'_j)|^p \text{mes } \delta_j, \quad t'_j \in \delta_j.$$

З іншого боку, застосовуючи оцінку середнього значення

$$|f_{n,p}(t'_j)|^p \leq \frac{1}{\pi(|t'_j| - 1)^2} \iint_{|\xi - t'_j| < |t'_j| - 1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi,$$

знаходимо

$$A_n \leq \sum_{j=1}^n \frac{\text{mes } \delta_j}{\pi(|t'_j| - 1)^2} \iint_{|\xi - t'_j| < |t'_j| - 1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi, \quad t'_j \in \delta_j.$$

Враховуючи, що перетинаються не більше двох кіл з центром в t'_j , маємо

$$A_n \leq \frac{2\pi R_1}{n(R_1 - 1)^2} \iint_{1 < |\xi| < R_1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi \leq n \iint_{1 < |\xi| < R_1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi.$$

Тепер, застосовуючи лему 3.4, отримуємо

$$A_n \leq n \iint_{G_R \setminus G} h(\zeta) |P_n(\zeta)|^p d\sigma_\zeta \leq n \|P_n\|_p^p. \quad (4.9)$$

Щоб оцінити інтеграл $D_n(w)$, позначимо $w_j := \Phi(z_j)$, $\varphi_j := \arg w_j$ і

$$\Delta_1(\rho) := \left\{ t = re^{i\theta} : r > \rho, \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \leq \theta < \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right\},$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(\rho) &:= \left\{ t = re^{i\theta} : r > \rho, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \leq \theta < \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \right\}, \quad \varphi_0 = 2\pi - \varphi_0, \\ \Delta_j &:= \Delta_j(1), \quad \Omega^j := \Psi(\Delta_j), \quad \Omega_\rho^j := \Psi(\Delta_j(\rho)), \\ L^j &:= L \cap \overline{\Omega}^j, \quad L_\rho^j := L_\rho \cap \overline{\Omega}_\rho^j, \quad j = 1, 2, \\ L &= L^1 \cup L^2, \quad L_\rho = L_\rho^1 \cup L_\rho^2.\end{aligned}$$

У вказаних вище позначеннях із (4.8) для $D_n(w)$ отримаємо

$$\begin{aligned}D_n(w) &= \int_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{h(\Psi(t))|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^2 \int_{\Phi(L_{R_1}^j)} \frac{|dt|}{\prod_{i=1}^2 |\Psi(t) - \Psi(w_i)|^{\gamma_i} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &\asymp \sum_{j=1}^2 \int_{\Phi(L_{R_1}^j)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{j=1}^2 D_{n,j}(w),\end{aligned}\tag{4.10}$$

оскільки точки $\{z_j\}_{j=1}^2 \in L$ різні. Отже, нам потрібно оцінити $D_{n,j}(w)$. Для цього візьмемо довільну фіксовану точку $z \in L_R$ і введемо позначення

$$\Phi(L_{R_1}) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^2 L_{R_1}^j\right) = \bigcup_{j=1}^2 \Phi(L_{R_1}^j) = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^3 K_i^j(R_1),\tag{4.11}$$

де

$$\begin{aligned}K_1^j(R_1) &:= \left\{ t \in \Phi(L_{R_1}^j) : |t - w_j| < \frac{c_1}{n} \right\}, \\ K_2^j(R_1) &:= \left\{ t \in \Phi(L_{R_1}^j) : \frac{c_1}{n} \leq |t - w_j| < c_2 \right\}, \\ K_3^j(R_1) &:= \left\{ t \in \Phi(L_{R_1}^j) : c_2 \leq |t - w_j| < c_3 < \text{diam } \overline{G} \right\}, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\Phi(L_R) = \Phi\left(\bigcup_{j=1}^2 L_R^j\right) = \bigcup_{j=1}^2 \Phi(L_R^j) = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^3 K_i^j(R),$$

де

$$\begin{aligned}K_1^j(R) &:= \left\{ \tau \in \Phi(L_R^j) : |\tau - w_j| < \frac{2c_1}{n} \right\}, \\ K_2^j(R) &:= \left\{ \tau \in \Phi(L_R^j) : \frac{2c_1}{n} \leq |\tau - w_j| < c_2 \right\},\end{aligned}$$

$$K_3^j(R) := \left\{ \tau \in \Phi(L_R^j) : c_2 \leq |\tau - w_j| < c_3 < \text{diam } \overline{G} \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Тоді за цих означень для $w = \Phi(z) \in \Phi(L_R)$ величину $D_{n,j}(w)$ можна записати у вигляді

$$D_{n,j}(w) = \sum_{i=1}^3 \int_{K_i^j(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^3 D_{n,j}^i(w). \quad (4.12)$$

Оцінимо величину $D_{n,j}^i(w)$ окремо для кожного $i = 1, 2, 3$ і $j = 1, 2$, залежно від розташування $w \in \Phi(L_R)$. Для визначеності будемо вважати, що $0 < \lambda_1 < 2$ і $\lambda_2 = 2$

Випадок 1. Нехай $w \in \Phi(L_R^2)$.

Згідно зі вказаними вище позначеннями, встановимо оцінки у випадку $w \in K_i^j(R)$ для кожного $i = 1, 2, 3$.

1.1. Нехай $w \in K_1^j(R)$. Оцінимо величину

$$D_{n,1}(w) = \sum_{i=1}^3 \int_{K_i^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^3 D_{n,1}^i(w) \quad (4.13)$$

окремо для $\gamma_1 \geq 0$ і $\gamma_1 < 0$.

Для кожного $i = 1, 2, 3$ і $j = 1, 2$ покладемо

$$K_{i,1}^j(R_1) := \left\{ t \in \Phi(L_{R_1}^j) : |t - w_1| \geq |t - w| \right\}, \quad K_{i,2}^j(R_1) := K_i^j(R_1) \setminus K_{i,1}^j(R_1).$$

1.1.1. Якщо $\gamma_1 \geq 0$, то

$$\begin{aligned} D_{n,1}^1(w) &= \int_{K_1^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_{1,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} \\ &+ \int_{K_{1,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}} =: D_{n,1}^{j,1}(w) + D_{n,1}^{j,2}(w), \end{aligned}$$

а отже, згідно з лемою 3.2, маємо

$$D_{n,1}^{1,1}(w) \preceq \int_{K_{1,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w|^{(2+\gamma_1)\lambda_j}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_j} \text{mes } K_{1,1}^1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, \quad (4.14)$$

$$D_{n,1}^{1,2}(w) \preceq \int_{K_{1,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \text{mes } K_{1,2}^1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}. \quad (4.15)$$

Якщо $\gamma_1 < 0$, то

$$D_{n,1}^1(w) = \int_{K_1^1(R_1)} \frac{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{-\gamma_1} |dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_1^1(R_1)} \frac{|t - w_1|^{-\gamma_1 \lambda_1} |dt|}{|t - w|^{2\lambda_1}}$$

$$\preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1 \lambda_1} n^{2\lambda_1} \text{mes } K_1^j(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}. \quad (4.16)$$

1.1.2. Нехай $\gamma_1 \geq 0$, тоді

$$\begin{aligned} D_{n,1}^2(w) &= \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &\preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}} \\ &=: D_{n,1}^{2,1}(w) + D_{n,1}^{2,2}(w), \end{aligned} \quad (4.17)$$

а отже, на підставі леми 3.2 одержуємо

$$D_{n,1}^{2,1}(w) \preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \text{mes } K_{2,1}^1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1} \quad (4.18)$$

і

$$D_{n,1}^{2,2}(w) \preceq \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Із (4.17)–(4.19) для $\gamma_1 \geq 0$ запишемо

$$D_{n,1}^2(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

Згідно з відомою нерівністю

$$(a+b)^\epsilon \leq c(\epsilon)(a^\epsilon + b^\epsilon), \quad a, b > 0, \quad \epsilon > 0, \quad (4.21)$$

та оцінками

$$|t - w_1| \leq |t - w| + |w - w_1| \preceq |t - w| + \frac{1}{n}$$

і

$$|t - w_1|^{-\gamma_1 \lambda_1} \preceq |t - w|^{-\gamma_1 \lambda_1} + \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1 \lambda_1},$$

для $\gamma_1 < 0$ з (4.13) маємо

$$D_{n,1}^2(w) = \int_{K_2^1(R_1)} \frac{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{-\gamma_1} |dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_2^1(R_1)} \frac{|t - w_1|^{-\gamma_1 \lambda_1} |dt|}{|t - w|^{2\lambda_1}}$$

$$\begin{aligned}
& \preceq n^{\gamma_1 \lambda_1} \int_{K_2^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} + \int_{K_2^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \\
& \preceq n^{\gamma_1 \lambda_1} \begin{cases} n^{2\lambda_1-1}, & \text{якщо } 2\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } 2\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } 2\lambda_1 < 1, \end{cases} + \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1, \end{cases} \\
& \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

1.1.3. Нехай $\gamma_1 \geq 0$, тоді з леми 3.2 випливає, що

$$D_{n,1}^3(w) = \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq 1. \quad (4.23)$$

Аналогічно, для $\gamma_1 < 0$, також враховуючи лему 3.4, одержуємо

$$D_{n,1}^3(w) \preceq c_3^{-\gamma_1} \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq 1. \quad (4.24)$$

1.2. Нехай $w \in K_2^1(R)$.

1.2.1. Для довільного $\gamma_1 > -2$

$$\begin{aligned}
D_{n,1}^1(w) &= \int_{K_{1,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int_{K_{1,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}} \\
&=: D_{n,1}^{1,1}(w) + D_{n,1}^{1,2}(w), \quad (4.25)
\end{aligned}$$

а отже, згідно з лемами 3.1 і 3.2, отримуємо

$$\begin{aligned}
D_{n,1}^{1,1}(w) &\preceq \int_{K_{1,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \int_{1/n}^c \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \\
&\preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \text{mes } K_{1,1}^1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$D_{n,1}^{1,2}(w) \preceq \int_{K_{1,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w_1|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1} \text{mes } K_{1,2}^1(R_1) \preceq n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}. \quad (4.27)$$

1.2.2. Для довільного $\gamma_1 > -2$, згідно з лемами 3.1 і 3.2, маємо

$$D_{n,1}^2(w) \preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}}$$

$$\begin{aligned} & \preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \\ & \preceq \int_{1/n}^{c_1} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int_{1/n}^{c_2} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \quad (4.28) \end{aligned}$$

1.2.3. Для довільного $\gamma_1 > -2$ на підставі лем 3.1 і 3.2 одержуємо

$$\begin{aligned} D_{n,1}^3(w) & \preceq \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq \int_{1/n}^{c_3} \frac{ds}{s^{2\lambda_1}} \\ & \preceq \begin{cases} n^{2\lambda_1-1}, & \text{якщо } 2\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } 2\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } 2\lambda_1 < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3. Нехай $w \in K_3^1(R)$.

1.3.1. Якщо $\gamma_1 \geq 0$, то з лем 3.1 і 3.2 випливає, що

$$\begin{aligned} D_{n,1}^1(w) & \preceq \int_{K_1^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{\gamma_1}} \preceq \int_{K_1^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w_1|^{\gamma_1\lambda_1}} \\ & \preceq n^{\gamma_1\lambda_1} \text{mes } K_1^1(R_1) \preceq n^{\gamma_1\lambda_1-1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

і для $\gamma_1 < 0$

$$D_{n,1}^1(w) \preceq \int_{K_1^1(R_1)} |t-w_1|^{-\gamma_1\lambda_1} |dt| \preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1} \text{mes } K_1^1(R_1) \preceq \left(\frac{1}{n}\right)^{-\gamma_1\lambda_1+1} \preceq 1.$$

1.3.2. Для довільного $\gamma_1 > -2$ на підставі лем 3.1 і 3.2 отримуємо

$$\begin{aligned} D_{n,1}^2(w) & \preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_1}} + \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_1)|^{2+\gamma_1}} \\ & \preceq \int_{K_{2,1}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int_{K_{2,2}^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \\ & \preceq \int_{1/n}^{c_1} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} + \int_{1/n}^{c_2} \frac{ds}{s^{(2+\gamma_1)\lambda_1}} \end{aligned}$$

$$\preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 = 1, \\ 1, & \text{якщо } (2+\gamma_1)\lambda_1 < 1. \end{cases} \quad (4.30)$$

1.3.3. Аналогічно, для довільного $\gamma_1 > -2$

$$D_{n,1}^3(w) \preceq \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_3^1(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\lambda_1}} \preceq n^{2\lambda_1-1}. \quad (4.31)$$

Об'єднуючи оцінки (4.13)–(4.31), для $w \in \Phi(L_R)$ маємо

$$D_{n,1}(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 > \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ \ln n, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ 1, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ n^{(2+\tilde{\gamma}_1)\lambda_1-1}, & \frac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 > -2, \end{cases} \quad (4.32)$$

де $\tilde{\gamma}_1 := \max\{0; \gamma_1\}$.

Випадок 2. Нехай $w \in \Phi(L_R^2)$.

По аналогії з випадком 1 одержимо оцінки для $w \in K_1^2(R)$, $w \in K_2^2(R)$ і $w \in K_3^2(R)$.

2.1. Нехай $w \in K_1^2(R) \cup K_2^2(R)$. Оцінимо величину

$$D_{n,2}(w) = \sum_{i=1}^3 \int_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} =: \sum_{i=1}^3 D_{n,2}^i(w) \quad (4.33)$$

окремо для $\gamma_1 \geq 0$ і $\gamma_1 < 0$.

Згідно з оцінкою [34, с. 181] для довільного континуума з простим зв'язним доповненням, маємо

$$|\Psi(t) - \Psi(w_2)| \succeq |t - w_2|^2, \quad |\Psi(t) - \Psi(w)| \succeq |t - w|^2. \quad (4.34)$$

При встановленні оцінок у цьому випадку будемо використовувати даний факт замість леми 3.2.

2.1.1. Для кожного $i = 1, 2$ одержуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 D_{n,2}^i(w) &= \sum_{i=1}^2 \int_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &\preceq \left(\int_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\int_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{2+\gamma_2}} \\
 & \preceq \left(\int_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t - w|^{2(2+\gamma_2)}} \preceq n^{2(2+\gamma_2)-1}, \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

якщо $\gamma_2 \geq 0$, і

$$\sum_{i=1}^2 D_{n,2}^i(w) = \sum_{i=1}^2 \int_{K_i^2(R_1)} \frac{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{-\gamma_2} |dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq n^3, \quad (4.36)$$

якщо $\gamma_2 < 0$.

2.1.2. Для $i = 3$ отримуємо

$$\begin{aligned}
 D_{n,2}^3(w) &= \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\
 &\preceq c_2^{-\gamma_2} \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|t - w|^2} \preceq n, \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

якщо $\gamma_2 \geq 0$, і

$$D_{n,2}^3(w) \preceq n, \quad (4.38)$$

якщо $\gamma_2 < 0$.

2.2. Нехай $w \in K_3^2(R)$.

2.2.1. Для кожного $\gamma_2 > -2$, аналогічно випадку 2.1.1, маємо

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 D_{n,2}^i(w) &= \sum_{i=1}^2 \int_{K_i^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\
 &\preceq \left(\int_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^{2+\gamma_2}} \\
 &\quad + \left(\int_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{2+\gamma_2}} \\
 &\preceq \left(\int_{K_{1,1}^2(R_1)} + \int_{K_{2,1}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t - w|^{2(2+\gamma_2)}} + \left(\int_{K_{1,2}^2(R_1)} + \int_{K_{2,2}^2(R_1)} \right) \frac{|dt|}{|t - w_2|^{2(2+\gamma_2)}}
 \end{aligned}$$

$$\asymp \begin{cases} n^{2(2+\gamma_2)-1}, & \text{якщо } 2(2+\gamma_2) > 1, \\ \ln n, & \text{якщо } 2(2+\gamma_2) = 1, \\ 1, & \text{якщо } 2(2+\gamma_2) < 1. \end{cases} \quad (4.39)$$

2.2.2. Для довільного $\gamma_2 > -2$ отримуємо

$$\begin{aligned} D_{n,2}^3(w) &= \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \\ &\asymp \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|\Psi(t) - \Psi(w)|^2} \preceq \int_{K_3^2(R_1)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \preceq n. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Об'єднуючи (4.33) – (4.40), одержуємо

$$D_{n,2}(w) \preceq n^{2(2+\tilde{\gamma}_2)-1}, \quad (4.41)$$

де $\tilde{\gamma}_2 := \max\{0; \gamma_2\}$.

Звідси, згідно зі співвідношеннями (4.10), (4.12), (4.32) і (4.41), записуємо

$$D_n(w) \preceq \begin{cases} n^{(2+\gamma_1)\lambda_1-1}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 > \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ \ln n, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ 1, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ n^{(2+\tilde{\gamma}_1)\lambda_1-1}, & \frac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 > -2, \end{cases} + n^{2(2+\tilde{\gamma}_2)-1}, \quad (4.42)$$

де $\tilde{\gamma}_j := \max\{0; \gamma_j\}$, $\tilde{\lambda}_1 := \max\{1; \lambda_1\}$.

Об'єднуючи оцінки (4.7) – (4.10) і (4.42), для довільного $z \in L_R$ отримуємо

$$|P_n(z)| \preceq \mu_n \|P_n\|_p, \quad (4.43)$$

де

$$\begin{aligned} \mu_n &:= \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 > \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0 < \lambda_1 \leq \frac{1}{2}, \quad -2 < \gamma_1 < \frac{1}{\lambda_1} - 2, \\ n^{\frac{(2+\tilde{\gamma}_1)\lambda_1}{p}}, & \frac{1}{2} < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 > -2, \end{cases} + n^{\frac{2(2+\tilde{\gamma}_2)}{p}} \\ &= \begin{cases} n^{\frac{(2+\gamma_1)\lambda_1}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad \gamma_1 \geq \frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{\frac{2(2+\gamma_2)}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad 0 < \gamma_1 < \frac{2}{\lambda_1}(2+\gamma_2) - 2, \quad \gamma_2 \geq 0, \\ n^{\frac{4}{p}}, & 0 < \lambda_1 < 2, \quad -2 < \gamma_1 < 0, \quad -2 < \gamma_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідно, з (4.7)–(4.9) випливає твердження теореми 2.1 для довільного $z \in L_R$, а отже, воно також справедливе для $z \in \bar{G}$, що завершує доведення для $m = 0$.

Переходимо тепер до випадку $m \geq 1$. Нехай $z \in L$ – довільна фіксована точка і

$$B(z, d(z, L_R)) := \{t : |t - z| < d(z, L_R)\}.$$

З інтегрального зображення Коші маємо

$$P_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial B(z, d(z, L_R))} \frac{P_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad z \in L, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

Отже,

$$\left| P_n^{(m)}(z) \right| \leq \frac{m!}{2\pi} \int_{\partial B(z, d(z, L_R))} |P_n(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{m+1}} \preceq \max_{z \in \bar{G}_R} |P_n(\zeta)| \sup_{z \in L} \left\{ \frac{1}{d^m(z, L_R)} \right\}. \quad (4.45)$$

Аналогічно відомій лемі Бернштейна – Уолша [36], із (4.43) маємо

$$\max_{z \in \bar{G}_R} |P_n(\zeta)| \preceq \|P_n\|_{C(\bar{G})} \preceq \mu_n \|P_n\|_p. \quad (4.46)$$

З іншого боку,

$$\sup_{z \in L} \left\{ \frac{1}{d(z, L_R)} \right\} \asymp \sup \left\{ \sup_{z \in L^1} \left\{ \frac{1}{d(z, L_R)} \right\}; \sup_{z \in L^2} \left\{ \frac{1}{d(z, L_R)} \right\} \right\} \preceq n^{m\tilde{\lambda}_j}.$$

Отже,

$$\left| P_n^{(m)}(z) \right| \preceq n^{m\tilde{\lambda}_j} \mu_n \|P_n\|_p,$$

що доводить теорему 2.1.

Доведення теореми 2.2. Нехай $G \in PDS(1; \lambda_1, \lambda_2)$ для деяких $0 < \lambda_j \leq 2$, $j = 1, 2$, $h(z)$ означена за допомогою (1.1). Із (4.44)–(4.46) отримуємо

$$\left| P_n^{(m)}(z_j) \right| \preceq \mu_n \|P_n\|_p \frac{1}{d^m(z_j, L_R)}, \quad j = 1, 2.$$

Оскільки, згідно з лемою 3.2,

$$d(z_j, L_R) \succeq n^{-\tilde{\lambda}_j}, \quad j = 1, 2,$$

то

$$\begin{aligned} \left| P_n^{(m)}(z_1) \right| &\preceq \|P_n\|_p n^{m\tilde{\lambda}_1} \begin{cases} n^{\frac{(2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 < 1, \end{cases} \\ &= \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\tilde{\gamma}_1}{p}+m\right)\tilde{\lambda}_1}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 > 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_1+\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 = 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_1+\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_1)\tilde{\lambda}_1 < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| P_n^{(m)}(z_2) \right| &\leq \|P_n\|_p n^{m\tilde{\lambda}_2} \begin{cases} n^{\frac{2(2+\tilde{\gamma}_2)}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 > 1, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 = 1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 < 1, \end{cases} \\
&= \|P_n\|_p \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\tilde{\gamma}_2}{p}+m\right)\tilde{\lambda}_2}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 > 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_2+\frac{1}{p}}(\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 = 1, \\ n^{m\tilde{\lambda}_2+\frac{1}{p}}, & \text{якщо } (2+\tilde{\gamma}_2)\tilde{\lambda}_2 < 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

що й доводить теорему 2.2.

Література

1. F. G. Abdullayev, V. V. Andrievskii, *On the orthogonal polynomials in the domains with K -quasiconformal boundary*, (in Russian), *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, Ser. Fiz., Tech., Mat.*, **4**, № 1, 7–11 (1983).
2. F. G. Abdullayev, *On the some properties on orthogonal polynomials over the regions of complex plane I*, *Ukr. Math. J.*, **52**, № 12, 1807–1817 (2000).
3. F. G. Abdullayev, *On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III)*, *Ukr. Math. J.*, **53**, № 12, 1934–1948 (2001).
4. F. G. Abdullayev, U. Deger, *On the orthogonal polynomials with weight having singularities on the boundary of regions in the complex plane*, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **16**, № 2, 235–250 (2009).
5. F. G. Abdullayev, N. D. Aral, *On Bernstein–Walsh-type lemmas in regions of the complex plane*, *Ukr. Math. J.*, **63**, № 3, 337–350 (2011).
6. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps*, *Ann. Polon. Math.*, **111**, 39–58 (2014).
7. F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe, *On the behavior of the algebraic polynomial in unbounded regions with piecewise Dini–Smooth boundary*, *Ukr. Math. J.*, **66**, № 5, 579–597 (2014).
8. F. G. Abdullayev, P. Özkartepe, *On the growth of algebraic polynomials in the whole complex plane*, *J. Korean Math. Soc.*, **52**, № 4, 699–725 (2015).
9. F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe, *Uniform and pointwise Bernstein–Walsh-type inequalities on a quasidisk in the complex plane*, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **23**, № 2, 285–310 (2016).
10. F. G. Abdullayev, T. Tunç, *Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions with asymptotically conformal curve on weighted Bergman space*, *Lobachevskii J. Math.*, **38**, № 2, 193–205 (2017).
11. F. G. Abdullayev, T. Tunc, G. A. Abdullayev, *Polynomial inequalities in quasidisks on weighted Bergman space*, *Ukr. Math. J.*, **69**, № 5, 675–695 (2017).
12. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *Bernstein–Nikolskii-type inequalities for algebraic polynomials in Bergman space in regions of complex plane*, *Ukr. Math. J.*, **73**, № 4, 513–531 (2021).
13. F. G. Abdullayev, C. D. Gün, *Bernstein–Walsh-type inequalities for derivatives of algebraic polynomials*, *Bull. Korean Math. Soc.*, **59**, № 1, 45–72 (2022); DOI.org/10.4134/BKMS.b210023.
14. F. G. Abdullayev, *Bernstein–Walsh-type inequalities for derivatives of algebraic polynomials in quasidisks*, *Open Math.*, **19**, 1847–1876 (2021).
15. L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, Princeton, NJ (1966).
16. V. V. Andrievskii, V. I. Belyi, V. K. Dzyadyk, *Conformal invariants in constructive theory of functions of complex plane*, World Federation Publ. Co., Atlanta (1995).
17. V. V. Andrievskii, H. P. Blatt, *Discrepancy of signed measures and polynomial approximation*, Springer-Verlag, New-York (2010).
18. V. V. Andrievskii, *Weighted polynomial inequalities in the complex plane*, *J. Approx. Theory*, **164**, № 9, 1165–1183 (2012).

19. S. Balci, M. Imashkyzy, F. G. Abdullayev, *Polynomial inequalities in regions with interior zero angles in the Bergman space*, Ukr. Math. J., **70**, № 3, 362–384 (2018).
20. D. Benko, P. Dragnev, V. Totik, *Convexity of harmonic densities*, Rev. Mat. Iberoam., **28**, № 4, 1–14 (2012).
21. S. N. Bernstein, *Sur la limitation des derivees des polnomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **190**, 338–341 (1930).
22. S. N. Bernstein, *On the best approximation of continuos functions by polynomials of given degree*, Izd. Akad. Nauk SSSR, **I** (1952); **II** (1954) (O nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsii posredstrvom mnogochlenov dannoi stepeni), Sobraniye sochinenii. **I** (4), 11–10 (1912)
23. V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk, *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*, Walter de Gruyter Berlin, New York (2008).
24. V. K. Dzyadyk, *Introduction to the theory of uniform approximation of function by polynomials*, Nauka, Moskow (1977).
25. D. Jackson, *Certain problems on closest approximations*, Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 889–906 (1933).
26. O. Lehto, K. I. Virtanen, *Quasiconformal mapping in the plane*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
27. D. I. Mamedhanov, *Inequalities of S. M. Nikol'skii type for polynomials in the complex variable on curves*, Soviet Mat. Dokl., **15**, 34–37 (1974).
28. G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci., Singapore (1994).
29. S. M. Nikol'skii, *Approximation of function of several variable and imbeding theorems*, Springer-Verlag, New York (1975).
30. P. Özkartepe, *Uniform and pointwise polynomial estimates in regions with interior and exterior cusps*, Cumhuriyet Sci. J., **39**, № 1, 47–65 (2018).
31. I. Pritsker, *Comparing norms of polynomials in one and several variables*, J. Math. Anal. and Appl., **216**, 685–695 (1997).
32. Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen (1975).
33. S. Rickman, *Characterization of quasiconformal arcs*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., **395**, 7–30 (1966).
34. P. M. Tamrazov, *Smoothness and polynomial approximations*, (in Russian), Naukova Dumka, Kiev (1975).
35. G. Szegő, A. Zygmund, *On certain mean values of polynomials*, J. Anal. Math., **3**, № 1, 225–244 (1953).
36. J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc., Rhode Island (1960).

Одержано 18.09.22