УДК 517.968

А. Асанов (Кыргыз.-Тур. ун-т „Манас”, Бишкек),
Т. Бекешов (Ош. гос. ун–т, Кыргызстан)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

On the basis of a new approach, we prove the uniqueness theorem and construct Lavrent'ev's regularizing operators for the solution of nonclassical linear Volterra integral equations of the first kind with nondifferentiable kernels.

На основі нового підходу доведено теорему єдиності й побудовано регуляризуючі оператори за М. М. Лаврентьєвим для розв'язання некласичних лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду з недиференційовними ядрами.

Рассмотрим неклассическое линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $\alpha(t) \in C[t_0, T]$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t) \leq t$ при $t \in [t_0, T]$, $K(t,s)$ и $f(t)$ — известные функции соответственно в области $G = \{(t,s); t_0 \leq t \leq T, \alpha(t) \leq s \leq t\}$ и $[t_0, T]$, $f(t_0) = 0$, $u(t)$ — искомая функция.

Теория и приложения интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в работе [1] приведен обзор результатов по интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. В работе [2] исследованы интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов с гладкими ядрами, доказано существование многопараметрического семейства решений. В работе [3] для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву. В работе [4] исследованы теория и численные методы решения неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с дифференцируемыми и отличными от нуля ядрами на диагонали. В работах [4 – 7] рассмотрены приложения неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода в различных практических задачах. В работе [8] методом регуляризации М. М. Лаврентьева для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими и отличными от нуля ядрами на диагонали и дифференцируемыми решениями построено их приближенное решение. В работах [9, 10] доказаны теоремы единственности решений и построены регуляризирующие операторы для решений систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов. В работе [11] доказана теорема единственности решений и построен регуляризирующий оператор для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. В работах [12, 13] на основе нового подхода исследованы вопросы существования и единственности решений скалярных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями и их систем. В работе [14] приведен обзор результатов по интегральным уравнениям Вольтерра первого рода.

В данной работе на основе модификации метода исследования, предложенного в работе [9], доказаны теоремы единственности и построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву для решения неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с недифференцируемыми ядрами, причем ядра на диагонали могут быть равны нулю в конечных точках. Кроме того, получена формула для определения $u(t_0)$. Полученные результаты можно применять для исследования некоторых прикладных задач, изложенных в работах [6, 7].

Обозначим через $C^{\gamma}_{\varphi}[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, линейное пространство всех функций $u(t)$, определенных в $[t_0,T]$ и удовлетворяющих условию

$$|u(t)-u(s)|\le c|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma},\quad t,s\in[t_0,T],$$

где $\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}K(s,s)ds$, $t\in[t_0,T]$, c — положительная постоянная, зависящая от $u(t)$, но не от t,s.

***Замечание* 1.** Если $0<m_0\le K(t,t)\le m_1$ при всех $t\in[t_0,T]$, то $C^{\gamma}_{\varphi}[t_0,T]=C^{\gamma}[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, где $m_0,m_1\in R$, $C^{\gamma}[t_0,T]$ — пространство Гельдера.

Потребуем выполнения следующих условий:

а) $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha'(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=t_0$, $\alpha(t)\le t$ при всех $t\in[t_0,T]$;

в) $K(t,s)\in L_1(\alpha(t),t)$, $K(t,t)\in L_1(t_0,T)$ при фиксированном $t\in[t_0,T]$, $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$;

с) при $t>\tau$ для всех (t,s), $(\tau,s)\in G$, справедлива оценка

$$|K(t,s)-K(\tau,s)|\le l(s)\left[\int\limits_{\tau}^{t}K(s,s)ds\right],$$

где $l(t)\in L_1(t_0,T)$, $0\le l(t)$ при всех $t\in[t_0,T]$.

Лемма 1 (обобщенная формула Дирихле)**.** *Пусть $\alpha(t)\in C[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=t_0$, $\alpha(t)$ — строго возрастающая функция на $[t_0,T]$, $\alpha(t)\le t$ при всех $t\in[t_0,T]$, $F(t,s)\in L_1(G)$, $G=\{(t,s);t_0\le t\le T,\alpha(t)\le s\le t\}$. Тогда для любого $t\in(t_0,T]$ справедливы формулы*

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left[\int\limits_{\alpha(\tau)}^{\tau}F(s,\tau)ds\right]d\tau=\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\left[\int\limits_{s}^{\alpha^{-1}(s)}F(s,\tau)d\tau\right]ds+\int\limits_{\alpha(t)}^{t}\left[\int\limits_{s}^{t}F(s,\tau)d\tau\right]ds,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left[\int\limits_{t_0}^{\alpha(\tau)}F(s,\tau)ds\right]d\tau=\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\left[\int\limits_{\alpha^{-1}(s)}^{t}F(s,\tau)d\tau\right]ds,$$

где $\alpha^{-1}(t)$ — обратная функция к $\alpha(t)$.

Доказательство вытекает из графика области G.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$\varepsilon\nu(t,\varepsilon)+\int\limits_{\alpha(t)}^{t}K(t,s)\nu(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon u(t_0),\tag{2}$$

где $t\in[t_0,T]$, $u(t)$ — решение уравнения (1), $0<\varepsilon$ — малый параметр.

Решение уравнения (2) представим в виде

$$\nu(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon), \quad t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds - [u(t) - u(t_0)], \quad t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

Используя резольвенту

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

ядра $\left[-\dfrac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$, из (4) получаем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds -$$

$$-[u(t) - u(t_0)] - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha(\tau)}^{\tau} [K(\tau,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(\tau)} K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds - [u(\tau) - u(t_0)] \right\} d\tau, \quad t \in [t_0, T]. \tag{5}$$

Далее, применив лемму 1, преобразуем двойные интегралы в (5):

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\alpha(\tau)}^{\tau} K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s) - K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{ \int\limits_{s}^{\alpha^{-1}(s)} K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s) - K(s,s)]d\tau \right\}\xi(s,\varepsilon)ds +$$

$$+ \int\limits_{\alpha(t)}^{t} \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{ \int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s) - K(s,s)]d\tau \right\}\xi(s,\varepsilon)ds, \tag{6}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\alpha(\tau)} K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(s,s)\xi(s,\varepsilon)dsd\tau =$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)}\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-1\right]K(s,s)\xi(s,\varepsilon)ds. \qquad (7)$$

Кроме того, будем использовать следующие формулы:

$$-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)] = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(s,s)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{s}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[K(t,s)-K(s,s)]d\tau, \qquad (8)$$

$$-[u(t)-u(t_0)] = -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(t_0)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[u(t)-u(t_0)]d\tau. \qquad (9)$$

Из (5), учитывая формулы (6) – (9), получаем

$$\xi(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\int\limits_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + F(t,\varepsilon), \quad t\in[t_0,T], \qquad (10)$$

где

$$H_0(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}K(\alpha^{-1}(s),s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}, \qquad (11)$$

$$H_1(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(\alpha^{-1}(s),s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{s}^{\alpha^{-1}(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[K(\tau,s)-K(s,s)]d\tau, \qquad (12)$$

$$H_2(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(s,s)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau, \tag{13}$$

$$U(t,\varepsilon) = -e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(t_0)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[u(t)-u(\tau)]d\tau. \tag{14}$$

Далее, будем использовать формулу

$$-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(s,s)] = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(s,s)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^{\alpha^{-1}(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[K(t,s)-K(s,s)]d\tau. \tag{15}$$

Тогда в силу (15) из (12) получаем

$$H_1(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(\alpha^{-1}(s),s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(s,s)]-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^{\alpha^{-1}(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau. \tag{16}$$

Лемма 2. *Если выполняются условия* a) – c), *то для функции, определенной формулой* (11), *справедлива оценка*

$$\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,s,\varepsilon)|ds \le \gamma_0, \quad t\in[t_0,T],$$

где

$$\gamma_0 = \sup_{s\in[t_0,\alpha(T)]}\frac{|K(\alpha^{-1}(s),s)|\alpha'(\alpha^{-1}(s))}{K(\alpha^{-1}(s),\alpha^{-1}(s))} =$$

$$= \sup_{t\in[t_0,T)]}\frac{|K(t,\alpha(t))|\alpha'(t)}{K(t,t)}. \tag{17}$$

Доказательство. Из свойства обратных функций

$$(\alpha^{-1}(s))' = \frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}, \quad s\in[t_0,\alpha(T)],$$

с учетом (17) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,s,\varepsilon)|ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} \frac{|K(\alpha^{-1}(s),s)|\alpha'(\alpha^{-1}(s))}{K(\alpha^{-1}(s),\alpha^{-1}(s))} \left[\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} K(\alpha^{-1}(s),\alpha^{-1}(s))\right] [\alpha^{-1}(s)]' ds \leq$$

$$\leq \gamma_0 \left\{1 - \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right]\right\} \leq \gamma_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если выполняются условия* a) – c), *то для функций, определенных формулами* (16) *и* (13), *справедливы оценки*

$$|H_1(t,s,\varepsilon)| \leq (2e^{-1}+1)l(s), \quad (t,s) \in G_1,$$

$$|H_2(t,s,\varepsilon)| \leq (e^{-1}+1)l(s), \quad (t,s) \in G,$$

где $G_1 = \{(t,s) : t_0 \leq t \leq T, t_0 \leq s \leq \alpha(t)\}$.

Доказательство. В силу условия леммы 3 из (16) имеем

$$|H_1(t,s,\varepsilon)| \leq l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(s)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right] e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(s)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+ l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right] e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} -$$

$$- \int\limits_{s}^{\alpha^{-1}(s)} l(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} \left[\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)\right] \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right] d\tau \leq$$

$$\leq 2l(s) \sup_{\nu \geq 0} (\nu e^{-\nu}) + l(s) \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\nu}\nu d\nu = (2e^{-1}+1)l(s).$$

Далее, в силу условия леммы 3 из (13) получаем

$$|H_2(t,s,\varepsilon)| \leq l(s) \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right] e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} -$$

$$- \int\limits_{s}^{t} l(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau} \left[\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)\right] \left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right] d\tau \leq$$

$$\leq l(s)\sup_{\nu\geq 0}(\nu e^{-\nu}) + l(s)\int\limits_0^\infty e^{-\nu}\nu d\nu = (e^{-1}+1)l(s).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняется условие* в) *и* $U(t,\varepsilon)$ *определена по формуле* (14). *Тогда*:

1) *если* $u(t)$ *принадлежит* $C_\varphi^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$, *то справедлива оценка*

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \leq M_0 C_1 \varepsilon^\gamma, \tag{18}$$

где

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C = \sup_{t\in[t_0,T} |U(t,\varepsilon)|,$$

$$M_0 = \sup\frac{|u(t)-u(s)|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^\gamma}, \quad C_1 = \sup_{\nu\geq 0}[e^{-\nu}\nu^\gamma] + \int\limits_0^\infty e^{-\nu}\nu^\gamma d\nu;$$

2) *если* $u(t)$ *принадлежит* $C[t_0,T]$, *то справедлива оценка*

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \leq 2\omega_{\overline{u}}(\varepsilon^\beta) + 4\|u(t)\|_C e^{-\varepsilon^{\beta-1}}, \tag{19}$$

где

$$\omega_{\overline{u}}(\delta) = \sup_{|x-\nu|\leq\delta, x,\nu\in[0,\varphi(T)]} |u(\varphi^{-1}(x)) - u(\varphi^{-1}(\nu)|.$$

Доказательство. 1. Пусть $u(t)$ принадлежит $C_\varphi^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\leq 1$. Тогда из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)| \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)}\varepsilon^\gamma M_0\left[\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right]^\gamma +$$

$$+ M_0\int\limits_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\varepsilon^\gamma\frac{K(\tau,\tau)}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right]^\gamma d\tau \leq$$

$$\leq M_0\sup_{\nu\geq 0}(e^{-\nu}\nu^\gamma) + M_0\varepsilon^\gamma\left[\int\limits_0^\infty e^{-\nu}\nu^\gamma d\nu\right].$$

Отсюда получаем оценку (18).

2. Сначала пусть $t_0\leq t\leq\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)$, $0<\beta<1$. Тогда из (14) имеем

$$|U(t,\varepsilon)| \leq |(u(t)-u(t_0)| + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)|u(t)-u(\tau)|d\tau \leq 2\omega_{\overline{u}}(\varepsilon^\beta). \tag{20}$$

Пусть теперь $\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)\leq t\leq T$. Тогда из (14) получаем

$$|U(t,\varepsilon)| \leq 2\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \frac{2\|u(t)\|_C}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}\varphi'(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\varepsilon})}^{t}\omega_{\overline{u}}(\varepsilon^{\beta})e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t)-\varphi(\tau)]}\frac{1}{\varepsilon}\varphi'(\tau)d\tau\leq$$

$$\leq 4\left\|u(t)\right\|_{C}e^{-\varepsilon^{\beta-1}}+\ \omega_{\overline{u}}(\varepsilon^{\beta}).\qquad(21)$$

Из (20) и (21) следует оценка (19).

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* a) – c) *и* $\gamma_1=\exp\left[(2e^{-1}+1)\int_{t_0}^{T}l(s)ds\right]\gamma_0<1,$ *где число* γ_0 *определено в лемме* 2. *Тогда*:

1) *если интегральное уравнение* (1) *имеет решение* $u(t)\in C_{\varphi}^{\gamma}[t_0,T],\ 0<\gamma\leq 1,$ *то решение* $v(t,\varepsilon)$ *уравнения* (2) *при* $\varepsilon\to 0$ *сходится по норме* $C[t_0,T]$ *к решению* $u(t)$; *при этом справедлива оценка*

$$\left\|v(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{C}\leq\frac{M_2}{1-\gamma_1}\varepsilon^{\gamma},\qquad(22)$$

где

$$M_1=\exp\left[(2e^{-1}+1)\int\limits_{t_0}^{T}l(s)ds\right],\quad M_2=M_0M_1C_1$$

и числа M_0,C_1 *определены в лемме* 4;

2) *если интегральное уравнение* (1) *имеет решение* $u(t)\in C[t_0,T]$, *то решение* $v(t,\varepsilon)$ *уравнения* (2) *при* $\varepsilon\to 0$ *сходится по норме* $C[t_0,T]$ *к решению* $u(t)$; *при этом справедлива оценка*

$$\left\|v(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_{C}\leq\frac{M_1}{1-\gamma_1}\left[2\omega_{\overline{u}}(\varepsilon^{\beta})+4\left\|u(t)\right\|_{C}e^{-\varepsilon^{\beta-1}}\right],\qquad(23)$$

где $0<\beta<1,\ \omega_{\overline{u}}(\delta)$ *определено в лемме* 4.

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 из (10) получаем

$$|\xi(t,\varepsilon)|\leq\gamma_0\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{C}+\int\limits_{t_0}^{t}(2e^{-1}+1)l(s)|\xi(s,\varepsilon)|ds+$$

$$+\left\|U(t,\varepsilon)\right\|_{C},\quad t\in[t_0,T].$$

Отсюда, применяя неравенство Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{C}\leq\gamma_1\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{C}+\exp\left[(2e^{-1}+1)\int\limits_{t_0}^{T}l(s)ds\right]\left\|U(t,\varepsilon)\right\|_{C},$$

т. е.

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|_{C}\leq\frac{M_1}{1-\gamma_1}\left\|U(t,\varepsilon)\right\|_{C}.\qquad(24)$$

1. Если $u(t)$ принадлежит $C^{\gamma}_{\varphi}[t_0, T],\ 0 < \gamma \leq 1$, то в силу оценки (18) из (24) получаем оценку (22).

2. Если $u(t)$ принадлежит $C[t_0, T]$, то в силу оценки (19) из (24) имеем оценку (23).

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть выполняются условия* a) – c) *и* $\gamma_1 = \exp\left[(2e^{-1}+1)\int_{t_0}^{T} l(s)ds\right]\gamma_0 <$ < 1, *где число* γ_0 *определено в лемме* 2. *Тогда решение уравнения* (1) *в пространстве* $C[t_0, T]$ *единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t) \in C[t_0, T]$ является решением уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)u(s)ds + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds = 0, \quad t \in [t_0, T].$$

Учитывая следствие теоремы 1 и теорему о среднем, из последнего уравнения получаем

$$|u(t^*)| \int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)ds \leq \int\limits_{\alpha(t)}^{t} l(s)\left[\int\limits_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right]ds \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{\alpha(t)}^{t} l(s)ds\right]\left[\int\limits_{\alpha(t)}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right], \tag{25}$$

где $\alpha(t) \leq t^* \leq t,\ t \in [t_0, T]$.

Далее, из (25) имеем

$$|u(t^*)| \leq \int\limits_{t_0}^{t} l(s)ds, \quad t_0 \leq \alpha(t) \leq t^* \leq t.$$

Переходя к пределу при $t \to t_0$, получаем $u(t_0) = 0$. Тогда из оценки (23) следует, что

$$\|u(t)\|_C \leq \frac{M_1}{1-\gamma_1}\left[2\omega_{\overline{u}}(\varepsilon^{\beta})] + 4\|u(t)\|_C\, e^{-\varepsilon^{\beta-1}}\right].$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем $\|u(t)\|_C = 0$.

Следствие 1 доказано.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* a) – c), $u(t)$ *является решением уравнения* (1) *из пространства* $C[t_0, T]$ *и существует конечный предел*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)ds} = \gamma \in R.$$

Тогда $u(t_0) = \gamma$.

Доказательство. Из (1) имеем

$$u(t_0) + y(t) + z(t) = \frac{f(t)}{\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)ds}, \quad t \in (t_0, T],$$

где

$$y(t) = \frac{\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)[u(s) - u(t_0)]ds}{\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)ds}, \quad t \in (t_0, T], \tag{26}$$

$$z(t) = \frac{\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{t} [K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds}{\displaystyle\int_{\alpha(t)}^{t} K(s,s)ds}, \quad t \in (t_0, T]. \tag{27}$$

В силу условий a) и в) из (26) получаем

$$|y(t)| \le \sup_{s\in[t_0,t]} |u(s) - u(t_0)|, \quad t \in (t_0, T]. \tag{28}$$

В силу условий a) – c) из (27) имеем

$$|z(t)| \le \|u(t)\|_C \int_{t_0}^{t} l(s)ds, \quad t \in (t_0, T]. \tag{29}$$

Из оценок (28) и (29) следует, что $u(t_0) = \gamma$.

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 2.** *Если выполняются все условия теоремы* 2, $\alpha(t) = t_0$ *и* $K(t,t) = 1$ *для всех* $t \in [t_0, T]$, *то* $u(t_0) = f'(t_0)$.

***Замечание* 2.** Как видно из теоремы 2, во многих моделях величину $u(t_0)$ не всегда можно найти точно. Поэтому важно рассматривать уравнение (1) с приближенно заданными входными данными.

***Пример* 1.** Рассмотрим интегральные уравнения (1) и (2) при $t_0 = 0,\ T = 1,\ \alpha(t) = pt^2$, $p \in [0,1]$,

$$K(t,s) = s^\beta + a\left[t^{\beta+1} - s^{\beta+1}\right] s^{-0,5}, \quad a, \beta \in R, \quad \beta > -0,5.$$

Пусть

$$p < 0,25(1 + |a|)^{-2} \exp\left[-4(2e^{-1} + 1)|a|(1+\beta)\right].$$

В этом случае все условия теоремы 1 выполняются при

$$K(t,t) = t^\beta, \quad l(t) = |a|(1+\beta)t^{-0,5}, \quad t \in [0,1],$$

$$\gamma_0 = \sup_{t\in[0,1]} \frac{|(pt^2)^\beta + a(pt^2)^{-0,5}\left[t^{\beta+1} - (pt^2)^{\beta+1)}\right]|2pt}{t^\beta} \le 2(1+|a|)p^{0,5},$$

$$\varphi(t)=\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1},\quad \gamma_1=\exp\left[2(2e^{-1}+1)|a|(1+\beta)\right]\gamma_0<1.$$

***Пример* 2.** Рассмотрим интегральные уравнения (1) и (2) при $t_0=0,\ T=1,\ \alpha(t)=0$ при $t\in[0,1]$,

$$K(t,s)=3+3a(t-s)s^{-0,5},\quad a\in R.$$

В этом случае все условия теоремы 1 выполняются при

$$K(t,t)=3, l(t)=|a|t^{-0,5},\quad \varphi(t)=3t,\quad t\in[0,1],\quad \gamma_0=0,\quad \gamma_1=0.$$

Если $f(t)=2t^{1,5}+1,5at^2$, то интегральное уравнение (1) имеет решение

$$u(t)=t^{0,5}\in C^{0,5}[0,1],$$

где $C^{0,5}[0,1]$ — пространство Гельдера.

***Пример* 3.** Рассмотрим интегральные уравнения (1) и (2) при $t_0=0,\ T=1,\ \alpha(t)=$ $=\dfrac{1}{9}\ln(1+t)$,

$$K(t,s)=(1-s)^{-\frac{1}{2}}+\frac{3s^{\frac{1}{2}}}{2e^{-1}+1}\left(\sqrt{1-s}-\sqrt{1-t}\right).$$

В этом случае все условия теоремы 1 выполняются при

$$K(t,t)=(1-t)^{-\frac{1}{2}},\quad \varphi(t)=2(1-\sqrt{1-t}),\quad l(t)=\frac{3\sqrt{t}}{2\,(2e^{-1}+1)},$$

$$\gamma_0=\sup_{t\in[0,1]}\left[\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{9}\ln(1+t)}}+\frac{\sqrt{1-t}\sqrt{\ln(1+t)}}{2e^{-1}+1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sqrt{1-\frac{1}{9}\ln(1+t)}-\sqrt{1-t}\right)\right]\frac{1}{9(1+t)}\le\frac{1}{9}\left[1+\frac{\ln 2}{1+\dfrac{2}{3}}\right]\le\frac{8}{45},$$

$$\gamma_1=e\gamma_0<\frac{3\cdot 8}{45}=\frac{8}{15}<1.$$

Литература

1. З. Б. Цалюк, *Интегральные уравнения Вольтерра*, Итоги науки и техники, Мат. анализ, **15**, 131 – 198 (1977).
2. Н. А. Магницкий, *Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **19**, № 4, 970 – 989 (1979).
3. М. М. Лаврентьев, *Об интегральных уравнениях первого рода*, Докл. АН СССР, **127**, № 1, 31 – 33 (1959).
4. А. С. Апарцин, *Неклассические уравнения Вольтерра первого рода*, Теория и численные методы, Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск (1999).
5. А. С. Апарцин, И. В. Караулова, Е. В. Маркова, В. В. Труфанов, *Применения интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики*, Электричество, № 10, 69 – 75 (2005).

6. А. С. Апарцин, И. В. Сидлер, *Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем*, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, **24**, № 2, 24 – 33 (2018).
7. В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Наука, Москва (1983).
8. А. М. Денисов, *О приближенном решении уравнения Вольтерра* I *рода*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **15**, № 4, 1053 – 1056 (1975).
9. М. И. Иманалиев, А. Асанов, *О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода*, Докл. АН СССР, **309**, № 5, 1052 – 1055 (1989).
10. М. И. Иманалиев, А. Асанов, *Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода*, Докл. РАН, **415**, № 1, 14 – 17 (2007).
11. М. И. Иманалиев, А. Асанов, *О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода*, Докл. РАН, **430**, № 6, 1 – 4 (2010).
12. М. И. Иманалиев, А. Асанов, Р. А. Асанов, *Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями*, Дифференц. уравнения, **54**, № 3, 387 – 397 (2018).
13. A. Asanov, K. Matanova, R. Asanov, *A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind*, Kuwait J. Sci., **44**, № 1, 17 – 28 (2017).
14. R. K. Lamm, *A survey of regularization methods for first kind Volterra equations*, Surveys on Solution Methods for Inverse Problems, Springer, Vienna (2000), p. 53 – 82.

Получено 21.02.19