

ПЕРІОДИЧНА КУЛОНІВСЬКА ДИНАМІКА ДВОХ РІВНИХ ВІД'ЄМНИХ ЗАРЯДІВ У ПОЛІ ФІКСОВАНИХ ЧОТИРЬОХ РІВНИХ ДОДАТНИХ ЗАРЯДІВ

We found periodic solutions of the Coulomb d -dimensional ($d = 1, 2, 3$) equation of motion for two equal negative point charges in the field of four equal positive point charges fixed at vertices of a parallelepiped. These systems possess an equilibrium configuration. The periodic solutions are obtained with the help of Lyapunov's central theorem.

Знайдено періодичні розв'язки d -вимірних ($d = 1, 2, 3$) рівнянь руху Кулона двох від'ємних точкових однакових зарядів у полі чотирьох однакових додатних зарядів, зафіксованих у вершинах прямокутника. Ці системи мають рівноважний стан. Періодичні розв'язки отримано за допомогою центральної теореми Ляпунова.

1. Вступ. У цій статті знайдено рівновагу у системі Кулона двох від'ємних однакових зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника зі сторонами $2a$, $2b$. Це дає змогу знайти у ній періодичні розв'язки лінійного, площинного та просторового рівняння руху Кулона. В лінійній системі рівновага є стійкою. Раніше автором були знайдені періодичні та квазіперіодичні розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох від'ємних однакових зарядів у полі двох однакових додатних зарядів [1–4].

Ці результати були отримані так само, як і у цій статті, завдяки тому, що для симетричної матриці U^0 частинних других похідних потенціальної енергії у рівновазі було знайдено в явному вигляді власні значення, серед яких були виявлені додатні, що породжують періодичні чи квазіперіодичні розв'язки. Існування періодичних розв'язків впливає з центральної теореми Ляпунова [5–9], якщо немає нульових та вироджених власних значень U^0 . При цьому потенціальна енергія повинна бути дійсно аналітичною функцією в околі рівноваги. Саме такою є кулонівська потенціальна енергія.

Існування квазіперіодичних розв'язків було доведено у випадку наявності нульового власного значення U^0 за допомогою методу небесної механіки виключення вузла [8] та центральної теореми Ляпунова [3–4]. При цьому враховувалось, що нульове власне значення є наслідком обертальної інваріантності системи. Площинна та просторова системи цієї статті не мають обертальної інваріантності, а також нульового власного значення U^0 .

Виникає питання: чи можливо довести існування періодичних розв'язків в кулонівських системах, коли немає рівноваги? В статті [10] автор дав ствердну відповідь на це питання, довівши їхнє існування у нейтральній системі n однакових від'ємних зарядів у полі n однакових додатних зарядів. Метод доведення цього результату ґрунтується на узагальненні видатного методу мажорант Зігеля [11], що застосовувався ним для знаходження розв'язків задачі трьох тіл небесної механіки.

Центральна теорема Ляпунова має справу з системами Гамільтона, рівновага яких збігається з початком координат і формулюється так [10].

Теорема 1.1. *Нехай n -вимірна гамільтонова система визначається дійсно аналітичним гамільтоніаном, розклад Тейлора якого збігається абсолютно та рівномірно в околі початку координат і починається з квадратичних доданків. Нехай також $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ — власні*

значення матриці, що визначає лінійну частину гамільтонового векторного поля, такі що $\lambda_s, s = 1, \dots, k$, є уявними і нерезонансними: $\lambda_j \neq n' \lambda_s, s = 1, \dots, k, j = 1, \dots, 2n, j \neq s$, де n' — довільне ціле число. Тоді рівняння Гамільтона допускає існування k періодичних розв'язків, таких що кожен із них залежить від дійсного відмінного параметра c_j для деякого $j = 1, \dots, k$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \dots, \tau_k(c_k)$ є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля та $\tau_j(0) = \frac{2\pi}{|\lambda_j|}$.

Рівняння руху d -вимірної систем N точкових зарядів з масами $m_j, j = 1, \dots, N$, є рівнянням руху електромеханічної системи частинок із потенціальною енергією U , заданою парним кулонівським потенціалом, і має вигляд

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$(N) = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = (x_j^1, \dots, x_j^d).$$

Відомо [12], що для (1.1) з $m_j = m$ власні значення з теореми 1.1 збігаються з $\lambda_j = \pm \sqrt{-m^{-1} \sigma_j}, j = 1, \dots, dN$, де σ_j — власні значення U^0 . Таким чином, існування періодичних розв'язків (1.1) можна отримати з теореми 1.1, що ми і зробимо в цій статті.

Отримані у цій статті результати, як і у попередніх, можна використовувати в теорії плазми та квантових моделей іонізованих молекул у наближенні Борна – Оппенгеймера, в якому нерухомі додатні та рівні від'ємні заряди асоціюються відповідно з важкими ядрами та легкими електронами [13].

Ця стаття організована таким чином. У другому, третьому та четвертому пунктах знайдено періодичні розв'язки відповідно в лінійних, площинних та просторових системах. Ці результати сформульовано у вигляді теорем наприкінці цих пунктів.

2. Лінійна динаміка. Ми розглядаємо динаміку на (координатній) прямій двох однакових від'ємних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника зі сторонами $2a, 2b$, який симетрично розташований на площині відносно двох координатних осей (див. наступний пункт).

Потенціальна енергія цієї системи має вигляд

$$U(x_{(2)}) = e_0^2 |x_1 - x_2|^{-1} - 2e_0 e' \sum_{j=1}^2 \left[\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2} \right)^{-1} + \left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2} \right)^{-1} \right], \quad x_j \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Рівноважні рівняння мають вигляд $\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(2)}) = 0, j = 1, 2$. Підставимо рівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} |x_1 - x_2|^{-k} &= -k \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^{k+2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2} \right)^{-k} &= -k \frac{x_1 - a}{\left(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2} \right)^{k+2}} \end{aligned}$$

в них при $k = 1$. Отже,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(2)}) = -e_0^2 \frac{x_j - x_k}{|x_1 - x_2|^3} + 2e_0 e' \left[\frac{x_j - a}{\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2}\right)^3} + \frac{x_j + a}{\left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2}\right)^3} \right], \quad k \neq j = 1, 2.$$

В результаті ми отримуємо рівноважне співвідношення для рівноваги x^0 , $x_1 = x_1^0 = a$, $x_2 = x_2^0 = -a$:

$$\frac{e_0}{(2a)^3} = \frac{2e'}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3}.$$

Важливу інформацію про рівновагу надає матриця частинних похідних U . Її недиагональні елементи визначаються функцією

$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_2 \partial x_1} = -2e_0^2 |x_1 - x_2|^{-3}.$$

Нехай $U_{1,2}^0$ збігається з нею в стані рівноваги. Тоді $U_{1,2}^0 = -\frac{e_0^2}{4a^3} = -u'$. Її діагональні елементи визначаються функцією

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U(x_{(2)}) = \frac{2e_0^2}{|x_1 - x_2|^3} + 2e_0 e' \left[\frac{1}{\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2}\right)^3} - \frac{3(x_j - a)^2}{\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2}\right)^5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2}\right)^3} - \frac{3(x_j + a)^2}{\left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2}\right)^5} \right]. \end{aligned}$$

Нехай $U_{j,j}^0$ збігаються з нею в стані рівноваги. Тоді

$$U_{1,1}^0 = U_{2,2}^0 = \frac{e_0^2}{4a^3} + 2e_0 e' \left[b^{-3} + \frac{1}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3} - \frac{3(2a)^2}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^5} \right].$$

З рівноважного співвідношення випливає, що

$$\left(\frac{e_0}{2e'}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2a} = \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}}, \quad 2a = (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\eta} b, \quad \eta = \left(\frac{e_0}{2e'}\right)^{\frac{2}{3}} < 1. \quad (2.2)$$

В результаті

$$\begin{aligned} 2e_0 e' b^{-3} &= (2a)^{-3} e_0^2 (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{2e_0 e'}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3} &= 2e_0 e' \frac{e_0}{2e'} \left(\frac{1}{2a}\right)^3 = \frac{u'}{2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{6e_0e'(2a)^2}{\left(\sqrt{(2a)^2+b^2}\right)^5} = 6e_0e' \left(\frac{e_0}{2e'}\right)^{\frac{5}{3}} (2a)^{-3} = \frac{3u'}{2} \eta,$$

$$U_{1,1}^0 = U_{2,2}^0 = \frac{3u'}{2} + \frac{u'}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3u'}{2} \eta = v.$$

Нехай U^0 є матрицею з елементами $U_{1,1}^0$, $U_{2,2}^0$, $U_{1,2}^0 = U_{2,1}^0$. Її власні значення ζ_1 , ζ_2 легко знаходяться як корені $\lambda = \zeta_1$, ζ_2 рівняння

$$\begin{aligned} \text{Det } (U^0 - \lambda I) &= (v - \lambda)^2 - u'^2 = 0, \\ \zeta_1 &= v - u' = u'\zeta'_1, \quad \zeta_2 = v + u' = u'\zeta'_2, \end{aligned}$$

де

$$\zeta'_1 = \frac{1}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\eta, \quad \zeta'_2 = \frac{1}{2}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\eta.$$

Очевидно, що $\zeta'_2 > 0$, бо $\eta < 1$. Розглянемо тепер ζ'_1 . Ми бачимо, що $\zeta_1 > 0$, якщо $\eta \leq \frac{1}{3}$. При $\eta \leq \frac{2}{3}$ сума двох останніх доданків більша за $-\frac{1}{2} < 0$. Але перший додатний доданок більший за модуль цього числа. При $\eta < 1$ сума двох останніх доданків більша за -1 . Для першого доданка ми маємо при $\eta \geq \frac{2}{3}$ нерівності

$$(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} > 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} > 5, \quad \zeta'_1 > \frac{3}{2}.$$

Таким чином, $\zeta'_1 > 0$.

Наступний результат випливає з теореми про стійкість Лагранжа – Діріхле, бо потенціальна енергія має мінімум у стані рівноваги.

Теорема 2.1. *Якщо $\frac{e_0}{e'} < 2$, то лінійна система двох рівних негативних зарядів з потенціальною енергією (2.1) має стійку рівновагу $x^0 = (a, -a)$ з додатним числом a , визначеним співвідношенням (2.2). Умова нейтральності $2e' = e_0$ не виконується в цій рівновазі.*

Для застосування центральної теореми Ляпунова необхідно вилучити квадратичні резонанси в коренях ζ_j . Один резонанс відсутній: $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \neq k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, бо $\zeta_2 > \zeta_1$. Ми також маємо

$$\zeta_2 = \zeta_1 + 2u', \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = 1 + \frac{2}{\zeta'_1}.$$

Отже, для вилучення квадратичного резонансу для ζ_1 необхідно довести, що $\zeta'_1 > \frac{2}{3}$. Ми доведемо цю нерівність на кількох інтервалах, які накривають інтервал $\eta \in [0, 1)$:

$$\begin{aligned} \eta &\geq \frac{2}{3}, \quad \zeta'_1 > \frac{3}{2}, \quad \eta = 0, \quad \zeta'_1 = 1, \\ \frac{1}{2} &\leq \eta \leq \frac{2}{3}, \quad \zeta'_1 \geq \sqrt{2} - \frac{1}{2} > 1,4 - 0,5 = 0,9 > \frac{2}{3}, \\ \eta &= \frac{1}{2}, \quad \zeta'_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{4} > 1 > \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\frac{3}{7} \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \quad \zeta'_1 \geq 2^{-1} \left(\frac{7}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} = 2^{-1} \frac{\sqrt{343}}{8} - \frac{1}{4} > 2^{-1} \frac{18}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} > \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{3} \leq \eta \leq \frac{3}{7}, \quad \zeta'_1 \geq 2^{-1} \left(\frac{27}{8} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{7} > 2^{-1} \frac{5}{3} - \frac{1}{7} = \frac{29}{42} > \frac{2}{3},$$

$$\eta = \frac{1}{3}, \quad \zeta'_1 = 2^{-1} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-1} \left(\frac{27}{8} \right)^{\frac{1}{2}} > 2^{-1} \left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} > \frac{2}{3},$$

$$\eta = \frac{1}{4}, \quad \zeta'_1 = 2^{-1} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} = 2^{-1} \frac{8}{\sqrt{27}} + \frac{1}{8} > 2^{-1} \frac{8}{\sqrt{36}} + \frac{1}{8} = \frac{2}{3} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{4} \leq \eta \leq \frac{1}{3}, \quad \zeta'_1 \geq 2^{-1} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} \geq 2^{-1} \frac{8}{\sqrt{27}} > 2^{-1} \frac{8}{\sqrt{36}} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{5} \leq \eta \leq \frac{1}{4}, \quad \zeta'_1 \geq 2^{-1} \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} = 2^{-1} \frac{\sqrt{125}}{8} + \frac{1}{8} > \frac{11}{16} + \frac{1}{8} = \frac{13}{16} > \frac{2}{3},$$

$$\eta \leq \frac{1}{5}, \quad \zeta'_1 \geq 2^{-1} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} > \frac{2}{3}.$$

Отже, $\zeta'_1 > \frac{2}{3}$.

Порядок зарядів на прямій зберігається завдяки необмеженому відштовхуванню між ними, і тому ми можемо замінити потенціал $|x_j - x_k|^{-1}$ на дійсно аналітичну функцію $(x_j - x_k)^{-1}$ в околі рівноваги.

З центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 2.2. Нехай $\frac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$. Тоді рівняння руху Кулона (1.1) для $d = 1$, $N = 2$, $m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (2.1) має два періодичні розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного відмінного параметра c_j при $j = 1, 2$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1)$, $\tau_2(c_2)$ є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля та $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m} (\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

3. Площинна динаміка. У цьому пункті ми розглядаємо динаміку на площині двох однакових від'ємних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника b_j , $1 \leq j \leq 4$, $b_j = (b_j^1, b_j^2) \in \mathbb{R}^2$ зі сторонами $2a$, $2b$, який симетрично розташований на площині відносно двох координатних осей, тобто

$$b_1 = (a, b), \quad b_2 = (a, -b), \quad b_3 = (-a, b), \quad b_4 = (-a, -b).$$

Потенціальна енергія динаміки визначається таким чином:

$$U(x_{(2)}) = e_0^2 |x_1 - x_2|^{-1} - e_0 e' \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^4 |x_j - b_k|^{-1}, \quad x_j = (x_j^1, x_j^2) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

де

$$|x|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2.$$

Частинні похідні потенціальної енергії визначено так:

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} U(x_{(2)}) = -e_0^2 \frac{x_1^\alpha - x_2^\alpha}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^4 \frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_1 - b_k|^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2^\beta} U(x_{(2)}) = -e_0^2 \frac{x_2^\beta - x_1^\beta}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^4 \frac{x_2^\beta - b_k^\beta}{|x_2 - b_k|^\beta}.$$

Рівновагу x_1^0, x_2^0 знаходимо, прирівнюючи до нуля праві частини цих рівностей при умові $x_1^{01} = a, x_2^{01} = -a, x_1^{02} = x_2^{02} = 0$. З першої рівності маємо

$$\sum_{k=1}^4 \frac{x_1^{01} - b_k^1}{|x_1^0 - b_k|^3} = \frac{4a}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3},$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{x_1^{02} - b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^4 \frac{b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0.$$

При цьому ми скористались рівностями

$$|x_1^0 - b_1|^2 = |x_1^0 - b_2|^2 = b^2, \quad |x_1^0 - b_3|^2 = |x_1^0 - b_4|^2 = (2a)^2 + b^2,$$

$$|x_2^0 - b_1|^2 = |x_2^0 - b_2|^2 = (2a)^2 + b^2, \quad |x_2^0 - b_3|^2 = |x_2^0 - b_4|^2 = b^2.$$

Це приводить до рівноважного співвідношення з попереднього пункту, якщо врахувати, що $x_1^{01} - x_2^{01} = 2a$:

$$\frac{e_0}{(2a)^3} = \frac{2e'}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^3}.$$

Такий же результат отримуємо з виразу частинної похідної U по x_2 .

Другі частинні похідні потенціальної енергії (3.1) мають вигляд

$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} = \frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_2^\beta \partial x_1^\alpha} = e_0^2 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_1 - x_2|^3} - 3 \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{|x_1 - x_2|^5} \right], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$\frac{\partial^2 U(x_{(2)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} = -\frac{e_0^2 \delta_{\alpha,\beta}}{|x_1 - x_2|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^4 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - b_k|^3} - 3 \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5} \right] +$$

$$+ 3e_0^2 \frac{(x_1^\alpha - x_2^\alpha)(x_1^\beta - x_2^\beta)}{|x_1 - x_2|^5}.$$

Знайдемо рівноважні значення усіх доданків у цих виразах. Нехай η, u' є такими, як і у попередньому пункті. Тоді, використовуючи рівності (2.3), отримуємо

$$e_0 e' \sum_{k=1}^4 \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j^0 - b_k|^\beta} = \delta_{\alpha,\beta} 2e_0 e' \left(b^{-3} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = \delta_{\alpha,\beta} \left[\frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{u'}{2} \right]. \quad (3.2)$$

Нехай

$$T_j(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^4 \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}.$$

Нехай також $T_j^0(\alpha, \beta)$ є рівноважним значенням $T_j(\alpha, \beta)$. Тепер ми доведемо рівність

$$T_j^0(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha, \beta} \left[8a^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \delta_{\alpha, 1} + 2b^2 \left(b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \right) \delta_{\alpha, 2} \right] \quad (3.3)$$

за допомогою рівностей

$$\begin{aligned} T_1^0(1, 2) &= - \left[b^{-5} ((a - b_1^1) b_1^2 + (a - b_2^1) b_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} ((a - b_3^1) b_3^2 + (a - b_4^1) b_4^2) \right] = 0, \\ T_2^0(1, 2) &= - \left[((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} ((-a - b_1^1) b_1^2 + ((-a - b_2^1) b_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + b^{-5} (-a - b_3^1) b_3^2 + (-a - b_4^1) b_4^2) \right] = 0, \\ T_1^0(1, 1) &= b^{-5} \left[(a - b_1^1)^2 + (a - b_2^1)^2 \right] + \\ &\quad + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \left[(a - b_3^1)^2 + (a - b_4^1)^2 \right] = 8a^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ T_2^0(1, 1) &= ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \left[(-a - b_1^1)^2 + (-a - b_2^1)^2 \right] + \\ &\quad + b^{-3} \left[(-a - b_3^1)^2 + (-a - b_4^1)^2 \right] = 8a^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}, \\ T_j^0(2, 2) &= \sum_{k=1}^4 \frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0 - b_k|^5}, \quad T_1^0(2, 2) = T_2^0(2, 2) = 2b^2 \left[b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, (3.3) доведено. В результаті, використовуючи (3.2), (3.3), отримуємо

$$\begin{aligned} U_{1, \alpha; 1, \beta}^0 &= U_{2, \alpha; 2, \beta}^0 = \delta_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} - 6e_0 e' \left[4a^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \delta_{\alpha, 1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b^2 \left(b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} \right) \delta_{\alpha, 2} \right] + 3 \frac{e_0^2}{(2a)^3} \delta_{\alpha, 1} \right\} = \\ &= \delta_{\alpha, \beta} (v' - \delta_{\alpha, 1} u'_* - \delta_{\alpha, 2} u''_*), \quad v' = \frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Перший та останній доданки утворені відповідно першими двома та останнім доданками у виразі для $\frac{\partial^2 U(x_{(2)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha}$. Легко бачити, що

$$U_{1, \alpha; 2, \beta}^0 = U_{2, \alpha; 1, \beta}^0 = \frac{u'}{2} \delta_{\alpha, \beta} (1 - 3\delta_{\alpha, 1}).$$

З рівноважного співвідношення, (2.2) та рівностей (2.3) одержуємо

$$u'_* + \frac{3e_0^2}{(2a)^3} = 6e_0 e' (2a)^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0 e' (2a)^2 \left(\frac{e_0}{2e'} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{2a} \right)^5 = \frac{3u'}{2} \eta,$$

$$6e_0e'b^{-3} = \frac{3u'}{2} (1-\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$6e_0e'b^2 ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0e'(2a)^2(1-\eta)\eta^{-1} \left(\frac{e_0}{2e'}\right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1}{2a}\right)^5 = \frac{3u'}{2} (1-\eta).$$

Ці рівності показують, що

$$u'_* = \frac{3u'}{2} \eta - \frac{3u'}{2}, \quad u''_* = \frac{3u'}{2} \left[1 - \eta + (1-\eta)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

Матрицю U^0 можна виразити за допомогою двох двовимірних матриць U_s^0 , $s = 1, 2$, за правилом

$$U_{j,\alpha;k,\beta}^0 = \delta_{\alpha,\beta} U_{\alpha;j,k}^0, \quad (3.4)$$

якщо перенумерувати індекси координат за правилом

$$(1, 1) = 1, \quad (2, 1) = 2, \quad (1, 2) = 3, \quad (2, 2) = 4, \quad (3.5)$$

де перший та другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми та верхніми індексами координат. Таким чином,

$$U^0 = U_1^0 \oplus U_2^0.$$

Елементи симетричних матриць U_1^0 , U_2^0 мають вигляд

$$U_{1;1,1}^0 = U_{1,1;1,1}^0 = U_{1;2,2}^0 = U_{2,1;2,1}^0 = v' - u'_*,$$

$$U_{2;1,1}^0 = U_{1,2;1,2}^0 = U_{2;2,2}^0 = U_{2,2;2,2}^0 = v' - u''_*,$$

$$U_{1;1,2}^0 = U_{1,1;2,1}^0 = -u', \quad U_{2;1,2}^0 = U_{1,2;2,2}^0 = \frac{u'}{2}.$$

Отже, матрицю U^0 можна записати у вигляді

$$U^0 = \begin{pmatrix} v' - u'_* & -u' \\ -u' & v' - u'_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' - u''_* & \frac{u'}{2} \\ \frac{u'}{2} & v' - u''_* \end{pmatrix}.$$

Характеристичний поліном U^0 визначається так:

$$p(\lambda) = \text{Det}(U^0 - \lambda I) = \left((v' - u'_* - \lambda)^2 - u'^2\right) \left((v' - u''_* - \lambda)^2 - \frac{u'^2}{4}\right) =$$

$$= (v' - u'_* - \lambda - u') (v' - u'_* - \lambda + u') \left(v' - u''_* - \lambda - \frac{u'}{2}\right) \left(v' - u''_* - \lambda + \frac{u'}{2}\right).$$

Його чотири корені ζ_j мають вигляд

$$\zeta_1 = v' - u'_* - u' = \frac{u'}{2} (1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3u'}{2} \eta + \frac{u'}{2},$$

$$\zeta_2 = v' - u'_* + u' = \frac{u'}{2} (1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - u'_* + u' = \frac{u'}{2} (1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3u'}{2} \eta + \frac{5u'}{2},$$

$$\zeta_3 = v' - u''_* - \frac{u'}{2} = \frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3u'}{2} \left(1 - \eta + (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{u'}{2} = -u'(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3u'}{2} \eta - 2u',$$

$$\zeta_4 = v' - u''_* + \frac{u'}{2} = -u'(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3u'}{2} \eta - u'.$$

Очевидно, що корені ζ_1, ζ_2 є тими, що і в попередньому пункті, і при $0 < \eta < 1$

$$\zeta_4 < 0, \quad -\zeta_3 > -\zeta_4 > 0.$$

З центральної теореми Ляпунова випливає така теорема, яка є аналогом теореми 2.1.

Теорема 3.1. Нехай $\frac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$. Тоді рівняння руху Кулона (1.1) для $d = 2, N = 2, m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (3.1) має два періодичні розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного відмінного параметра c_j при $j = 1, 2$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \tau_2(c_2)$ є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля і $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m} (\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

4. Просторова динаміка. У цьому пункті ми розглядаємо динаміку у просторі $\mathbb{R}^3$ двох однакових від'ємних зарядів $-e_0 < 0$ в полі чотирьох однакових додатних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах прямокутника $b_j, 1 \leq j \leq 4, b_j = (b_j^1, b_j^2, 0) \in \mathbb{R}^3$, зі сторонами $2a, 2b$, який симетрично розташований на площині відносно двох перших координатних осей, тобто

$$b_1 = (a, b, 0), \quad b_2 = (a, -b, 0), \quad b_3 = (-a, b, 0), \quad b_4 = (-a, -b, 0).$$

Потенціальна енергія динаміки визначається таким чином:

$$U(x_{(2)}) = e_0^2 |x_1 - x_2|^{-1} - e_0 e' \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^4 |x_j - b_k|^{-1}, \quad x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

де

$$|x|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2 + (x_j^3)^2.$$

Легко бачити, що матриця U^0 других похідних потенціальної енергії в рівновазі на прямій, $x_1^{01} = a, x_2^{01} = -a, x_1^{0\alpha} = x_2^{0\alpha} = 0, \alpha = 2, 3$, як і у попередніх пунктах, має ті ж елементи, що і на площині:

$$U_{1,\alpha;1,\beta}^0 = U_{2,\alpha;2,\beta}^0 = \delta_{\alpha,\beta} (v' - \delta_{\alpha,1} u'_* - \delta_{\alpha,2} u''_*), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

$$U_{1,\alpha;2,\beta}^0 = U_{2,\alpha;1,\beta}^0 = \frac{u'}{2} \delta_{\alpha,\beta} (1 - 3\delta_{\alpha,1}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Матрицю U^0 можна виразити з допомогою трьох двовимірних матриць $U_s^0, s = 1, 2, 3$, за правилом

$$U_{j,\alpha;k,\beta}^0 = \delta_{\alpha,\beta} U_{\alpha;j,k}^0, \quad (4.2)$$

якщо перенумерувати індекси координат за правилом

$$(1, 1) = 1, \quad (2, 1) = 2, \quad (1, 2) = 3, \quad (2, 2) = 4, \quad (1, 3) = 5, \quad (2, 3) = 6, \quad (4.3)$$

де перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми і верхніми індексами координат. Таким чином,

$$U^0 = U_1^0 \oplus U_2^0 \oplus U_3^0.$$

Елементи двох перших матриць визначено у попередньому пункті. Третя матриця визначається своїми елементами так:

$$U_{3;1,1}^0 = U_{1,3;1,3}^0 = U_{3;2,2}^0 = U_{2,3;2,3}^0 = v',$$

$$U_{3;1,2}^0 = U_{1,3;2,3}^0 = U_{3;2,1}^0 = U_{2,3;1,3}^0 = \frac{u'}{2}.$$

Це означає, що

$$U_3^0 = \begin{pmatrix} v' & \frac{u'}{2} \\ \frac{u'}{2} & v' \end{pmatrix}, \quad v' = \frac{u'}{2} (1 - \eta)^{-\frac{3}{2}}.$$

В результаті

$$U^0 = \begin{pmatrix} v' - u'_* & -u' \\ -u' & v' - u'_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' - u''_* & \frac{u'}{2} \\ \frac{u'}{2} & v' - u''_* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v' & \frac{u'}{2} \\ \frac{u'}{2} & v' \end{pmatrix}.$$

Шість власних значень ζ_j , $1 \leq j \leq 6$, цієї матриці збігаються з ζ_j , $1 \leq j \leq 4$, з попереднього пункту та з $\zeta_5 = \zeta'_5 u' = v' - \frac{u'}{2} > 0$, $\zeta_6 = \zeta'_6 u' = v' + \frac{u'}{2} > 0$.

Резонансу по ζ_2 немає, бо $\zeta_2 > \zeta_l$, $l \neq 2$, $0 < \eta < 1$. Квадратичного резонансу немає по ζ_1 , бо

$$\zeta_6 = \zeta_1 + \frac{3\eta}{2} u', \quad \frac{\zeta_6}{\zeta_1} = 1 + \frac{3}{2\zeta'_1} \eta < 1 + \frac{9}{4} < 4, \quad \zeta'_1 > \frac{2}{3},$$

$$\zeta_5 = \zeta_1 + \frac{3\eta}{2} u' - u', \quad \frac{\zeta_5}{\zeta_1} < \frac{\zeta_6}{\zeta_1} < 4.$$

Крім того, $\zeta'_1 \neq \zeta'_5$, якщо $\eta \neq \frac{2}{3}$. Квадратичного резонансу немає і по ζ_6 , бо

$$\zeta'_6 > 1, \quad \zeta_1 = \zeta_6 - \frac{3\eta}{2} u', \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_6} < 1,$$

$$\zeta_2 = \zeta_6 + 2u' - \frac{3\eta}{2} u', \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_6} < 1 + 2 < 3.$$

Справджуються також рівності

$$\zeta_1 = \zeta_5 + u' - \frac{3\eta}{2} u', \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_5} < 1 + \frac{1}{\zeta'_5},$$

$$\zeta_2 = \zeta_5 + 3u' - \frac{3\eta}{2} u', \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_5} < 1 + \frac{3}{\zeta'_5}.$$

З цих нерівностей і $\eta \geq \frac{2}{3}$ отримуємо

$$\zeta'_5 > 2, \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_5} < 1 + \frac{3}{\zeta'_5} < 1 + \frac{3}{2}, \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_5} < \frac{3}{2}, \quad \frac{\zeta_6}{\zeta_5} = 1 + \frac{1}{\zeta'_5} < \frac{3}{2}.$$

Таким чином, ми довели наступне твердження.

Твердження 4.1. Якщо $0 < \eta < 1$, то немає квадратичного резонансу по ζ_j , $j = 2, 6$.
Якщо додатково $\eta \neq \frac{2}{3}$ чи $\eta > \frac{2}{3}$, то квадратичного резонансу немає по ζ_1 чи ζ_1 та ζ_5 .

З цього твердження та центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 4.1. Нехай $\frac{e_0}{2e'} = \eta^{\frac{3}{2}} < 1$ та виконуються одна з трьох умов $\eta = \frac{2}{3}$, $\eta < \frac{2}{3}$ чи $\eta > \frac{2}{3}$. Тоді рівняння руху Кулона (1.1) для $d = 3$, $N = 2$, $m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (4.1) має два, три та чотири періодичні розв'язки, кожен з яких залежить від відповідного дійсного відмінного параметра c_j , $j = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ та $j = 1, 2, 3, 4$. Ці розв'язки та їхні періоди τ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, є дійсно аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля та $\tau_1(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_2})^{-1}$, $\tau_2(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_6})^{-1}$, $\tau_3(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_1})^{-1}$, $\tau_4(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_5})^{-1}$.

Література

1. W. Skrypnik, *Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line*, Ukr. Math. J., **66**, № 5, 668–682 (2014).
2. В. Скрипник, *Кулонівська динаміка двох та трьох рівних від'ємних зарядів на площині у полі фіксованих двох рівних додатних зарядів*, Укр. мат. журн., **68**, № 11, 1528–1539 (2016).
3. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics near equilibrium of two equal negative charges in the field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1273–1285 (2016).
4. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics of three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, J. Geom. and Phys., **127**, 101–111 (2018).
5. A. Lyapunov, *General problem of stability of motion*, Moscow (1950); English translation: Internat. J. Control, **55**, № 3, 521–790 (1992).
6. M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Lect. Nonlinear Problems in Math. Analysis, Acad. Press, New York etc. (1977).
7. J. Marsden, M. Mc. Cracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York (1976).
8. C. Siegel, J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
9. В. Немыцкий, В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Москва, Ленинград (1947).
10. W. Skrypnik, *Coulomb planar periodic motion of n equal charges in the field of n equal positive charges fixed at a line and constant magnetic field*, Adv. Math. Phys., **2018**, Article ID 2548074, (2018), 10 p. <https://doi.org/10.1155/2548074>.
11. C. Siegel, *Über die normalformen analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys. K1, IIa, 21–30 (1952).
12. W. Skrypnik, *Mechanical systems with singular equilibrium and Coulomb dynamics of three charges*, Ukr. Math. J., **70**, № 4, 519–533 (2018).
13. G. A. Hagedorn, *A time dependent Born–Oppenheimer approximation*, Commun. Math. Phys., **77**, 1–19 (1980).

Одержано 24.02.19