

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКосИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА

We consider the problem of existence of the solution of weakly nonlinear boundary-value problem for the Hammerstein-type integral equation with unbounded kernel, which turns, for $\varepsilon = 0$, into one of solutions of the generating problem. The necessary and sufficient conditions for the existence of this solution are obtained and the iterative procedure for its construction is proposed.

Розглянуто питання існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з необмеженим ядром, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої задачі. Отримано необхідну та достатню умови існування такого розв'язку та запропоновано ітераційну схему його побудови.

Різні типи інтегральних рівнянь та крайові задачі для них є зручними засобами для опису широкого кола процесів у фізиці, хімії, біології, економіці тощо. Зокрема, інтегральні рівняння із слабкосингулярними ядрами, які ще мають назву рівнянь зі слабкою особливістю або рівнянь з полярним ядром, знаходять застосування при дослідженні полімерних ланцюжків, суперплинності, абсорбції газів [1–3]. Відмітимо також тісний зв'язок таких рівнянь із інтегро-диференціальним численням дробового порядку, що бурхливо розвивається в останні десятиліття [4, 5]. Вивченню різних аспектів теорії слабкосингулярних інтегральних рівнянь, як лінійних, так і нелінійних, присвячено низку, зокрема недавніх, робіт [6–13]. Окремим напрямком дослідження таких рівнянь є відшукування умов існування та вивчення структури множини їх розв'язків. У статті [14] встановлено умови існування і структуру розв'язків нетерових крайових задач для таких рівнянь, а у [15] отримано умови біфуркації розв'язків збуреної лінійної крайової задачі для слабкосингулярного інтегрального рівняння за припущення, що породжуюча задача є нерозв'язною. Отримані результати застосовано при дослідженні нетерової крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з дробовою похідною Капуто [16]. У цій роботі, продовжуючи зазначені вище дослідження, ми висвітлюємо один із можливих підходів до відшукування необхідних та достатніх умов розв'язності крайових задач для слабкосингулярних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна та пропонуємо алгоритм відшукування їх розв'язків.

1. Постановка задачі. Розглянемо слабконелінійну крайову задачу для інтегрального рівняння типу Гаммерштейна у просторі $L_2[a, b]$

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b \bar{K}(t, s)Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds, \quad (1)$$

$$lx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (2)$$

де $K(t, s) = \frac{H(t, s)}{|t - s|^\gamma}$, $\bar{K}(t, s) = \frac{\bar{H}(t, s)}{|t - s|^\beta}$, $H(t, s)$, $\bar{H}(t, s)$ — обмежені в області $[a, b] \times [a, b]$ функції, $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta < 1$, неоднорідність $f \in L_2[a, b]$, $l = \text{col}(l_1, l_2, \dots, l_p)$:

¹ Відповідальний за листування, e-mail: feruk.viktor@gmail.com.

$L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — обмежений лінійний векторний функціонал, $l_\nu: L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = \overline{1, p}$, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті функція, така що $Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq \mu]$, $Z(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $Z(x(t, \cdot), t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $J(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежений p -вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку, μ, ε_0 — достатньо малі константи, $\varepsilon \ll 1$ — малий параметр.

Досліджується питання знаходження необхідних та достатніх умов існування розв'язку $x(t, \varepsilon)$, $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, крайової задачі (1), (2), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t, c_r)$ породжуючої крайової задачі

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)x(s)ds = f(t), \quad lx(\cdot) = \alpha. \quad (3)$$

Розв'язок $x_0(t, c_r)$ називатимемо породжуючим розв'язком крайової задачі (1), (2).

2. Зведення інтегрального рівняння (1) до інтегрального рівняння, ядра якого є сумовними з квадратом. У [14] показано, що крайову задачу для інтегрального рівняння з необмеженим ядром (3) можна звести до крайової задачі для інтегрального рівняння Фредгольма. У роботі [15], розвиваючи описану в [14] методику, отримано аналогічний результат для збуреної лінійної крайової задачі. Покажемо, використовуючи [14, 15], що дослідження питання існування розв'язку задачі (1), (2), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків породжуючої крайової задачі (3), зводиться до дослідження відповідного питання для слабконелінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гаммерштейна із сумовними з квадратом ядрами. Такий підхід дозволяє використати при дослідженні крайової задачі (1), (2) методи теорії лінійних операторних рівнянь з нормально розв'язним оператором та слабконелінійних операторних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [17–21], застосовані у роботах [22, 23] до крайових задач для інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна із сумовними з квадратом ядрами.

Для обґрунтування згаданого вище переходу наведемо деякі факти з теорії слабкосингулярних інтегральних операторів. Відомо [24, с. 92], що якщо дано два інтегральних оператори H_1 і H_2 із слабкосингулярними ядрами $\frac{H_1(t, s)}{|t - s|^{\gamma_1}}$, $\frac{H_2(t, s)}{|t - s|^{\gamma_2}}$ з показниками γ_1 і γ_2 відповідно, то добуток $H_1 H_2$ цих операторів має ядро вигляду

$$F(t, s) = \int_a^b \frac{H_1(t, \xi)H_2(\xi, s)}{|t - \xi|^{\gamma_1}|\xi - s|^{\gamma_2}} d\xi, \quad (4)$$

яке буде такої ж структури і має своїм показником число не більше ніж $\gamma_1 + \gamma_2 - 1$. За умови $\gamma_1 + \gamma_2 - 1 < 1/2$ ядро $F(t, s)$ буде сумовним з квадратом, а при $\gamma_1 + \gamma_2 - 1 < 0$ — обмеженим.

Розглянемо інтегральні оператори

$$(Kw)(t) = \int_a^b K(t, s)w(s)ds, \quad (\overline{K}w)(t) = \int_a^b \overline{K}(t, s)w(s)ds$$

із необмеженими ядрами $K(t, s) = \frac{H(t, s)}{|t - s|^\gamma}$, $\overline{K}(t, s) = \frac{\overline{H}(t, s)}{|t - s|^\beta}$ та ітеровані ядра $K_n(t, s)$, $M_n(t, s)$, $n \in \mathbb{N}$, що визначаються за допомогою рекурентних формул

$$K_n(t, s) = \int_a^b K(t, \xi) K_{n-1}(\xi, s) d\xi, \quad M_n(t, s) = \int_a^b K(t, \xi) M_{n-1}(\xi, s) d\xi,$$

$$K_1(t, s) = K(t, s), \quad M_1(t, s) = \bar{K}(t, s).$$

Згідно з (4), як показано в [15], ітеровані ядра $K_n(t, s)$, $M_n(t, s)$ мають таку ж структуру, як і слабкосингулярні ядра $K(t, s)$, $\bar{K}(t, s)$, а їхні показники не перевищують чисел $n\gamma + 1 - n$ і $(n-1)\gamma + \beta + 1 - n$ відповідно, які є від'ємними при достатньо великому n . Тому [24, с. 95] при всіх n , для яких виконуються умови

$$n > \frac{1}{2(1-\gamma)}, \quad n > \frac{1+2\beta-2\gamma}{2(1-\gamma)}, \quad (5)$$

ядра $K_n(t, s)$, $M_n(t, s)$ будуть сумовними з квадратом, а при

$$n > \frac{1}{1-\gamma}, \quad n > \frac{1+\beta-\gamma}{1-\gamma} \quad (6)$$

— обмеженими.

Згідно з [24, с. 95], рівняння (1) можна звести до рівняння з інтегральними операторами, ядра яких є сумовними з квадратом. Справді, домножаючи обидві частини рівняння (1) зліва на $K(t, s)$ й інтегруючи ліву та праву частини отриманої рівності на відрізок $[a, b]$, отримуємо

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds - \int_a^b K_2(t, s)x(s)ds = \int_a^b K(t, s)f(s)ds + \varepsilon \int_a^b M_2(t, s)Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds.$$

Продовжуючи цей процес далі, на n -му кроці одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} \int_a^b K_{n-1}(t, s)x(s)ds - \int_a^b K_n(t, s)x(s)ds \\ = \int_a^b K_{n-1}(t, s)f(s)ds + \varepsilon \int_a^b M_n(t, s)Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds. \end{aligned}$$

Додаючи почленно всі отримані рівняння з рівнянням (1), бачимо, що функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$x(t) - \int_a^b K_n(t, s)x(s)ds = f_n(t) + \varepsilon \int_a^b L_n(t, s)Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)ds, \quad (7)$$

$$f_n(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b K_i(t, s)f(s)ds, \quad L_n(t, s) = \sum_{i=1}^n M_i(t, s). \quad (8)$$

Згідно з першою умовою з (5), за скінченну кількість кроків приходимо до рівняння (7) із сумовним з квадратом ядром $K_n(t, s)$. Наведемо умови, за яких ядро $L_n(t, s)$ також буде

сумовним з квадратом. Враховуючи (5), (8) та те, що ядро $\overline{K}(t, s)$ сумовне з квадратом при $\beta < 1/2$ [24, с. 90], отримуємо n умов

$$\beta < \frac{1}{2}, \quad \beta + \gamma - 1 < \frac{1}{2}, \quad \beta + 2\gamma - 2 < \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \beta + (n-1)\gamma - (n-1) < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Однак, аналізуючи умови $\beta + i\gamma - i < 1/2$, $i = \overline{1, n-1}$, бачимо, що вони є зайвими. Справді, згідно з нашою постановкою задачі та першою з умов (9), показники ядер $K(t, s)$, $\overline{K}(t, s)$ задовольняють співвідношення $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta < 1/2$. Помножуючи обидві частини нерівності $0 < \gamma < 1$ на $i = \overline{1, n-1}$ і додаючи почленно отримані нерівності до нерівності $0 < \beta < 1/2$, бачимо, що всі умови (9), крім першої, є зайвими. Отже, для того щоб ядра $K_n(t, s)$ і $L_n(t, s)$ були сумовними з квадратом, достатньо виконання лише двох умов

$$n > \frac{1}{2(1-\gamma)}, \quad \beta < \frac{1}{2},$$

перша з яких задовольняється в результаті скінченної кількості ітерацій n , а друга від n не залежить. Очевидно, що довільний розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (7). Обернене твердження, взагалі кажучи, є хибним. Проте можна вибрати число n так, щоб виконувалася перша з умов (6), а отже і перша з умов (5), і щоб довільний розв'язок рівняння (7) був розв'язком рівняння (1), тобто щоб рівняння (1) та (7) були еквівалентними. Далі будемо вважати, що число n вибрано саме таким чином. Зауважимо, що доведення еквівалентності рівнянь (1) і (7), наведене в [24, с. 98] для лінійного випадку ($\varepsilon = 0$), якщо розглядати формально праву частину рівняння (1) як довільну неоднорідність, повністю переноситься на розглянутий у цій роботі нелінійний випадок ($\varepsilon \neq 0$). Зафіксувавши n , ми можемо перейти від вивчення крайової задачі (1), (2) для інтегрального рівняння Гаммерштейна із слабкосингулярними ядрами до вивчення крайової задачі (7), (2) для інтегрального рівняння Гаммерштейна, ядра якого є сумовними з квадратом.

3. Зв'язок задачі (7), (2) із зліченновимірною системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Зведемо задачу (7), (2), використавши [22, 23], до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$. Вводячи позначення

$$\begin{aligned} x_i(\varepsilon) &= \int_a^b x(t, \varepsilon) \varphi_i(t) dt, & f_i &= \int_a^b f_n(t) \varphi_i(t) dt, \\ a_{ij} &= \int_a^b \int_a^b K_n(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds, & \tilde{a}_{ij} &= \int_a^b \int_a^b L_n(t, s) \varphi_i(t) \varphi_j(s) dt ds, \\ m_i(\varepsilon) &= \int_a^b Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \varphi_i(t) dt, & h_\nu(\varepsilon) &= J_\nu(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \nu = \overline{1, p}, \end{aligned}$$

від задачі (7), (2) приходимо до зліченновимірної системи слабконелінійних рівнянь, яку можна записати у вигляді операторного рівняння у просторі ℓ_2 :

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon) \\ H(z(\varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} = q + \varepsilon D(z(\varepsilon), \varepsilon), \quad (10)$$

де матриці Λ , Λ_1 , W , вектор-стовпчики z та g визначаються формулами

$$z(\varepsilon) = \text{col}(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \dots, x_i(\varepsilon), \dots), \quad g = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_i, \dots),$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1 - a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$W := l\Phi(\cdot), \quad \Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots),$$

$$V(z(\varepsilon), \varepsilon) = \text{col}(m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon), \dots, m_i(\varepsilon), \dots),$$

$$V(\cdot, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \leq \mu], \quad V(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

$$H(z(\varepsilon), \varepsilon) = \text{col}(h_1(\varepsilon), h_2(\varepsilon), \dots, h_\nu(\varepsilon), \dots, h_p(\varepsilon)),$$

$$H(\cdot, \varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \leq \mu], \quad H(z(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0].$$

Породжуюче рівняння для рівняння (10) має вигляд

$$Uz = q, \quad (11)$$

і для нього справедливим є наступний критерій розв'язності [18, 19].

Теорема 1. Однорідне рівняння (11) ($q = 0$) має d_2 -параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$:

$$z(c_{d_2}) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідне рівняння (11) є розв'язним тоді й лише тоді, коли виконуються $r + d_1$ лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*} (\alpha - W\Lambda^+ g) = 0, \quad (12)$$

і має d_2 -параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$ вигляду

$$z(c_{d_2}) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \quad (13)$$

Тут $Q = WP_{\Lambda_r}$, $P_{\Lambda_r} (P_{\Lambda_r}^*)$ — матриця, яка складається з повної системи r лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці-проектора $P_{\Lambda} (P_{\Lambda}^*)$, де $P_{\Lambda} (P_{\Lambda}^*)$ — проектор на ядро (коядро) матриці Λ , $P_{Q_{d_2}} (P_{Q_{d_1}^*})$ — матриця, яка складається з повної системи d_2 (d_1) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці-проектора $P_Q (P_{Q^*})$, де $P_Q (P_{Q^*})$ — проектор на ядро (коядро) матриці Q , $\Lambda^+ (Q^+)$ — псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до $\Lambda (Q)$ матриця.

4. Необхідна умова існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Сформулюємо необхідні умови існування розв'язку $z(\varepsilon)$ рівняння (10), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $z(c_{d_2}^0)$. Рівняння (10) є розв'язним тоді й лише тоді, коли виконуються $r + d_1$ лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r^*} (g + \varepsilon \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon)) = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*} (\alpha + \varepsilon H(z(\varepsilon), \varepsilon) - W\Lambda^+ (g + \varepsilon \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon))) = 0.$$

Оскільки породжуюче рівняння (11) має розв'язок, то згідно з умовами (12) отримаємо

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*} (H(z(\varepsilon), \varepsilon) - W \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \quad (14)$$

Врахувавши, що $z(\varepsilon) \rightarrow z(c_{d_2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ та використавши умови, накладені на нелінійні функції $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$ і $H(z(\varepsilon), \varepsilon)$, перейдемо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ у рівностях (14) і отримаємо необхідні умови існування розв'язку операторного рівняння (10):

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(c_{d_2}), 0) = 0, \quad P_{Q_{d_1}^*} (H(z(c_{d_2}), 0) - W \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_{d_2}), 0)) = 0. \quad (15)$$

Отже, якщо система рівнянь (15) має корінь $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, то цей корінь $c_{d_2}^0$ визначає той породжуючий розв'язок $z(c_{d_2}^0)$, якому може відповідати розв'язок $z(\varepsilon)$ рівняння (10). Якщо ж система рівнянь (15) не має розв'язків, то і рівняння (10) не матиме шуканого розв'язку. Зазначимо, що мова йде про дійсні розв'язки системи рівнянь (15), оскільки ми розглядаємо нашу задачу в дійсній площині. В класичній теорії диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, як відомо, константа $c_{d_2}^0$ має фізичний зміст, тобто є амплітудою породжуючого розв'язку, а відповідні рівняння вигляду (15) називаються рівняннями для породжуючих амплітуд. Тому, як і в теорії крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, систему рівнянь (15) будемо називати системою рівнянь для породжуючих констант $c_{d_2}^0$ розглядуваного слабконелінійного рівняння (10).

Теорема 2. Нехай слабконелінійне рівняння (10) має розв'язок $z(\varepsilon) \in \ell_2$, $z(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (13) з константою $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Тоді константа $c_{d_2}^0$ обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (15).

Спираючись на результати для операторного рівняння (10), сформулюємо необхідну умову існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Використаємо підхід, застосований у роботах [22, 23]. Згідно з цим підходом, якщо рівняння (10) має хоча б один розв'язок $z(\varepsilon)$, то за теоремою Ріса – Фішера існує елемент $x(t, \varepsilon)$ такий, що $x_i(\varepsilon)$ є його коефіцієнтами Фур'є і

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\varepsilon) \varphi_i(t) = \Phi(t) z(\varepsilon). \quad (16)$$

Множина елементів $x(t, \varepsilon)$, які визначаються співвідношенням (16), і є шуканою множиною розв'язків вихідної крайової задачі (1), (2). Отже, справедливим є таке твердження.

Теорема 3. Нехай слабконелінійна крайова задача (1), (2) має розв'язок $x(t, \varepsilon)$, $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок $x_0(t, c_{d_2})$:

$$x_0(t, c_{d_2}) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + \Phi(t) P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W \Lambda^+ g) + \Phi(t) \Lambda^+ g \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2} \quad (17)$$

з константою $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Тоді константа $c_{d_2}^0$ обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (15).

Необхідна умова не забезпечує існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Тому важливим завданням є відшукування умов, при яких розв'язок поставленої задачі гарантовано буде існувати, а також розробка конструктивних алгоритмів побудови таких розв'язків.

5. Достатня умова існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Для того щоб знайти достатню умову існування розв'язку крайової задачі для інтегрального рівняння типу Гаммерштейна (1), (2), сформулюємо спочатку достатню умову існування розв'язку слабконелінійного операторного рівняння (10). Для цього у рівнянні (10) виконаємо заміну змінних

$$z(\varepsilon) = z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon),$$

де $z(c_{d_2}^0)$ — породжуючий розв'язок, $c_{d_2}^0$ — дійсний корінь системи (15).

У нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y(\varepsilon) \in \ell_2$, $y(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, $y(0) = 0$, операторного рівняння

$$Uy(\varepsilon) = \varepsilon D(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon). \quad (18)$$

Використовуючи неперервну диференційовність функцій $V(z(\varepsilon), \varepsilon)$ і $H(z(\varepsilon), \varepsilon)$ по z в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε функцій $V(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)$ та $H(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)$. Має місце розклад

$$\begin{aligned} D(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 \left(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1 y(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon) \right) \\ H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1 y(\varepsilon) + R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix} \\ &= D(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_2 y(\varepsilon) + R(y(\varepsilon), \varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$D(z_0(c_{d_2}^0), 0) \in \ell_2, \quad A_1 = \left. \frac{\partial V(z, 0)}{\partial z} \right|_{z=z(c_{d_2}^0)}, \quad l_1 = \left. \frac{\partial H(z, 0)}{\partial z} \right|_{z=z(c_{d_2}^0)}, \quad R_i(y(\varepsilon), \varepsilon) \in \ell_2,$$

$$R_i(\cdot, \varepsilon) \in C^1(\|y\| \leq \mu), \quad R_i(y(\cdot), \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad R_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial R_i(0, 0)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким чином, розглядаючи праву частину рівняння (18) як неоднорідність, згідно з теоремою 1, отримуємо, що рівняння (18) має розв'язок

$$y(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + \bar{y}(\varepsilon) \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(\varepsilon) &= \varepsilon (P_{\Lambda_r} Q^+ (H(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad - W \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)) + \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)). \end{aligned}$$

Умови розв'язності рівняння (18) наберуть вигляду

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 V(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (21)$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (H(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon) - W \Lambda^+ \Lambda_1 V(z(c_{d_2}^0) + y(\varepsilon), \varepsilon)) = 0. \quad (22)$$

Підставимо у рівності (21), (22) розклад (19):

$$P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 (V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1 y(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon)) = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}^*} \left(H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1 y(\varepsilon) + R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - W\Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1 y(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon)) \right) = 0.$$

Враховуючи систему рівнянь для породжуючих констант (15) і розв'язок (20), отримуємо

$$Bc_{d_2} = Gb, \quad (23)$$

де матриця B і неоднорідності G , b мають вигляд

$$B := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*} (l_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1 A_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix}, \quad G := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1, & P_{Q_{d_1}^*} \end{bmatrix}, \\ b := \begin{bmatrix} -(A_1 \bar{y}(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon)) \\ W\Lambda^+ \Lambda_1 (A_1 \bar{y}(\varepsilon) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon)) - (l_1 \bar{y}(\varepsilon) + R_2(y(\varepsilon), \varepsilon)) \end{bmatrix}.$$

Алгебраїчна система (23) розв'язна тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{B^*} Gb = 0. \quad (24)$$

Якщо

$$P_{B^*} G = 0, \quad (25)$$

то рівність (24) завжди виконується і система (23) має розв'язок, а за умови

$$P_B = 0 \quad (26)$$

цей розв'язок буде єдиним.

Отже, для знаходження розв'язку рівняння (18) за умов (25), (26) приходимо до системи операторних рівнянь

$$y(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon), \\ c_{d_2}(\varepsilon) = B^+ Gb, \\ \bar{y}(\varepsilon) = \varepsilon (P_{\Lambda_r} Q^+ (H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1 (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) \\ + R_2(y(\varepsilon), \varepsilon) - W\Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) + \bar{y}(\varepsilon)) \\ + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))) + \Lambda^+ \Lambda_1 (V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1 (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}(\varepsilon) \\ + \bar{y}(\varepsilon)) + R_1(y(\varepsilon), \varepsilon))), \quad c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \quad (27)$$

Система операторних рівнянь (27) належить до класу систем, для розв'язання яких застосовується метод простих ітерацій, детально обґрунтований у [18, 19]. Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 4. Нехай породжуюче для рівняння (10) рівняння (11) за виконання $r + d_1$ лінійно незалежних умов (12) має d_2 -параметричну сім'ю розв'язків $z(c_{d_2})$ (13). Тоді для кожного значення константи $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (15), при виконанні умов (25), (26) рівняння (10) буде мати розв'язок $z(\varepsilon)$, неперервний по ε , який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $z(c_{d_2}^0)$. Цей розв'язок при достатньо малих ε можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\begin{aligned} c_{d_2}^k(\varepsilon) &= B^+ G b_k, \\ \bar{y}_{k+1}(\varepsilon) &= \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+(H(z_0(c_{d_2}^0), 0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_2(y_k(\varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad - W \Lambda^+ \Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon), \varepsilon))) \\ &\quad + \Lambda^+ \Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0), 0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) + R_1(y_k(\varepsilon), \varepsilon))), \\ y_{k+1}(\varepsilon) &= P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty}, \\ z_k(\varepsilon) &= z(c_r^0) + y_k(\varepsilon), \quad y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Використовуючи отримані результати для слабконелінійного операторного рівняння (10), можна зробити висновок про існування розв'язку вихідної крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна (1), (2). Для цього використаємо перехід, який був описаний при дослідженні необхідної умови існування розв'язку розглядуваної задачі, тобто справедлива наступна достатня умова існування розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).

Теорема 5. Нехай породжуюча для крайової задачі (1), (2) задача (3) за виконання $r + d_1$ лінійно незалежних умов (12) має d_2 -параметричну сім'ю розв'язків $x_0(t, c_{d_2})$ (17). Тоді для кожного значення константи $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathbb{R}^{d_2}$, що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (15), при виконанні умов (25), (26) задача (1), (2) буде мати розв'язок $x(t, \varepsilon)$, $x(\cdot, \varepsilon) \in L_2[a, b]$, $x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_{d_2}^0)$. Цей розв'язок при достатньо малих ε можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$x_k(t, \varepsilon) = \Phi(t) z_k(\varepsilon), \quad k = \overline{0, \infty},$$

де вектор $z_k(\varepsilon)$ визначається за допомогою співвідношень (28).

Роботу частково підтримано грантом H2020-MSCA-RISE-2019, номер проекту 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: from Mathematics to Physics and Advanced Technology), а також грантом від Simons Foundation (1030291, О.Б., В.Ф.).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. P. L. Auer, C. S. Gardner, *Note on singular integral equations of the Kirkwood–Riseman type*, J. Chem. Phys., **23**, 1545–1546 (1955); <https://doi.org/10.1063/1.1742352>.
2. N. Levinson, *A nonlinear Volterra equation arising in the theory of superfluidity*, J. Math. Anal. and Appl., **1**, № 1, 1–11 (1960); [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(60\)90028-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(60)90028-7).

3. W. E. Olmstead, *A nonlinear integral equation associated with gas absorption in a liquid*, Z. Angew. Math. und Phys., **28**, № 3, 513 – 523 (1977); <https://doi.org/10.1007/BF01601630>.
4. A. N. Kochubei, *General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes*, Integral Equations Operator Theory, **71**, 583 – 600 (2011); <https://doi.org/10.1007/s00020-011-1918-8>.
5. В. Б. Василик, І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Експоненціально збіжний метод наближення для рівняння з дробовою похідною і необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі*, Укр. мат. журн., **74**, № 2, 151 – 163 (2022); **English translation:** Ukr. Math. J., **74**, № 2, 171 – 185 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02056-8>.
6. G. R. Richter, *On weakly singular Fredholm integral equations with displacement kernels*, J. Math. Anal. and Appl., **55**, № 1, 32 – 42 (1976); [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(76\)90275-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(76)90275-4).
7. C. Schneider, *Regularity of the solution to a class of weakly singular Fredholm integral equations of the second kind*, Integral Equations Operator Theory, **2**, № 1, 62 – 68 (1979); <https://doi.org/10.1007/BF01729361>.
8. H. Kaneko, R. D. Noren, Y. Xu, *Numerical solutions for weakly singular Hammerstein equations and their superconvergence*, J. Integral Equations Appl., **4**, № 3, 391 – 407 (1992); <https://doi.org/10.1216/jiea/1181075699>.
9. E. Vainikko, G. Vainikko, *A spline product quasi-interpolation method for weakly singular Fredholm integral equations*, SIAM J. Numer. Anal., **46**, № 4, 1799 – 1820 (2008); <https://doi.org/10.1137/070693308>.
10. J. Shen, C. Sheng, Z. Wang, *Generalized Jacobi spectral-Galerkin method for nonlinear Volterra integral equations with weakly singular kernels*, J. Math. Study, **48**, № 4, 315 – 329 (2015); <https://doi.org/10.4208/jms.v48n4.15.01>.
11. Y. Yang, Y. Huang, *Spectral Jacobi–Galerkin methods and iterated methods for Fredholm integral equations of the second kind with weakly singular kernel*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **12**, № 3, 685 – 702 (2019); <https://doi.org/10.3934/dcdss.2019043>.
12. L. Grammont, R. P. Kulkarni, P. B. Vasconcelos, *Fast and accurate solvers for weakly singular integral equations*, Numer. Algorithms, **1** – 26 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11075-022-01376-x>.
13. L. Fermo, D. Occorsio, *Weakly singular linear Volterra integral equations: a Nyström method in weighted spaces of continuous functions*, J. Comput. and Appl. Math., **406**, Paper 114001 (2022); <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.114001>.
14. О. А. Бойчук, В. А. Ферук, *Лінійні крайові задачі для слабкосингулярних інтегральних рівнянь, Нелінійні коливання*, **22**, № 1, 27 – 35 (2019); **English translation:** J. Math. Sci., **247**, 248 – 257 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04800-6>.
15. О. А. Boichuk, V. A. Feruk, *Boundary-value problems for weakly singular integral equations*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **27**, № 3, 1379 – 1395 (2022); <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021094>.
16. О. А. Boichuk, V. A. Feruk, *Fredholm boundary-value problem for the system of fractional differential equations*, Nonlinear Dyn., **111**, 7459 – 7468 (2023); <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08218-4>.
17. A. N. Sharkovsky, Y. L. Maistrenko, E. Y. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Springer Sci.+Business Media (2012).
18. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2th ed., De Gruyter, Berlin; Boston (2016); <https://doi.org/10.1515/9783110378443>.
19. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
20. О. А. Бойчук, В. Л. Макаров, В. А. Ферук, *Критерій розв'язності резонансних рівнянь та побудова їх розв'язків*, Укр. мат. журн., **71**, № 10, 1321 – 1330 (2019); **English translation:** Ukr. Math. J., **71**, № 10, 1510 – 1521 (2020); <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01728-7>.
21. Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, А. О. Чикрій, *Функціонально-диференціальні ігри з неатомарним різницеvim оператором*, Укр. мат. журн., **74**, № 2, 164 – 177 (2022); **English translation:** Ukr. Math. J., **74**, № 2, 186 – 202 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02057-7>.
22. Н. О. Козлова, *Нетерові крайові задачі для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь*, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Київ (2017).
23. A. A. Boichuk, N. A. Kozlova, V. A. Feruk, *Weakly nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **19**, № 2, 289 – 301 (2019).
24. С. Г. Михлин, *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, Физматгиз, Москва (1959).

Одержано 16.02.23