

ІДЕАЛЬНА ТУРБУЛЕНТНІСТЬ — РІЗНОВИД РОЗПОДІЛЕНОГО ХАОСУ: КОРОТКИЙ НАРИС

We outline the key points of the concept of ideal turbulence offering novel scenarios for distributed chaos, which are based not on the geometric-dynamical complexity of the attractor but on the extremely complex spatial structure of elements of the attractor. Ideal turbulence is observed in idealized (neglecting internal resistance) models of various processes related to electromagnetic or sound oscillations. This idealization significantly simplifies the analysis and, at the same time, in many cases, provides a quite adequate description of real processes.

Окреслено ключові положення концепції ідеальної турбулентності, яка пропонує нові сценарії розподіленого хаосу, засновані не на геометро-динамічній складності атрактора, а на надзвичайно складній просторовій структурі елементів атрактора. Ідеальна турбулентність спостерігається в ідеалізованих (що не враховують внутрішній опір) моделях різноманітних процесів, пов'язаних з електромагнітними чи звуковими коливаннями. Така ідеалізація істотно спрощує аналіз і разом з тим у багатьох випадках надає цілком адекватний опис реальних процесів.

1. Вступ. Ми говоритимемо про турбулентність у широкому сенсі й з позиції детерміністичного підходу. Тобто, під турбулентністю розуміємо процеси розвитку хаосу в еволюційних просторово-розподілених детермінованих системах, тим самим де-факто ототожнюючи поняття турбулентності й динамічного розподіленого (просторово-часового) хаосу. Незважаючи на фантастичний прогрес у галузі обчислювальних технологій, якісно-аналітичне дослідження турбулентності залишається пріоритетним завданням. Для моделювання хаотичної динаміки в розподілених системах використовують рівняння з частинними похідними (РЧП), ланцюжки й решітки нелінійних осциляторів, клітинні автомати. Останні три математичні інтерпретації обмежуються ґратковими моделями неперервного середовища, і лише перша цілком узгоджується з просторовою неперервністю, а отже, у багатьох випадках краще відповідає реальності.

Коли йдеться про РЧП-моделі, для яких „точками” простору станів є функції — просторово протяжні об'єкти, треба говорити не тільки про динаміку переходів між миттєвими станами (як у випадку звичайних диференціальних рівнянь), а й про еволюцію з часом внутрішньої, просторової, структури самих станів. Це відкриває гіпотетичну, не залежну від геометро-динамічних властивостей атрактора, можливість для виникнення турбулентності: ускладнення зі зростанням часу внутрішньої структури станів може спричинити просторово-часову хаотизацію. Перехід до хаотичної динаміки зазвичай пов'язаний із формуванням каскадів просторових структур, мінімальний масштаб яких у природних системах диктується внутрішнім опором. Водночас ідеальні системи (без внутрішнього опору) не перешкоджають появі як завгодно малих структур, що власне і має сприяти надскладній просторово-часовій динаміці. Тому ідеалізовані РЧП-моделі заслуговують на увагу, тим паче, що достатньо реалістичні РЧП-моделі турбулентності наразі слабо піддаються всебічному аналізу. Природно очікувати, що динаміка реальної системи зі зменшенням внутрішнього опору ν буде значною мірою визначатися динамікою відповідної ідеальної системи, принаймні на проміжку часу порядку $1/\nu$. Надихаючим прикладом

¹ Відповідальний за листування, e-mail: abdivali.akbergenov@gmail.com.

плідності такого підходу є теорія сухої води фон Неймана (води без в'язкості), яка сприяла розв'язанню багатьох задач гідродинаміки, щоправда, переважно для ламінарних течій.

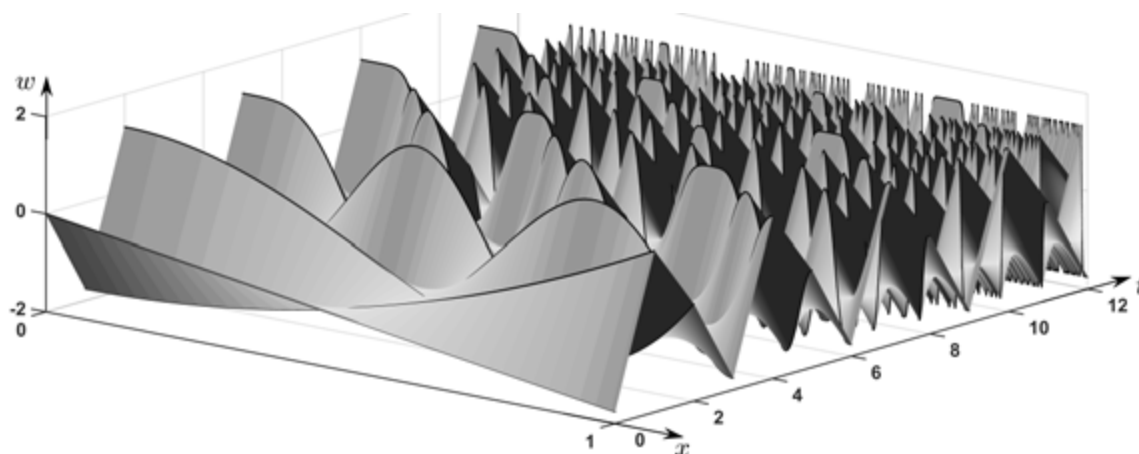


Рис. 1. Типова поведінка розв'язків крайової задачі $w_t - w_x = 0$, $w(1, t) = (w(0, t))^2 + \alpha$ при $-2 < \alpha \leq -1,401 \dots$ (відображення $z \rightarrow z^2 + \alpha$ має цикл періоду, відмінного від степеня двійки).

Виходячи з цих міркувань, О. М. Шарковський ще у 1983 р. запровадив поняття ідеальної турбулентності — турбулентності в системах без внутрішнього опору [1] (спершу використовувалася назва *суха турбулентність* за аналогією з сухою водою). Відтоді ця проблематика постійно лишалася в колі зацікавлень наукової команди О. М. Шарковського (див. [2, 3] та наведену там бібліографію). В результаті було створено математичну *концепцію ідеальної турбулентності*, яка пропонує для вивчення турбулентних режимів відносно прості якісно-аналітичні методи, засновані на теорії динамічних систем, і надає (на базі ідеалізованих РЧП-моделей) нові сценарії турбулентності, при яких розподілений хаос виникає внаслідок каскадного ускладнення внутрішньої структури станів системи, при цьому аттрактор складається з циклів і нерухомих точок. Нам не відомі роботи, в яких би розглядалися такого роду ефекти. Сьогодні поняття „ідеальна турбулентність” починає входити в термінологію теорії хаосу, його включено в „Енциклопедію нелінійної науки” [4].

Ідеальна турбулентність суттєво зумовлена нескінченновимірністю простору станів, оскільки для систем із нульовим внутрішнім опором не можна знехтувати внеском дрібномасштабних структур до якісної картини динаміки. Взагалі, серед РЧП-моделей турбулентності вирізняють два основних класи: нелінійні крайові задачі для параболічних та гіперболічних рівнянь. Атрактори задач із першого класу зазвичай є скінченновимірними підмножинами фазового простору, а задачі з другого класу, навпаки, переважно не мають аттрактора у фазовому просторі. Тому для моделювання ідеальної турбулентності було взято саме крайові задачі для гіперболічних рівнянь. Типову поведінку розв'язків таких задач продемонстровано на рис. 1. Варто зазначити, що хоча одним із ідейних витоків поняття ідеальної турбулентності була теорія сухої води, гіперболічні моделі ідеальної турбулентності не мають прямого відношення до гідроди-

наміки, а пов'язані з вивченням електромагнітних і звукових коливань. Такі моделі доцільно використовувати як ідеалізовані версії для низки крайових задач електродинаміки, радіофізики, електроніки, акустики тощо. Наприклад, дослідження коливальних режимів у лінії без втрат із діодом Чуа дозволило детально проаналізувати характер коливань в залежності від параметрів, зокрема виділити в області параметрів зону ідеальної турбулентності (див., наприклад, [5]).

Через обмеженість обсягу статті зроблено акцент на якісних аспектах теорії ідеальної турбулентності, послуговуючись елементарними викладками й комп'ютерною візуалізацією і лише вимушено залучаючи „високу” математичну аргументацію (та й то з достатньою часткою вільності в міркуваннях). Також наведено лише опорні посилання, виходячи з яких можна, якщо є бажання, скласти достатньо повну бібліографію з цієї теми.

2. Найпростіші моделі ідеальної турбулентності. Звідні крайові задачі. Математична концепція ідеальної турбулентності сформувалася завдяки дослідженню низки (дуже простих за формою) крайових задач, які відносно легко проаналізувати безпосередньо в нескінченновимірному варіанті, без використання скінченновимірних апроксимацій. Ідеться переважно про системи лінійних рівнянь

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

де $|a_{ij}|$ — стала $(m \times n)$ -матриця, $(x_1, \dots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, із нелінійними крайовими умовами вигляду

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n; w_1, w_2, \dots, w_m) \Big|_{\partial G} = 0. \quad (2)$$

Сюди також належать хвильове та інші рівняння, що так чи інакше зводяться до систем вигляду (1), (2). Завдяки лінійності рівнянь загальний розв'язок зазвичай записують в аналітичній формі. Тоді, підставляючи відповідну формулу в крайові умови, можна звести задачу до нелінійного різницевого або диференціально-різницевого рівняння. Здебільшого, коли використовують термін *різницеве рівняння*, мають на увазі рівняння з дискретним аргументом, а *внаслідок редуції крайових задач одержують різницеві рівняння з неперервним аргументом*. У найпростіших випадках це рівняння вигляду

$$u(\tau + 1) = f(u(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \quad (3)$$

Класичний приклад — задача

$$w_t - w_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4)$$

$$w|_{x=1} = f(w)|_{x=0}. \quad (5)$$

Загальний розв'язок для (4) має вигляд $w(x, t) = u(t + x)$, де u — довільна C^1 -функція. Підставляючи цю формулу в (5), переконуємося, що u справджує рівняння (3), якому відповідає одновимірне відображення $z \mapsto f(z)$.

Ще приклад — задача для хвильового рівняння

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$w|_{x=1} = f(w)|_{x=0}, \quad w_x|_{x=0} = aw_t|_{x=0}, \quad a > 1.$$

Підставляючи загальний розв'язок $w(x, t) = u^+(x + t) + u^-(x - t)$, де u^+ , u^- — довільні C^2 -функції, в крайові умови, після певних (доволі громіздких) перетворень виводимо, що

$$u^+(\tau) = \frac{1+a}{2} u(\tau+1) - A, \quad u^-(\tau) = \frac{1-a}{2} u(\tau+1) + A,$$

де A — довільна стала, а $u(\tau)$ — розв'язок різницевого рівняння другого порядку $u(\tau+2) = bf(u(\tau+1)) + cu(\tau)$, $b = 2/(1+a)$, $c = (1-a)/(1+a)$, яке заміною $v(\tau) = u(\tau+1)/c$, $h(z) = bf(cz)/c$ зводиться до системи різницевого рівняння першого порядку

$$u(\tau+1) = cv(\tau), \tag{6}$$

$$v(\tau+1) = h(v(\tau)) + u(\tau).$$

Рівнянням (6) відповідає двовимірне відображення $y \mapsto cz$, $z \mapsto h(z) + y$, яке є відображенням Ено при $h(z) = 1 - dz^2$ і відображенням Лозі при $h(z) = 1 - d|z|$.

Існує багато інших одно- та багатовимірних крайових задач, що зводяться до різницевого або близьких до них рівнянь [3, 6]. Приклади таких задач були відомі давно, проте на той час метод редукції не привернув належної уваги, оскільки аналіз отримуваних у такий спосіб рівнянь із перетвореним аргументом видавався не менш складним, аніж аналіз самих крайових задач. Реальний шанс на серйозний поступ у цьому напрямі з'явився завдяки створенню якісної теорії нелінійних різницевого рівнянь вигляду (3) [7–9]. Розв'язки цих рівнянь виражаються через ітерації відображення f за формулою

$$u(\tau) = f^n(\varphi(\tau - n)), \quad \tau \in [n, n+1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

де $\varphi(\tau) = u(\tau)|_{[0,1]}$ і $f^n(z) = f(f^{n-1}(z))$, $f^0(z) = z$, а отже, їхня поведінка визначається як асимптотичними властивостями послідовності функцій $\{f^n\}_n$, так і структурою самих функцій $f^n(z)$ при великих n . Зазвичай послідовність $\{f^n\}_n$ є асимптотично періодичною, а от поведінка функцій $f^n(z)$ стає дедалі заплутанішою [10]. Тому розв'язки рівняння (3) також асимптотично періодичні, але водночас типовими є асимптотично розривні розв'язки — обмежені гладкі функції, в яких число (незгасних) коливань на $[\tau, \tau+1]$ необмежено зростає при $\tau \rightarrow \infty$, і здебільшого експоненціально. Тож поведінка розв'язків критично ускладнюється зі зростанням τ (скажімо, як на рис. 2), що робить їх відмінним інструментом для моделювання турбулентних процесів.² Властивості розв'язків різницевого рівнянь успадковуються розв'язками звідних крайових задач, і це надає можливість відносно просто з'ясувати математичні механізми розподіленого хаосу та його просторово-часової ієрархізації.

3. Візуалізація різновидів ідеальної турбулентності. Щоб дати початкове уявлення про ідеальну турбулентність, почнімо з прикладів її комп'ютерної візуалізації.

В певному розумінні найпростіший патерн ідеальної турбулентності надає рис. 3, де зображено перетини по t типового розв'язку крайової задачі

²Зокрема, увесь каскадний процес утворення структур можна описати лише одним різницевою рівнянням (3), тоді як використання систем звичайних диференціальних рівнянь потребує збільшення їх розмірності для врахування структур кожного подальшого масштабу, і доводиться розглядати системи надвисокої розмірності (стає актуальною проблема „прокляття розмірності”).

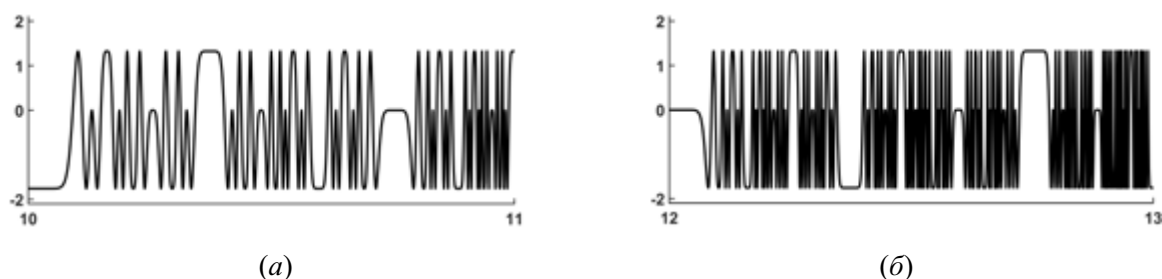


Рис. 2. Фрагменти розв'язку рівняння $u(\tau + 1) = f(u(\tau))$ з початковою умовою $u(\tau)|_{[0,1]} = \varphi(\tau)$ у випадку $f(z) = z^2 + \alpha$, $\varphi(\tau) = \alpha\tau$, $\alpha = -1,755$: (а) $x(\tau) = f^{10}(\varphi(\tau - 10))$, $\tau \in [10, 11)$, (б) $x(\tau) = f^{12}(\varphi(\tau - 12))$, $\tau \in [12, 13)$.

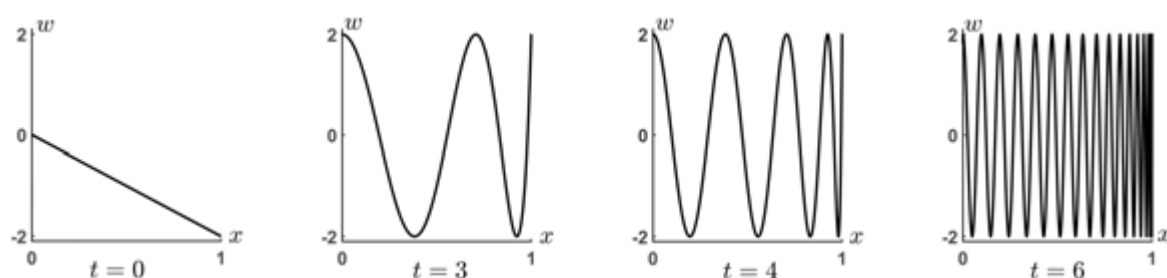


Рис. 3. Миттєві портрети розв'язку крайової задачі $w_t - w_x = 0$, $w(1, t) = (w(0, t))^2 - \alpha$, $w(x, 0) = \alpha x$, $\alpha = -2$.

$$w_t - w_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$w|_{x=1} = (w|_{x=0})^2 - 2.$$

З деякого моменту розв'язок $w_\varphi(x, t)$ починає коливатися в межах від -2 до 2 із амплітудою, рівною 4 , а число коливань функції $w_\varphi(x, T)$ зростає вдвічі зі збільшенням T на 1 .

Тут спостерігаються відразу три принципові особливості, що зустрічаються в крайових задачах із ідеальною турбулентністю. Перша — це *градієнтна катастрофа*, коли максимум градієнта обмеженої (до того ж гладкої) функції $w_\varphi(x, T)$ необмежено зростає при $T \rightarrow \infty$.

Друга особливість має назву *space-filling властивість*. Вона полягає в тому, що графік функції $w_\varphi(x, T)$ зі зростанням T дедалі щільніше заповнює прямокутник $\Pi = [0, 1] \times [-2, 2]$ і стає схожим на плоску space-filling криву — неперервну двовимірну криву, що проходить через кожну точку деякого квадрата (такі криві ще називають кривими Пеано). А саме, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $T_\varepsilon > 0$ таке, що при $T > T_\varepsilon$ крива $y = w_\varphi(x, T)$ проходить біля кожної точки $(x, y) \in \Pi$ на відстані, меншій за ε .

Третя особливість: яким би не було $x_* \in [0, 1]$, значення функції $w_\varphi(x, T)$ при $x = x_*$ не можна обчислити достовірно, коли T достатньо велике. Будь-яка обчислювальна схема (навіть за як завгодно високої точності) буде нестійкою, тож поведінку функції $w_\varphi(x, t)$ можна з певністю визначити тільки на відносно невеликому проміжку часу. В такому випадку кажуть, що $w_\varphi(x, t)$ *потрапляє за горизонт передбачуваності*.

Інший патерн ідеальної турбулентності отримаємо, якщо змінимо сталу в крайових умовах, взявши

$$w|_{x=1} = (w|_{x=0})^2 - 1,755.$$

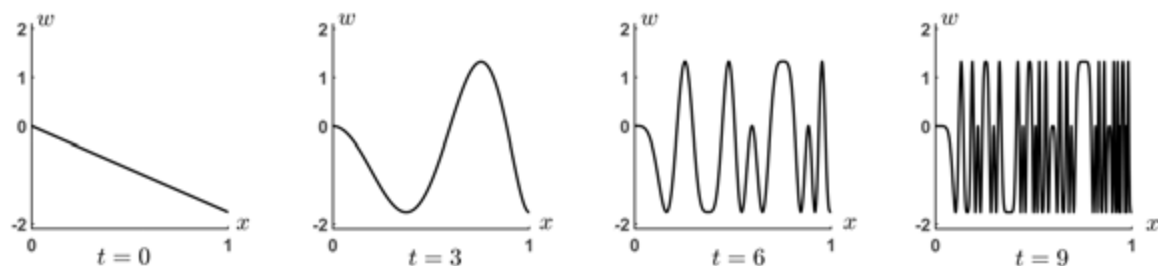


Рис. 4. Миттєві портрети розв'язку крайової задачі $w_t - w_x = 0$, $w(1,t) = (w(0,t))^2 - \alpha$, $w(x,0) = \alpha x$, $\alpha = -1,755$.

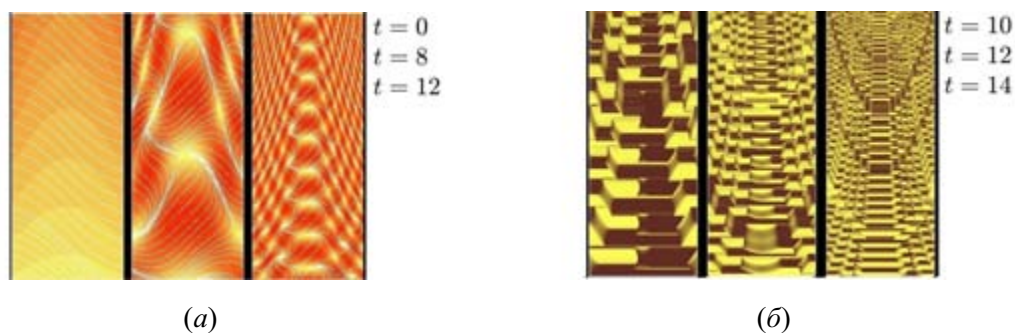


Рис. 5. „Язики полум'я” (а) і „золоті злитки” (б).

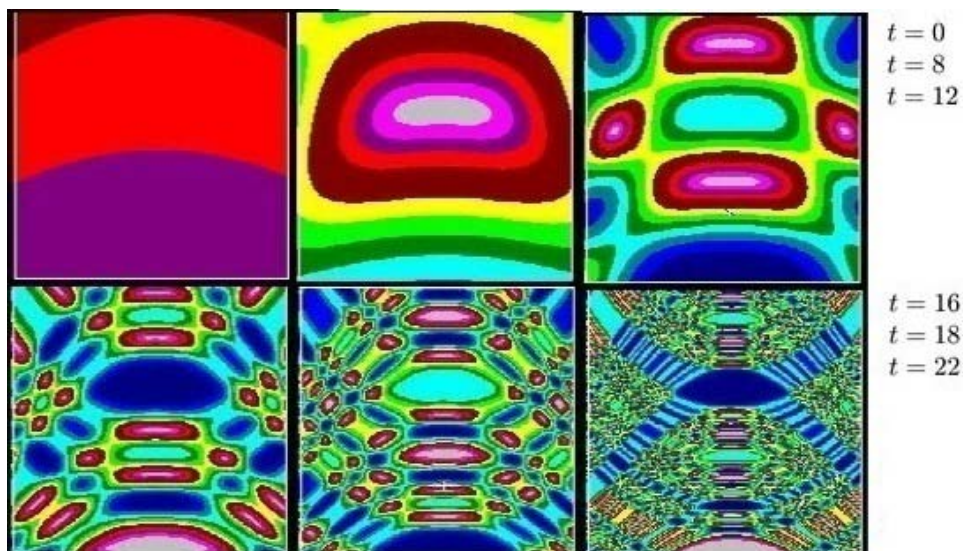


Рис. 6. „Картинки в калейдоскопі”.

Який тепер вигляд мають типові розв'язки видно з рис. 1 і 4. Вони демонструють ще одну особливість — *каскадне самоструктурування*: розвинення каскадів когерентних структур спадних масштабів до як завгодно малих структур.

Кращої візуальної виразності каскадні процеси набувають при двовимірній машинній графіці (а надто з використанням кольору). Отримувані картини іноді можуть спричинити курйозні асоціації, наприклад, як на рис. 5 і 6.

Ці рисунки отримано за графічного супроводу роботи [11], вони стосуються задачі

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$w_1|_{x_2=0} = w_2|_{x_2=0}, \quad w_1|_{x_2=1} = f(w_2)|_{x_2=1}, \quad f(z) = \lambda(1 - z^2) - 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

При кожному фіксованому $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язок $w(x, t)$ визначає в площині (x_1, x_2) векторне поле $(w_1(x, t), w_2(x, t))$. В точках $x = (x_1, x_2)$ обчислюємо $m(x) = \sqrt{(w_1)^2 + (w_2)^2}$ або $r(x) = \arctan(w_2/w_1)$ і фарбуємо відповідний піксель дисплея згідно з обраною колірною шкалою. Збільшуючи t , простежуємо динаміку миттєвих портретів векторного поля, написаних „пікчерами” $m(x)$ та $r(x)$. Картинки на рис. 5 відповідають $\lambda = 2$, „пікчер” для першої — $m(x)$, для другої — $r(x)$, а на рис. 6 — $\lambda = 1,925$, „пікчером” є $m(x)$.

На цих рисунках чітко простежуються послідовні етапи каскадного виникнення структур. Спостерігаються дві загальні тенденції. Перша — це коли, як на рис. 5, виникнення структур менших масштабів супроводжується руйнуванням попередніх структур більших масштабів і зрештою виникає турбулентна пляма — зона хаотичного перемішування. Друга тенденція — це коли, як на рис. 6, із виникненням структур менших масштабів попередні структури більших масштабів продовжують існувати і вибудовується каскадна просторово-часова ієрархія структур, що приводить до формування в усій області надскладної фракталоподібної структури, самоподібної на різних масштабних рівнях. Це явище, назване *скейлінг*, добре видно на двох останніх картинках ($t = 18$, $t = 22$) з рис. 6.

Як бачимо, навіть найпростіші ідеалізовані крайові задачі здатні моделювати головні сценарії реальної турбулентності. Тому задача „математизації” перебігу турбулентності в ідеалізованих задачах не є чисто математичною забаганкою, а має парадигматичне значення.

4. Концепція ідеальної турбулентності. Переважна більшість крайових задач для рівнянь із частинними похідними індукує на просторі початкових станів нескінченновимірні динамічні системи зсувів уздовж розв'язків. Це дозволяє охарактеризувати асимптотичну поведінку розв'язків задачі, виходячи з динаміки на (глобальному) аттракторі відповідної системи зсувів. Крайовій задачі (1), (2) відповідає на просторі гладких функцій $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$, динамічна система

$$S^t: \varphi(x) \mapsto w_\varphi(x, t), \quad x \in G, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (7)$$

де $S^t[\varphi]$ — оператор зсуву, $w_\varphi(x, t)$ — розв'язок, що відповідає умові $w(x, 0) = \varphi(x)$. Результати аналізу конкретних задач вигляду (1), (2) з $n, m = 1, 2$ на основі переходу до системи (7) склали підґрунтя для нового погляду на можливі механізми розвитку турбулентності, який переносить ідею про виняткову складність як причину хаосу з атрактора на його просторово-протяжні „точки”. Було отримано підтверджувальні сценарії, за яких хаотизація зумовлена саме складною структурою „точок” атрактора, а власне аттрактор є регулярним (зокрема, складається з однієї, проте надскладно влаштованої „точки”).

Стисло ці сценарії хаосу можна окреслити так. Просторово-часова еволюція початкових станів динамічної системи — гладких або кусково-гладких функцій — супроводжується дедалі

більшим ускладненням їхньої просторової структури і, як наслідок, граничний стан неможливо описати в термінах гладких або хоча б неперервних функцій. Побудова атракторів траєкторій потребує продовження системи на ширший функціональний простір. Для цієї мети виявилися придатними два простори: напівнеперервних зверху функцій³ і випадкових функцій⁴ (перший — з метрикою Гаусдорфа для графіків функцій, другий — зі спеціальною метрикою, що порівнює скінченновимірні розподіли функцій). Це, зокрема, дало змогу формалізувати поняття ідеальної турбулентності.

Ідеальна турбулентність — це математичне явище, яке характерне для низки нескінченновимірних динамічних систем на просторах гладких функцій і полягає в тому, що *атрактор системи лежить не в фазовому просторі, а в більш широкому функціональному просторі, що містить фрактальні або навіть випадкові функції*.

Якщо крайова задача породжує динамічну систему зсувів з ідеальною турбулентністю, природно сказати, що в крайовій задачі має місце ідеальна турбулентність.

Наведене означення має загальний характер і потребує конкретизації: що розуміється під атрактором, як визначаються простори фрактальних і випадкових функцій, якими є метрики в цих просторах. Математика за всім цим стоїть не проста, але якщо не заходити в подробиці, то явище ідеальної турбулентності можна охарактеризувати таким чином. Заради спрощення візьмемо задачу (1), (2). Поведінка її розв'язків на великих значеннях часу визначається атрактором динамічної системи (7). За наявності ідеальної турбулентності атрактор лежить не у фазовому просторі гладких функцій, а знаходиться в ширшому функціональному просторі, який містить нарівні із гладкими фрактальні або ж випадкові функції. Фрактальними називаємо напівнеперервні зверху функції із нескінченним числом розривів. Графіки таких функцій є замкненими підмножинами евклідового простору, які у багатьох випадках є фрактальними. Введемо такі позначення:

C^1 — фазовий простір динамічної системи зсувів, який складається з гладких функцій φ , і $S^t[\varphi]$ — траєкторія цієї системи, породжувана початковим станом φ ;

C^Δ , $C^\#$ — простори, одержані поповненням простору C^1 фрактальними та, відповідно, випадковими функціями (у метриках належних розширених просторів);

$\omega^\Delta[\varphi]$, $\omega^\#[\varphi]$ — ω -граничні множини або, простіше, атрактори траєкторії⁵ $S^t[\varphi]$ в просторах C^Δ і $C^\#$ (зазначимо, що $\omega^\Delta[\varphi]$, на відміну від $\omega^\#[\varphi]$, завжди існує);

$w_\varphi(x, t)$ — розв'язок задачі (1), (2), який справджує початкову умову $w(x, 0) = \varphi(x)$.

Якщо траєкторія $S^t[\varphi]$ некомпактна в C^1 -метриці (а саме це притаманно крайовим задачам для гіперболічних рівнянь), то її динаміка, а отже і динаміка розв'язку $w_\varphi(x, t)$, із часом стає турбулентною. Цей факт можна формалізувати у такий спосіб:

$$\omega^\Delta[\varphi] \cap (C^\Delta \setminus C^1) \neq \emptyset, \quad \omega^\#[\varphi] \cap (C^\# \setminus C^1) \neq \emptyset. \quad (8)$$

Ці співвідношення свідчать про ускладнення „в рази” геометрії розв'язку $w_\varphi(x, t)$ зі зростанням t (наприклад, як на рис. 1). Мірилом складності визначимо фрактальну розмірність графіків

³Функцію $\xi : G \rightarrow 2^D$, де G, D — області евклідових просторів і 2^D — множина непорожніх опуклих замкнених множин із D , називаємо напівнеперервною зверху, якщо для будь-яких $x_0 \in G$ та $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(\xi(x_0))$, де $U_\varepsilon(\cdot)$, $U_\delta(\cdot)$ — околиці у відповідних евклідових просторах.

⁴Випадкові й детерміновані вимірні функції трактуємо як сім'ї їхніх скінченновимірних розподілів. Це повністю виправдано в межах класичних методів теорії імовірностей, які не використовують розподілів у нескінченновимірних просторах вибірових функцій.

⁵Термін „атрактор траєкторії” запропоновано О. М. Шарковським у [12].

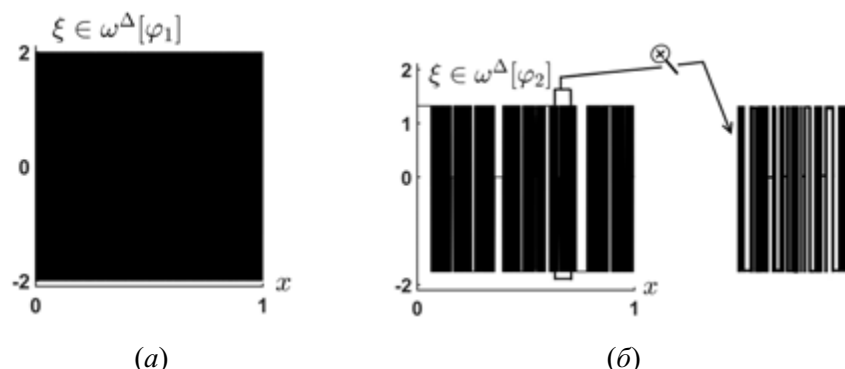


Рис. 7. Ідеальна турбулентність в крайовій задачі $w_t - w_x = 0$, $w(1, t) = (w(0, t))^2 + \alpha$ при $\alpha = -2$ (а) і $\alpha = -1,755$ (б).

функцій із множини $\omega^\Delta[\varphi]$. У гладкої початкової функції φ фрактальна розмірність графіка збігається з її топологічною розмірністю і виражається натуральним числом $k = m + n - 1$. Водночас перше зі співвідношень (8) показує, що множина $\omega^\Delta[\varphi]$ містить фрактальну функцію, графік якої має фрактальну розмірність $r \geq k$. Гіпотетично здійснимі два якісно відмінних випадки: $r = k$ або $k < r \leq k + 1$. Також виокремлюємо випадок, за яким у множині $\omega^\#[\varphi]$ є випадкова функція. Виходячи з цих міркувань, можна запропонувати таку класифікацію ідеальної турбулентності в індивідуальних траєкторіях.

Кажемо, що початковий стан $\varphi \in C^1$ генерує

***слабку ідеальну турбулентність**, якщо $\omega^\Delta[\varphi]$ містить фрактальну функцію, графік якої має ту саму фрактальну розмірність, що й графік функції φ ;*

***сильну ідеальну турбулентність**, якщо $\omega^\Delta[\varphi]$ містить фрактальну функцію, графік якої має більшу фрактальну розмірність, аніж графік функції φ ;*

***стохастичну ідеальну турбулентність**, якщо $\omega^\#[\varphi]$ містить випадкову функцію.*⁶

Наприклад, початкові стани φ_1 , φ_2 , яким відповідають розв'язки з рис. 3 і 4, генерують сильну ідеальну турбулентність. Цей факт проілюстровано на рис. 7, де зображено фрактальні функції з $\omega^\Delta[\varphi_1]$ та з $\omega^\Delta[\varphi_2]$. Насправді при $-2 < \lambda \leq -1,25$ ідеальна турбулентність генерується майже всіма початковими станами і відповідні їм розв'язки є турбулентними.

В процесі обчислення сильно турбулентних розв'язків відбувається „роздування” малих помилок округлення до порівняно великих. Так, для розв'язку $w_{\varphi_1}(x, t)$ з рис. 3 множина $\omega^\Delta[\varphi_1]$ складається з однієї функції $\xi(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$, розривної в кожній точці. Тому, яким би малим не було $\delta > 0$, обчислене значення розв'язку $w_{\varphi_1}(x, t)$ при достатньо великому t може виявитися δ -близьким до будь-якого числа з $[-2, 2]$ (за будь-якої точності обчислень). Отже, *сильна турбулентність веде до потрапляння розв'язків за горизонт передбачуваності*. Це актуалізує заміну традиційного запитання „Яким є значення в точці?” на запитання „З якою ймовірністю значення в точці належить до тієї чи іншої множини?” Коли таке „овипадковування” (randomization) можливе, *сильна турбулентність стає стохастичною*. Тоді за допомогою множин $\omega^\#[\cdot]$ можна значно зменшити невизначеність, притаманну числовому описові розв'язків у межах сильної турбулентності. Наприклад, для розв'язку $w_{\varphi_1}(x, t)$

⁶Початковий стан φ може генерувати турбулентність різних типів на різних множинах зі своєї області визначення G . Фрактальна розмірність графіків функцій з $\omega^\Delta[\varphi]$ може на одних множинах із G збігатися, а на інших перевищувати розмірність графіка функції φ . Також можливо, що випадкові функції з $\omega^\#[\varphi]$ є детермінованими на якихось множинах із G .

з рис. 3 за допомогою множини $\omega^\Delta[\varphi_1]$ можна визначити тільки діапазон значень — інтервал $[-2, 2]$. Водночас відображення $z \mapsto z^2 - 2$ в крайовій умові має гладку інваріантну міру $\mu(dz) = dz/\pi\sqrt{4 - z^2}$, що забезпечує існування множини $\omega^\#[\varphi_1]$. Ця множина складається з однієї випадкової функції $\zeta(x)$, $x \in [0, 1]$, яка при кожному x є випадковою величиною з функцією розподілу $F(z) = \mu(B_z)$, $B_z = [-2, z]$. Тож при великих t' імовірність потрапляння значення $w_{\varphi_1}(x', t')$ в інтервал $[a, b]$ майже дорівнює μ -мірі цього інтервалу, тобто дорівнює $F(b) - F(a) = 1/\pi(\arcsin(b/2) - \arcsin(a/2))$. *Стохастична турбулентність еквівалентна явищу автостохастичності*, яке в загальному трактуванні [13] визначається як спонтанне розвинення в детермінованій системі хаотичних процесів, які підпорядковуються статистичним закономірностям (допускають імовірнісний опис).

Якщо ж говорити про ідеальну турбулентність у крайовій задачі в цілому, то це доцільно тільки за умови, що початкових станів, які генерують турбулентність, дуже багато в тому чи іншому сенсі. Це може бути множина додатної або повної міри, скрізь щільна множина або множина другої категорії, або ще якась множина, „розумна” в межах даної задачі. У цій статті „дуже багато” трактуємо як множину другої категорії, а коли йдеться про стохастичну турбулентність, під „дуже багато” розуміємо множину несингулярних функцій.⁷ Систематизований виклад окреслених вище конструкцій можна знайти в [3].

5. Найпростіша версія ідеальної турбулентності. В концепції ідеальної турбулентності особливе місце посідають крайові задачі, просторово-часова динаміка яких керується одновимірним відображенням (див., зокрема, [14]). Це дозволяє істотно просунутися в математичній формалізації і порівняно легко пояснити, чому для таких задач характерні хаотичні, але гладкі розв'язки — „носії” ідеальної турбулентності. Природно очікувати, що це наслідок хаотичної динаміки керівного відображення. Втім, хаотизація розв'язків відбувається і тоді, коли відображення перебуває у вікні періодичності. Візьмемо задачу (4), (5), де f — гладке відображення замкненого інтервалу $I \subset \mathbb{R}$ у себе. Те, якою буде асимптотична поведінка розв'язків, визначається аттрактором динамічної системи зсувів (7) на просторі функцій $\varphi \in C^1([0, 1], I)$. Завдяки звідності задачі до різнищового рівняння оператор зсуву S^t має дуже просту форму. Справді, якщо w_φ , u_φ — розв'язки задачі (4), (5) та рівняння (3), які задовольняють початкові умови $w(x, 0) = \varphi(x)$ і $u(\tau)|_{[0, 1]} = \varphi(\tau)$, то $w_\varphi(x, t) = u_\varphi(t + x)$ і $u_\varphi(\tau) = f^n(\varphi(\tau - n))$, $n \leq \tau < n + 1$. Тому (7) набирає вигляду

$$S^t: \varphi(x) \mapsto f^{\lfloor x+t \rfloor}(\varphi(\langle x+t \rangle)), \quad \text{де } \lfloor \cdot \rfloor \text{ і } \langle \cdot \rangle \text{ — ціла і дробова частини числа.} \quad (9)$$

Основним фактором хаотизації розв'язків є складна тополого-динамічна будова множини $\mathcal{D}(f)$ нестійких точок відображення f , яка має назву *роздільник*⁸ і виокремлює точки з розбіганням близьких траєкторій.⁹ Наскільки далеко від траєкторії точки $z \in \mathcal{D}(f)$ відходять траєкторії близьких до неї точок показує *область впливу* — множина

⁷В англійській літературі замість терміна „множина другої категорії” перевага надається синонімічній назві „non-meager set” (нехуда множина). Під *несингулярними* розуміємо функції $\varphi(x)$, для яких $\text{mes } \varphi^{-1}(B) = 0$, якщо $\text{mes } B = 0$; mes позначає міру Лебега.

⁸У більшості випадків точки з $\mathcal{D}(f)$ розділяють басейни притягувальних циклів, зазвичай басейни притягувальних циклів є досить складними множинами аж до множин третього класу Бера [15, 16].

⁹Для $z \in \mathcal{D}(f)$ існує $d(z) > 0$ таке, що при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайдуться $z_* \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$ і ціле $s > 0$ з властивістю $|f^s(z) - f^s(z_*)| > d(z)$. Здебільшого $\mathcal{D}(f)$ містить підмножину додатної міри, на якій $\inf_z d(z) > 0$, і тоді f чутливо залежить від початкових даних: як завгодно малі збурення початкових станів призводять до значних і непередбачуваних відхилень кінцевих станів.

$$Q_f(z) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{j > 0} \overline{\bigcup_{i > j} f^i(V_\delta(z))},$$

де $V_\delta(z) = (z - \delta, z + \delta)$. Для точки $z \notin \mathcal{D}(f)$ область впливу збігається з її ω -граничною множиною.

Як властивості роздільника $\mathcal{D}(f)$ відбиваються на розв'язках, стає зрозумілим із формули $w_\varphi(x, t) = f^{\lfloor x+t \rfloor}(\varphi(\langle x+t \rangle))$. Нехай $z_o \in \mathcal{D}(f)$ — нерухома точка, $d_o = \text{diam } Q_f(z_o)$ й $x_o \in [0, 1]$. Якщо $\varphi(x_o) = z_o$ і $\dot{\varphi}(x_o) \neq 0$, то для будь-якого околу V_n точки (x, t) на прямій $x + t = x_o + n$ маємо $\text{diam } w_\varphi(V_n) \approx d_o$, починаючи з деякого n . Це означає, що розв'язок $w_\varphi(x, t)$ асимптотично втрачає неперервність: його коливання (стрибок) в околі кожної точки, що лежить на прямій $x + t = x_o + n$, стає із зростанням n майже рівним d_o , а його графік — майже схожим на вертикальний відрізок $J_o = Q_f(z_o)$. Аналогічна ситуація відбувається на будь-якій прямій $x + t = x_* + n$, якщо $x_* \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$. Візуалізацію такої втрати неперервності бачимо на рис. 3 і 4.

Саме тому функції $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$, які характеризують довготривалу поведінку розв'язку $w_\varphi(x, t)$, мають розриви (є „інтервальнозначними”), кожна на певному зсуві множини $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$. Зовсім спрощено цей факт формулюється так.

Для майже всіх f існує ціле $p > 0$ таке, що при майже всіх φ множина $\omega^\Delta[\varphi]$ складається з функцій $\xi_t: [0, 1] \rightarrow 2^I$, $t \in [0, p)$, які визначаються у такий спосіб:

$$\xi_0(x) = Q_{f^p}(\varphi(x)), \quad \xi_t(x) = f^{\lfloor x+t \rfloor}(\xi_0(\langle x+t \rangle)), \quad t \in [0, p), \quad (10)$$

до того ж множина значень функції $\xi_0(x)$, а отже і всіх функцій $\xi_t(x)$, є скінченною.

Динамічна система (9) індукує (за неперервністю) C^Δ -розширену динамічну систему на C^Δ , зокрема визначає рух на $\omega^\Delta[\cdot]$. Тож майже завжди атрактор $\omega^\Delta[\varphi]$ траєкторії $S^t[\varphi]$ є циклом C^Δ -розширеної динамічної системи (p необов'язково найменший період). Звісно, різні траєкторії можуть мати спільний атрактор. Скажімо, якщо $f: z \mapsto z^2 - 2$, $z \in [-2, 2]$, то $\mathcal{D}(f) = [-2, 2]$ і $Q_f(z) = [-2, 2]$. Тому для функції $\varphi(x)$, відмінної від сталої на будь-якому інтервалі, множина $\omega^\Delta[\varphi]$ складається з однієї функції $\xi(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$, тож траєкторії всіх таких початкових функцій притягуються до нерухомої точки $\{\xi(x)\}$.

Нехай $\mathcal{D}_t(f, \varphi)$ — множина, утворена точками $x = \langle x_* - t \rangle$, $x_* \in \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$, $t \in \mathbb{R}^+$ (зокрема, $\mathcal{D}_0(f, \varphi) = \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f))$), $\mathcal{J}_0(f)$ — множина точок стійких циклів відображення f і $\mathcal{J}(f)$ — множина компонент зв'язності областей впливу $Q_f(z)$ точок $z \in \mathcal{D}(f)$. Якщо $\varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)) \neq \emptyset$, то функція $\xi_t(x)$ напівнеперервна зверху і розривна, її значення є інтервалом із $\mathcal{J}(f)$ при $x \in \mathcal{D}_t(f, \varphi)$ й одноточковою множиною з $\mathcal{J}_0(f)$ в іншому випадку (а отже, $\xi_t(x)$, як функція з $[0, 1]$ в I , є сталою на кожному інтервалі неперервності).

Для множин $\omega^\#[\varphi]$ аналогічне твердження потребує додаткової математичної аргументації, і надати тут навіть дуже спрощене формулювання не видається можливим. Зауважимо лише, що за певних умов, основною з яких є наявність у f гладкої інваріантної міри, множини $\omega^\#[\varphi]$ існують для несингулярних φ , є циклами $C^\#$ -розширеної динамічної системи і складаються з випадкових функцій, скінченновимірні розподіли яких задаються цією інваріантною мірою.

Вищезазначена асимптотична періодичність траєкторій динамічної системи (9) трансформується в асимптотичну періодичність відповідних розв'язків крайової задачі (4), (5). А саме, розв'язок $w_\varphi(x, t)$ прямує при $t \rightarrow \infty$ (в метриці Гаусдорфа для графіків) до періодичної напівнеперервної зверху функції

$$W_\varphi(x, t) = \xi_{t \bmod p}(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{де } \xi_t \in \omega^\Delta[\varphi], \quad t \in [0, p). \quad (11)$$

Нехай gr позначає графік функції. З геометричного погляду (11) означає, що $\text{gr } W_\varphi(x, t)|_{[0,1] \times [0,p]}$ є топологічною границею послідовності $\text{gr } w_\varphi(x, t + ip)|_{[0,1] \times [0,p]}$ при $i \rightarrow \infty$, а отже, розв'язок $w_\varphi(x, t)$ асимптотично відтворює тополого-геометричні особливості функцій $\xi_t \in \omega^\Delta[\varphi]$, які у свою чергу відтворюють властивості роздільника $\mathcal{D}(f)$. Наприклад, розв'язку $w_{\varphi_2}(x, t)$ з рис. 1 і 4 відповідає траєкторія $S^t[\varphi_2]$, для якої $p = 3$ і функції $\xi_t(x)$, $t \in [0, 3)$, що складають множину $\omega^\Delta[\varphi_2]$, знаходяться за формулою (10), де

$$\xi_0(x) = \begin{cases} \gamma_i, & \text{якщо } x \in \varphi_2^{-1}(B_i), \quad i = 1, 2, 3, \\ [\alpha, \alpha + \alpha^2], & \text{якщо } x \in \varphi_2^{-1}(\mathcal{D}(f)), \end{cases}$$

$\mathcal{D}(f)$ — роздільник і $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ — (єдиний) притягувальний цикл¹⁰ керуючого відображення $f: z \rightarrow z^2 - 1, 755$, $\alpha = -1, 755$, B_i — басейн притягання точки $z = \gamma_i$ під дією f^3 . Графік функції $\xi_0(x)$ є фрактальним, що візуально підтверджує рис. 7(б). В цьому випадку роздільник $\mathcal{D}(f)$ — це границя басейну B притягувального циклу, а басейн B , як об'єднання області безпосереднього притягання B_0 і зліченного числа інтервалів B_{js} , $j = 1, 2, \dots$, $s = 1, 2, \dots, l_j$, таких, що $f^j(B_{js}) \subset B_0$, влаштований складно: між будь-якими $B_{j^*s^*}$ і $B_{j_*s_*}$, $j^* \neq j_*$, знайдеться $B_{j_0s_0}$, $j_0 > j^*, j_*$, тож його границя має канторівську структуру. Це зумовлює фрактальність роздільника $\mathcal{D}(f)$, а отже, і графіків функцій $\xi_0(x)$ і $W_{\varphi_2}(x, t)$. Це в свою чергу спричиняє каскадне утворення структур розв'язком $w_{\varphi_2}(x, t)$ у процесі наближення до граничної функції $W_{\varphi_2}(x, t)$ із подальшим (при $t \rightarrow \infty$) перетворенням його графіка на фрактальну множину. Цей процес проілюстровано на рис. 4; математичний опис, на жаль, надто громіздкий [11].

Якщо множина $\omega^\#[\varphi]$ існує й складається з випадкових функцій, то розв'язок $w_\varphi(x, t)$ також прямує при $t \rightarrow \infty$ (в метриці простору $C^\#$) до періодичної випадкової функції $\widetilde{W}_\varphi(x, t) = \zeta_{t \bmod p}(x)$, $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}^+$, де $\zeta_t \in \omega^\#[\varphi]$, $t \in [0, p)$. Скінченновимірні розподіли функції $\widetilde{W}_\varphi(x, t)$ асимптотично описують відповідні розподіли розв'язку, що, зокрема, дозволяє вираховувати його статистичні характеристики (математичне очікування та інші). Про це побіжно йшлося в попередньому пункті на прикладі розв'язку $w_{\varphi_1}(x, t)$ з рис. 3.

З (10) випливає, що *ідеальна турбулентність у задачі (4), (5) — звичайна річ*. Позначимо $\dim_{\text{frac}}$ фрактальну розмірність. Коли f має цикл періоду > 2 , роздільник $\mathcal{D}(f)$ і множина його граничних точок нескінченні. Тоді в C^1 існує множина $\Phi(f)$ другої категорії, для функцій із якої справджуються властивості „успадкування”:

$$\text{card } \mathcal{D}_t(f, \varphi) = \text{card } \mathcal{D}(f), \quad \text{mes } \mathcal{D}_t(f, \varphi) = \text{mes } \mathcal{D}(f),$$

$$\dim_{\text{frac}} \mathcal{D}_t(f, \varphi) = \dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f), \quad \dim_{\text{frac}} \text{gr } \xi_t = \dim_{\text{frac}} \mathcal{D}_t(f, \varphi) + 1 \quad \text{для } \xi_t \in \omega^\Delta[\varphi].$$

Тому кожна функція з $\Phi(f)$ є фрактальною і, отже, генерує ідеальну турбулентність. Це в свою чергу засвідчує наявність ідеальної турбулентності у задачі в цілому, а тип турбулентності залежить від тополого-геометричних властивостей роздільника $\mathcal{D}(f)$; модельний приклад щодо цього детально розглянуто в [17].

Якщо $\mathcal{D}(f)$ — зліченна множина, то в задачі відбувається тільки слабка турбулентність. Якщо ж множина $\mathcal{D}(f)$ незліченна і $\dim_{\text{frac}} \mathcal{D}(f) > 0$, то при $\varphi \in \Phi(f)$ фрактальна розмірність графіка будь-якої функції $\xi_t \in \omega^\Delta[\varphi]$ більша за 1 (не перевищує 2). Тому турбулентність в

¹⁰Числові значення $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ знаходяться як корені рівняння $(f^3(z) - z)/(f(z) - z) = 0$.

задачі є сильною.¹¹ Бувають ситуації, коли $\text{mes } \mathcal{D}(f) > 0$. Тоді $\text{mes } \mathcal{D}_t(f, \varphi) > 0$ для $\varphi \in \Phi(f)$, а отже, значення функцій, які складають траєкторію $S^t[\varphi]$, неможливо достовірно обчислити на множинах додатної лебегової міри, тож просто знехтувати цими значеннями не можна (приклад на рис. 3 і 7(a)). Якщо в цьому випадку траєкторії $S^t[\varphi]$ мають атрактори $\omega^\#[\varphi]$, що містять випадкові функції (допускають імовірнісний опис), то сильна турбулентність виявляється ще й стохастичною. Виходячи з цих міркувань та з властивостей одновимірних відображень, приходимо до критерію ідеальної турбулентності.

Динамічна система (9), а отже і крайова задача (4), (5), демонструє:

слабку ідеальну турбулентність, коли f має цикли лише з періодами 2^i , $i = 0, 1, \dots, l$, $l > 1$;

сильну ідеальну турбулентність, коли f має цикл із періодом, відмінним від 2^i , $i = 0, 1, \dots$;
стохастичну ідеальну турбулентність, коли f має гладку інваріантну міру.

Тут маємо приклад того, як тополого-динамічна складність одновимірного відображення трансформується в надскладну (просторову) поведінку функцій, що утворюють віддалені відрізки траєкторій нескінченновимірної динамічної системи, дія якої „керується” цим відображенням.

Важливо, що стохастична турбулентність не є винятковим явищем. Як відомо, для широких класів унімодальних відображень f_λ з параметром λ ті значення параметра, при яких f_λ має гладку інваріантну міру, утворюють множину додатної міри Лебега. Це означає, що *стохастична турбулентність фізично реалізована*.

6. Заключні зауваження. Ми окреслили концепцію ідеальної турбулентності лише в найзагальніших рисах, проте сподіваємося, змогли переконливо показати її широкі спроможності для математичного моделювання складної просторово-часової динаміки. Формування всебічного уявлення про природу реальної турбулентності неможливе без глибокого розуміння механізмів ідеальної турбулентності. Особливо це стосується явищ самоорганізації (виникнення каскадної ієрархії структур) і автостохастичності (розвинення розподіленого хаосу, що допускає ймовірнісний опис), які в моделях ідеальної турбулентності виникають цілком органічно й можуть бути легко пояснені. Концепція ідеальної турбулентності потребує подальшого розвитку задля застосування до крайових задач, що зводяться до більш складних різницевих рівнянь та рівнянь, споріднених із різницевими, скажімо, диференціально-функціональних. Також важливе створення стандартної теорії збурень для крайових задач, які моделюють динаміку середовищ із малим внутрішнім опором.

Цю роботу було підтримано Фондом Сімонса (грант № 1030291).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. N. Sharkovsky, „Dry” turbulence, Proc. II Int. Workshop „Nonlinear and Turbulent Processes in Physics” (Kiev, 1983), **3**, 1621 – 1626 (1984).
2. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *Dynamical systems and simulation of turbulence*, Ukr. Math. J., **59**, № 2, 229 – 242 (2007).

¹¹Здебільшого графіки функцій $\xi_t(x)$ локально самоподібні при $x \in \mathcal{D}_t(f, \varphi)$, коефіцієнти самоподібності визначаються мультиплікаторами відштовхувальних циклів відображення f .

3. О. М. Шарковський, О. Ю. Романенко, *Ідеальна турбулентність: фрактальні і стохастичні аттрактори траєкторій в ідеалізованих моделях математичної фізики*, Праці Інституту математики НАН України, **107** (2020).
4. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Turbulence: ideal*, Encyclopedia Nonlinear Sci., Routledge, New York and London (2005), p. 955–957.
5. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, *Ideal turbulence phenomenon and transmission line with Chua's diode*, Chapter 16 in Chaos, CNN, Memristors and Beyond, 202–210 (2013).
6. A. N. Sharkovsky, *Ideal turbulence*, Nonlinear Dynam., **44**, 15–27 (2006).
7. A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Ser. Math. and Appl., **250**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1993).
8. Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения с непрерывным аргументом*, Праці Інституту математики НАН України, **100** (2014).
9. O. Romanenko, *Continuous-time difference equations and distributed chaos modelling*, Math. Lett., **8**, № 1, 11–21 (2022).
10. O. Yu. Romanenko, O. M. Sharkovsky, *Properties of the semigroup generated by a continuous interval map*, Int. J. Math., Eng., Biol. and Appl. Comput., **1**, № 2, 77–94 (2022).
11. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovsky, M. B. Vereikina, *Self-structuring and self-similarity in boundary value problems*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **5**, № 5, 1407–1418 (1995).
12. А. Н. Шарковский, *Аттракторы траекторий и их бассейны*, Наук. думка, Київ (2013).
13. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Ideal turbulence: attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **2**, № 1, 31–36 (1992).
14. A. N. Sharkovsky, E. Yu. Romanenko, *Difference equations and dynamical systems generated by certain classes of boundary value problems*, Proc. Steklov Inst. Math., **244**, 264–279 (2004).
15. A. N. Sharkovsky, *Behavior of a mapping in the neighborhood of an attracting set*, Amer. Math. Soc. Transl., **97**, № 2, 227–258 (1970).
16. О. М. Шарковський, *Descriptive theory of deterministic chaos*, Ukr. Math. J., **74**, № 12, 1950–1960 (2022).
17. A. A. Akbergenov, O. Yu. Romanenko, *Visualization of the simplest scenarios of ideal turbulence*, J. Math. Sci., **247**, 223–237 (2020).

Одержано 19.05.23