DOI: 10.37863/umzh.v72i11.760

УДК 533.72

В. Д. Гордевський (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна),
О. О. Гукалов (Фіз.-техн. ін-т низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків)

КОНТИНУАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ДЛЯ РІВНЯННЯ БРАЙАНА – ПІДДАКА

For a nonlinear kinetic Boltzmann equation, in the case of a rough spheres model, we construct an approximate solution in the form of a continual distribution with the global Maxwellians. We also obtain the sufficient conditions on the coefficient functions and the hydrodynamic parameters, which are included in the distribution and make considered error arbitrarily small.

Для нелінійного кінетичного рівняння Больцмана у випадку моделі шорсткуватих куль побудовано наближений розв'язок у вигляді континуального розподілу з глобальними максвелліанами. Отримано достатні умови на коефіцієнтні функції та гідродинамічні параметри, що входять до розподілу, які дозволяють зробити розглянутий відхил як завгодно малим.

1. Вступ. Одним із основних рівнянь кінетичної теорії газів є нелінійне, інтегро-диференціальне рівняння Больцмана [1], яке описує еволюцію розрідженого газу. Ми будемо розглядати це рівняння для моделі шорсткуватих куль, яка вперше була введена у 1894 р. Брайаном [2], а у 1922 р. Піддак [3] застосував до цієї моделі раніше розвинуті методи для загальних сферичних молекул.

У цій моделі розглядаються молекули, що є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими. Це означає наступне. При зіткненні двох молекул, точки, що зіштовхуються, не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертального рухів без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену. Перевага цієї моделі над усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Рівняння Больцмана у випадку моделі шорсткуватих куль (або рівняння Брайана – Піддака) має вигляд [1 – 3]

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \tag{2}$$

$$Q(f,f) \equiv \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \times$$
$$\times \left[f\left(t, V_1^*, x, \omega_1^*\right) f\left(t, V^*, x, \omega^*\right) - f(t,V,x,\omega) f(t,V_1,x,\omega_1) \right]. \tag{3}$$

Тут d — діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I співвідношенням

$$I = \frac{bd^2}{4},$$

де b, $b \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right]$, — параметр, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули; t — час; $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3$ — просторова координата; $V = \left(V^1, V^2, V^3\right)$ та $\omega = \left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right) \in \mathbb{R}^3$ — лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — градієнт функції f по змінній x; Σ — одинична сфера у просторі $\mathbb{R}^3$; α — одиничний вектор із $\mathbb{R}^3$, що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, що зіштовхуються;

$$B\left(V - V_1, \alpha\right) = \left|\left(V - V_1, \alpha\right)\right| - \left(V - V_1, \alpha\right)$$

— член зіткнення у виразі для інтеграла зіткнень (3).

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (ω^*, ω_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражаються через відповідні швидкості до зіткнення таким чином [1]:

$$V^* = V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\,\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),$$

$$V_1^* = V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\,\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),$$

$$\omega^* = \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},$$

$$\omega_1^* = \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},$$

де символом $\times$ позначено векторний добуток. Ці формули можна отримати, скориставшись законами збереження імпульсу, сумарної енергії поступального та обертального рухів.

2. Постановка задачі. Актуальним питанням для рівняння Брайана – Піддака є пошук точних та наближених розв'язків у явному вигляді. Єдиним точним розв'язком рівняння Больцмана, що відомий на сьогодні, є вираз, який прийнято називати максвеллівським розподілом або максвелліаном на честь шотландського фізика Дж. К. Максвелла [1]. У випадку максвелліанів M маємо таке:

$$D(M) = 0, \quad Q(M, M) = 0.$$

Загальний вигляд локальних максвелліанів у випадку моделі Брайана – Піддака було остаточно отримано у роботі [8]. У цій роботі ми отримаємо так званий континуальний розподіл для глобального максвелліану (залежить лише від лінійної та кутової швидкостей частки газу) вигляду

$$f(t, x, V, \omega, u) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(V, \omega, u)\, du, \tag{4}$$

де максвелліан $M(V, \omega, u)$ має вигляд [1, 8]

$$M(V, \omega, u) = \rho I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left((V-u)^2 + I\omega^2\right)}.$$

Тут ρ — густина потоку газу, β — величина, обернена до абсолютної температури T, тобто $\beta = \dfrac{1}{2T}$.

Припускається, що коефіцієнтна функція $\varphi(t,x,u)$ належить класу $C^1\left(\mathbb{R}^7\right)$ і є невід'ємною з ненульовою нормою:

$$\|f\| = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^7} |f| + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^7} \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| + \sum_{i=1}^{3} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^7} \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|.$$

В якості міри відхилення між частинами рівняння (1) будемо розглядати рівномірно інтегральний відхил, який у випадку моделі шорсткуватих куль має вигляд

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega\, |D(f) - Q(f,f)|\,. \tag{5}$$

Таким чином, задача полягає у знаходженні такого вигляду функції $\varphi(t,x,u)$, щоб розподіл (4) був наближеним розв'язком рівняння (1) – (3), тобто щоб рівномірно інтегральний відхил (5) можна було зробити як завгодно малим.

3. Основні результати. Для подальшого нам знадобиться наступна лема, доведена у роботі [9].

Лема. *Нехай функція* $g(y,z)\colon Y\times Z\to\mathbb{R}^1$, $Y\in\mathbb{R}^p$, $Z\in\mathbb{R}^q$, *і виконуються такі умови:*

1) *для будь-якого* $z\in Z$ *функція* $g(y,z)$ *обмежена на* Y;

2) $g(y,z)$ *неперервна за змінною* z *рівномірно відносно* y, *тобто*

$$\forall z_0\in Z\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall y\in Y\ \forall z\in Z\colon |z-z_0|<\delta \Rightarrow |g(y,z)-g(y,z_0)|<\varepsilon.$$

Тоді функція $l(z)=\sup_{y\in Y}|g(y,z)|$ *неперервна на множині* Z.

Далі сформулюємо та доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай у розподілі* (4) *коефіцієнтна функція* $\varphi(t,x,u)$ *така, що*

$$\varphi(t,x,u), \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$$

обмежені по всіх значеннях (t,x,u) *із* $\mathbb{R}^7$, *а*

$$\varphi, \quad |u|\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\in L_1\left(\mathbb{R}^3\right)$$

— за змінною u *рівномірно відносно* t,x *на* $\mathbb{R}^4$.

Тоді існує така величина Δ', *що виконується нерівність*

$$\Delta\le\Delta'$$

і

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left\{\rho\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(u,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right|du+\right.$$

$$\left.+\,2\pi d^2\rho^2\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)|u_1-u_2|du_1du_2\right\}. \tag{6}$$

Доведення. Знайдемо вигляд диференціального оператора $D(f)$ для шуканого розподілу (4):

$$D(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi(t,x,u) M(V,\omega,u) \right) + \left(V, \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(t,x,u) M(V,\omega,u) \right) \right) \right] du =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[M(V,\omega,u) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t,x,u) + \left(V, M(V,\omega,u) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t,x,u) \right) \right] du =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t,x,u) + \left(V, \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t,x,u) \right) \right) M(V,\omega,u) du.$$

Інтеграл зіткнень $Q(f,f)$ буде мати вигляд

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \times$$

$$\times \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u_1) M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) du_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u_2) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) du_2 - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u_1) M(V_1,\omega_1,u_1)\, du_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u_2) M(V,\omega,u_2) du_2 \right].$$

Підставимо знайдений вигляд частин рівняння (1) у відхил Δ (5):

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t,x,u) + \left(V, \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t,x,u) \right) \right) M(V,\omega,u) du - \right.$$

$$- \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1) \varphi(t,x,u_2) \times$$

$$\left. \times \left[M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) - M(V_1,\omega_1,u_1) M(V,\omega,u_2) \right] du_1 du_2 \right|.$$

Існування отриманого відхилу забезпечують умови теореми. Оцінимо праву частину таким чином:

$$\Delta \leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial \varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| M(V,\omega,u)\, du + \right.$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1) \varphi(t,x,u_2) \times$$

$$\left. \times \left| M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) - M(V_1,\omega_1,u_1) M(V,\omega,u_2) \right| du_1 du_2 \right] \leq$$

$$\leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| M(V,\omega,u)du +$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \times$$

$$\times \left[M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) + M(V_1,\omega_1,u_1)M(V,\omega,u_2) \right] du_1 du_2 \Bigg].$$

Введемо величину Δ':

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^9} \left| \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| M(V,\omega,u)du dV d\omega +$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \times$$

$$\times \left[M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) + M(V_1,\omega_1,u_1)M(V,\omega,u_2) \right] du_1 du_2 \Bigg] =$$

$$= \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^9} \left| \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| M(V,\omega,u) dV d\omega du +$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega \int\limits_{\mathbb{R}^3} dV_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\omega_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \times$$

$$\times \left[M\left(V_1^*, \omega_1^*, u_1\right) M\left(V^*, \omega^*, u_2\right) + M(V_1,\omega_1,u_1)M(V,\omega,u_2) \right] \Bigg].$$

Існування величини Δ' забезпечується умовами обмеженості та інтегровності, що наведені у формулюванні теореми.

Аргументуємо зміну порядку інтегрування. У першому доданку підінтегральна функція неперервна за змінними $t,\ x,\ V$ і ω за припущенням теореми, а інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| M(V,\omega,u)du$$

збігається рівномірно на $\mathbb{R}^6$ за теоремою Веєрштрасса та завдяки умові теореми. Дійсно, має місце оцінка

$$\left| \left| \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t} + \left(V, \frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x} \right) \right| \rho I^{3/2} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^3 e^{-\beta\left((V-u)^2 + I\omega^2\right)} \right| \leq$$

$$\leq \rho I^{3/2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^3 e^{-\beta\left((V-u)^2+I\omega^2\right)}\left(\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}\right|+|V|\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right|\right),$$

яка інтегровна за умовою теореми. У другому доданку підінтегральна функція неперервна, що випливає з умов теореми, а внутрішній інтеграл збігається рівномірно за змінними $u_1,\ u_2,$ оскільки існує інтегровна мажоранта. Таким чином, зміна порядку інтегрування є справедливою.

Інтеграл зіткнень можна записати у вигляді [4]

$$Q(f,g)=G(f,g)-fL(g), \tag{7}$$

де

$$G(f,g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV_1\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha B(V-V_1,\alpha)f\left(t,x,V_1^*,\omega_1^*\right)g\left(t,x,V^*,\omega^*\right),$$

а

$$L(g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV_1\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha B(V-V_1,\alpha)g(t,x,V_1,\omega_1).$$

Крім того, будемо використовувати скорочення $M_i=M(V,\omega,u_i),$ де індекс i набуває значень 1 і 2. Тоді, використовуючи (7), отримуємо

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^9}\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}+\left(V,\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right)\right|M(V,\omega,u)dVd\omega du+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega\left[G(M_1,M_2)+M_1L(M_2)\right]\Bigg]. \tag{8}$$

У роботі [6] було встановлено, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega Q(M_1,M_2)=0.$$

Беручи до уваги (7), маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega M_1L(M_2)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega G(M_1,M_2). \tag{9}$$

Використовуючи (9) та обчислюючи у (8) інтеграл по кутових швидкостях, одержуємо

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}+\left(V,\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right)\right|\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\beta(V-u)^2}dVdu+$$

$$+2\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega G(M_1,M_2).$$

Виконаємо у першому доданку заміну змінних

$$\sqrt{\beta}(V-u)=w,$$
$$V=\frac{1}{\sqrt{\beta}}w+u,$$

якобіан якої $J=\beta^{-3/2}$. Тоді перший доданок у Δ' дорівнює

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}w+u,\quad\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right)\right|\frac{\rho}{\pi^{3/2}}\,e^{-w^2}dwdu.$$

У роботі [7] було показано, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}dV\int\limits_{\mathbb{R}^3}d\omega G(M_1,M_2)=\frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq_1e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}+u_1-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}-u_2\right|.$$

Таким чином, остаточний вираз для величини Δ' має вигляд

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}+\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}w+u,\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right)\right|\frac{\rho}{\pi^{3/2}}\,e^{-w^2}dwdu+$$
$$+\frac{2d^2\rho^2}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq_1e^{-q^2-q_1^2}\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}+u_1-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}-u_2\right|.$$

З огляду на позначення маємо $\beta_1=\beta_2=\beta$. Застосовуючи наведену вище лему про неперервність супремуму, можно показати (як це зроблено для випадку твердих куль у [5]), що вираз для Δ' неперервний за змінною

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

коли γ прямує до $+0$, що рівносильно $\beta\to+\infty$. Тоді можемо виконати граничний перехід

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta'=\lim_{\gamma\to+0}\Delta'=$$
$$=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial t}+\left(u,\frac{\partial\varphi(t,x,u)}{\partial x}\right)\right|\frac{\rho}{\pi^{3/2}}\,e^{-w^2}dwdu+$$
$$+\frac{2d^2\rho^2}{\pi^2}\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq\int\limits_{\mathbb{R}^3}dq_1e^{-q^2-q_1^2}|u_1-u_2|.$$

Обчислюючи інтеграли за змінними w, q і q_1, отримуємо (6).

Теорему доведено.

Наведемо достатню умову мінімізації рівномірно-інтегрального відхилу (5) для розподілу (4). Оскільки коефіцієнтна функція не залежить від вибору моделі часток, а умови теореми аналогічні випадку твердих куль, про що свідчать результати роботи [5], то достатні умови мінімізації розглянутого відхилу збігаються з наведеними у згаданій статті.

Наслідок. *Нехай виконуються всі умови доведеної вище теореми. Тоді відхил* Δ *можна зробити як завгодно малим, якщо коефіцієнтна функція* $\varphi(t,x,u)$ *має вигляд*

$$\varphi(t,x,u) = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}, \tag{10}$$

де $C(x-ut)$ *— будь-яка гладка, додатна та обмежена разом зі своїми похідними функція,* u_0 *— довільний фіксований вектор, а* $P \to +\infty$.

Доведення наслідку див. у [5].

Варто зазначити, що умову $P \to +\infty$ можна замінити на $d \to 0$. Також у (10) аргумент функції $C(x-ut)$ можна замінити на $[u \times x]$, а замість експоненти використовувати будь-яку δ-подібну функцію.

4. Висновки. Побудований у теоремі розподіл є математичною моделлю, що наближено описує взаємодію континуального набору максвеллівських течій у газі з шорсткуватих куль, які мають однакову кутову швидкість ω. При цьому температура течій зменшується, що забезпечує довільну мализну відповідного відхилу (5) між частинами рівняння Брайана – Піддака. Також зазначимо, що для більш цікавої з фізичної точки зору моделі шорсткуватих куль залишаються справедливими результати, аналогічні тим, що були отримані раніше для більш простої моделі твердих куль.

Література

1. S. Chapman, T. G. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1952).
2. G. H. Bryan, *On the application of the determinantal relation to the kinetic theory of polyatomic gases*, Rept. Brit. Assoc. Adv. Sci., **64**, 102 – 106 (1894).
3. F. B. Pidduck, *The kinetic theory of a special type of rigid molecule*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **101**, 101 – 110 (1922).
4. C. Cercignani, *The Boltzman equation and its applications*, Springer, New York (1988).
5. В. Д. Гордевский, Е. С. Сазонова, *Континуальный аналог бимодальных распределений*, Теор. и мат. физика, **171**, № 3, 483 – 492 (2012).
6. В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов, *Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана – Пиддака*, Вестн. ХНУ им. В. Н. Каразина, Математика, прикл. математика и механика, **990**, № 64, 27 – 41 (2011).
7. V. D. Gordevskyy, *Approximate biflow solutions of the kinetic Bryan – Pidduck equation*, Math. Methods Appl. Sci., **23**, 1121 – 1137 (2003).
8. В. Д. Гордевский, А. А. Гукалов, *Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер*, Укр. мат. журн., **63**, № 5, 629 – 639 (2011).
9. В. Д. Гордевский, *Двухпотоковое распределение с винтовыми модами*, Теор. и мат. физика, **126**, № 2, 283 – 300 (2001).

Одержано 02.03.19