

Денис Хусаїнов, Андрій Шатирко¹ (Київський національний університет імені Тараса Шевченка),
Бедріх Пужа, Вероніка Новотна (Технічний університет Брно, Чеська Республіка)

ВИКОРИСТАННЯ ДРУГОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОТРИМАННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ В СИСТЕМАХ З КВАДРАТИЧНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

By using the apparatus of Lyapunov's direct method with a function from the class of quadratic forms, we establish algebraic sufficient conditions for the stability of trivial solutions to the nonlinear systems of differential equations of the second and third orders.

За допомогою апарату прямого методу Ляпунова з функцією у класі квадратичних форм для нелінійних систем диференціальних рівнянь другого й третього порядку побудовано алгебраїчні достатні умови стійкості тривіальних розв'язків.

Цю роботу присвячено розвитку методів досліджень стійкості, які проводилися першим із співавторів спільно з О. М. Шарковським та опубліковані у роботах [1–3]. Слід відмітити багатогранність досліджень математичної теорії систем, проведених О. М. Шарковським [4, 5]. Поряд з відомими роботами із загальної теорії динамічних систем з його ініціативи проводилися дослідження стійкості положення рівноваги нелінійних динамічних систем, що описуються як звичайними диференціальними рівняннями, так і рівняннями з післядією, зокрема з використанням другого методу Ляпунова. Автори вдячні О. М. Шарковському за те, що він звернув увагу на геометрію другого методу Ляпунова та його особливості щодо динаміки систем з післядією. Деякі з цих ідей знайшли застосування, зокрема, в роботах [6, 7].

Одним із універсальних методів дослідження нелінійних динамічних систем є другий метод Ляпунова. Загальноприйнятим є зведення досліджуваного розв'язку до нульового розв'язку та дослідження нульового положення рівноваги [8–10]. Водночас буває, що нелінійна система не має нульового розв'язку, а існує деяка область, що знаходиться в деякому околі початку координат, яка є асимптотично стійкою, і потрібно провести оцінювання цієї області. Зокрема, значна кількість „дивних атракторів” являють собою асимптотично стійкі множини, що знаходяться в деякому околі нуля. У ряді випадків з використанням методу квадратичних функцій Ляпунова можна провести оцінювання області стійкості, а саме, обчислити еліпс, всередині якого знаходяться ці області.

Актуальність вивчення систем з нелінійністю квадратичного вигляду у правій частині підтверджується рядом сучасних публікацій (див., наприклад, [11, 12]), а також обумовлена їх частим використанням при розгляді багатьох практичних задач, зокрема, у цифровій обробці сигналів [13, 14], теорії популяцій [7]. Близькі питання з використанням функцій Ляпунова розглянуто в роботах [15–18]. Також багато інших прикладів застосувань можна знайти, реферуючи роботи [13, 19] та посилання в них.

¹ Відповідальний за листування, e-mail: shatyrko.a@knu.ua.

1. Оцінка області стійкості у нелінійних системах з виділеною лінійною частиною.

Розглянемо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь із виділеною лінійною частиною та нелінійністю вищого порядку

$$\dot{x} = Ax + R(x), \quad x \in R^n, \quad |R(x)| \leq N|x|^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

В цьому випадку система (1) має нульовий розв'язок.

Означення 1. Назвемо множину U_{stab} областю асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги динамічної системи (1), якщо для довільного розв'язку $x(t)$ системи (1) з початковою умовою $x(t_0) \notin U_{\text{stab}}$ при $t \rightarrow \infty$ буде виконуватись $x(t) \rightarrow U_{\text{stab}}$.

Для отримання оцінки області стійкості U_{stab} нульового розв'язку системи (1) будемо використовувати апарат другого методу Ляпунова. Виберемо в якості функції Ляпунова квадратичну форму $V(x) = x^T H x$ з додатно визначеною матрицею $H \in R^{n \times n}$. Повна похідна функції Ляпунова вздовж розв'язків системи має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = [Ax + R(x)]^T H x + x^T H [Ax + R(x)] = x^T (A^T H + H A) x + 2x^T H R(x).$$

Нехай матриця A асимптотично стійка, тобто $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1, n}$. Тоді для довільної додатно визначеної матриці C матричне рівняння Ляпунова

$$A^T H + H A = -C$$

має єдиний розв'язок — додатно визначену матрицю H . Можемо записати

$$\frac{d}{dt}V(x) = -x^T C x + 2x^T H R(x) \leq -\lambda_{\min}(C)|x|^2 + 2|H||x||R(x)|,$$

де $\lambda_{\min}(C)$ — мінімальне власне число симетричної додатно визначеної матриці. Тут і далі будемо використовувати узгоджені векторні та матричні норми: $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ — евклідова норма вектора, $|H| = \lambda_{\max}(H)$ — спектральна норма матриці. Як випливає з теореми про стійкість за лінійним наближенням [8], нульовий розв'язок системи (1) буде асимптотично стійким, а область асимптотичної стійкості нульового розв'язку включає множину

$$U_{\text{stab}} = \left\{ x \in R^n : |R(x)| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H|}|x| \right\}.$$

2. Скалярні рівняння з квадратичною нелінійністю. Нехай нелінійність $R(x)$ має квадратичний вигляд. Для скалярного диференціального рівняння

$$\dot{x} = -ax + bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (2)$$

функцію Ляпунова вибираємо у вигляді $V(x) = hx^2$, $h > 0$. Повна похідна вздовж розв'язків рівняння (2) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = -2hx^2(a - bx).$$

Областю стійкості в цьому випадку є множина $-\infty < x < a/b$.

3. Системи з квадратичною правою частиною загального вигляду. Розглянемо систему диференціальних рівнянь із квадратичною правою частиною. Запишемо її в універсальному векторно-матричному вигляді [9, 10]

$$\dot{x} = Ax + S_2(x), \quad S_2(x) = X^T Bx, \quad (3)$$

$$X^T = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_n^T], \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad X_1^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad X_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & \dots & b_{1n}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 & \dots & b_{2n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot \\ b_{1n}^1 & b_{2n}^1 & \dots & b_{nn}^1 \end{bmatrix}, \dots, \quad B_n = \begin{bmatrix} b_{11}^n & b_{12}^n & \dots & b_{1n}^n \\ b_{12}^n & b_{22}^n & \dots & b_{2n}^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{1n}^n & b_{2n}^n & \dots & b_{nn}^n \end{bmatrix}.$$

Тут X_i^T — матриці, в яких в i -му рядку стоїть вектор $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а інші елементи нульові, B_i , $i = \overline{1, n}$, — симетричні матриці.

Для систем з нелінійністю квадратичного вигляду (3) повна похідна функції Ляпунова з класу квадратичних форм має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = [Ax + X^T Bx]^T Hx + x^T H[Ax + X^T Bx] = -x^T Cx + S_3(x),$$

де $S_3(x)$ — кубічна форма вигляду

$$S_3(x) = x^T (B^T XH + HX^T B)x.$$

Область гарантованої асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги має вигляд внутрішності еліпса [9, 10]

$$U_s = \left\{ x \in R^n : |x| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H||B|} \right\}.$$

Розглянемо квадратичну систему вигляду

$$\dot{x} = Ax + X^T Bx + c, \quad x \in R^n,$$

де $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ — сталий вектор. Якщо система квадратичних рівнянь

$$Ax + X^T Bx + c = 0$$

має ненульовий розв'язок $x = x_0$, то заміною типу „паралельного переносу” $x = x_1 + x_0$ дослідження стійкості й оцінювання області притягання розв'язку $x = x_0$ можна проводити, використовуючи систему рівнянь збурень

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + X_1^T Bx_0 + X_0^T Bx_1 + X_1^T Bx_1, \quad x_1 \in R^n,$$

яку можна звести до стандартного вигляду

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + X_1^T Bx_1, \quad x_1 \in R^n.$$

Тут x_1 , X_1 , X_0 отримані в результаті застосування „паралельного переносу” $x = x_1 + x_0$ до початкової системи і мають вигляд, аналогічний наведеному на початку пункту.

4. Диференціальні системи з квадратичною правою частиною на площині. Досліджуватимемо стійкість нульового положення рівноваги системи (3) на площині. Попередньо розглянемо таке припущення.

Довільну кубічну форму на площині

$$S_3(x_1, x_2) = c_{30}x_1^3 + c_{21}x_1^2x_2 + c_{12}x_1x_2^2 + c_{03}x_2^3 \quad (4)$$

можна записати у вигляді „псевдоквадратичної форми”

$$S_3(x) = x^T L_1(x)x, \quad (5)$$

де $L_1(x)$ — симетрична матриця, що складається з лінійних елементів

$$L_1(x) = \begin{bmatrix} l_{11}(x) & l_{12}(x) \\ l_{12}(x) & l_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad l_{11} = \begin{pmatrix} l_{11}^1 \\ l_{11}^2 \end{pmatrix}, \quad l_{12} = \begin{pmatrix} l_{12}^1 \\ l_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad l_{22} = \begin{pmatrix} l_{22}^1 \\ l_{22}^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Справді, розкриваючи форму (5), отримуємо

$$\begin{aligned} S_3(x) &= (x_1, x_2) \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T l_{11} x_1^2 + 2x^T l_{12} x_1 x_2 + x^T l_{22} x_2^2 \\ &= (l_{11}^1 x_1 + l_{11}^2 x_2) x_1^2 + 2(l_{12}^1 x_1 + l_{12}^2 x_2) x_1 x_2 + (l_{22}^1 x_1 + l_{22}^2 x_2) x_2^2 \\ &= l_{11}^1 x_1^3 + (l_{11}^2 + 2l_{12}^1) x_1^2 x_2 + (2l_{12}^2 + l_{22}^1) x_1 x_2^2 + l_{22}^2 x_2^3. \end{aligned}$$

Таким чином, кубічну форму на площині вигляду (5), (6) можна записати у вигляді (4), де

$$c_{30} = l_{11}^1, \quad c_{21} = l_{11}^2 + 2l_{12}^1, \quad c_{12} = 2l_{12}^2 + l_{22}^1, \quad c_{03} = l_{22}^2.$$

Використаємо отриманий результат для побудови умов глобальної асимптотичної стійкості нульового положення рівноваги. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з квадратичною правою частиною на площині:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}^1x_1^2 + b_{12}^1x_1x_2 + b_{22}^1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{11}^2x_1^2 + 2b_{12}^2x_1x_2 + b_{22}^2x_2^2 \end{aligned} \quad (7)$$

або у векторно-матричній формі

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 \\ b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Запишемо її у вигляді (3):

$$\dot{x} = Ax + X^T Bx.$$

Вона має стаціонарне положення рівноваги

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = 0.$$

Якщо скористатися функцією Ляпунова квадратичного вигляду $V(x) = x^T Hx$, то її повна похідна в силу системи (7) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = -x^T Cx + S_3(x), \quad S_3(x) = x^T [B^T XH + HX^T B]x,$$

тобто повна похідна складається з суми від'ємно визначеної квадратичної форми й кубічної.

Розглянемо кубічну складову $S_3(x) = x^T \bar{L}_2(x)x$. Перетворимо матрицю $\bar{L}_2(x)$ таким чином:

$$\begin{aligned} \bar{L}_2(x) = B^T XH + HX^T B &= \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 \\ b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$b_1^1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{12}^1 \end{pmatrix}, \quad b_2^1 = \begin{pmatrix} b_{12}^1 \\ b_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad b_1^2 = \begin{pmatrix} b_{11}^2 \\ b_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad b_2^2 = \begin{pmatrix} b_{12}^2 \\ b_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\bar{L}_2(x) = B^T XH + HX^T B = \begin{bmatrix} (b_1^1)^T & (b_2^1)^T \\ (b_1^2)^T & (b_2^2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \theta \\ \theta & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^T & \theta^T \\ \theta^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_1^1)^T x & (b_1^2)^T x \\ (b_2^1)^T x & (b_2^2)^T x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^T b_1^1 & x^T b_2^1 \\ x^T b_1^2 & x^T b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11}(x) & \bar{l}_{12}(x) \\ \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{22}(x) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{l}_{11}(x) &= x^T(h_{11}b_1^1 + h_{12}b_1^2), \quad \bar{l}_{12}(x) = x^T[h_{11}b_2^1 + h_{12}(b_1^1 + b_2^2) + h_{22}b_1^2], \\
\bar{l}_{22}(x) &= x^T(h_{12}b_2^1 + h_{22}b_2^2).
\end{aligned}$$

Таким чином, кубічна складова повної похідної функції Ляпунова в силу системи (7) має вигляд

$$S_3(x) = X^T(B^T XH + HX^T B)x = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} \bar{l}_{11}(x) & \bar{l}_{12}(x) \\ \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{l}_{11}(x) &= 2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} h_{11}b_{11}^1 + h_{12}b_{11}^2 \\ h_{11}b_{12}^1 + h_{12}b_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{l}_{12}(x) = 2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} h_{11}b_{12}^1 + h_{12}(b_{11}^1 + b_{12}^2) + h_{22}b_{11}^2 \\ h_{11}b_{22}^1 + h_{12}(b_{12}^1 + b_{22}^2) + h_{22}b_{12}^2 \end{pmatrix}, \\
\bar{l}_{22}(x)x_2^2 &= 2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} h_{12}b_{12}^1 + h_{22}b_{12}^2 \\ h_{12}b_{22}^1 + h_{22}b_{22}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Порівнюючи з кубічною формою

$$S_3(x) = x^T L_2(x)x,$$

де

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \begin{bmatrix} l_{11}(x) & l_{12}(x) \\ l_{12}(x) & l_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} \end{bmatrix}, \\
l_{11} &= \begin{pmatrix} l_{11}^1 \\ l_{11}^2 \end{pmatrix}, \quad l_{12} = \begin{pmatrix} l_{12}^1 \\ l_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad l_{22} = \begin{pmatrix} l_{22}^1 \\ l_{22}^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
l_{11}^1 &= 2h_{11}b_{11}^1 + 2h_{12}b_{11}^2, \quad l_{12}^1 = h_{11}b_{12}^1 + h_{12}(b_{11}^1 + b_{12}^2) + h_{22}b_{11}^2, \\
l_{22}^1 &= h_{12}b_{12}^1 + h_{22}b_{12}^2, \quad l_{11}^2 = 2h_{11}b_{12}^1 + 2h_{12}b_{12}^2, \\
l_{12}^2 &= h_{11}b_{22}^1 + h_{12}(b_{12}^1 + b_{22}^2) + h_{22}b_{12}^2, \quad l_{22}^2 = h_{12}b_{22}^1 + h_{22}b_{22}^2.
\end{aligned}$$

Для того щоб повна похідна квадратичної функції Ляпунова була знаковизначеною, достатньо, щоб кубічна форма тотожно дорівнювала нулю. А для цього необхідно й достатньо, щоб всі її коефіцієнти дорівнювали нулю, тобто

$$c_{30} = l_{11}^2 = 0, \quad c_{21} = l_{11}^2 + 2l_{12}^1 = 0, \quad c_{12} = 2l_{12}^2 + l_{22}^1 = 0, \quad c_{03} = l_{22}^1 = 0$$

або

$$\begin{aligned} l_{11}^2 &= 2h_{11}b_{12}^1 + h_{12}b_{12}^2 = 0, \\ l_{11}^2 + 2l_{12}^1 &= 2h_{11}b_{12}^1 + h_{12}b_{12}^2 + 2[h_{11} + h_{12}(b_{11}^1 + b_{12}^2) + h_{22}b_{11}^2] = 0, \\ 2l_{12}^1 + l_{22}^1 &= 2[h_{11}b_{12}^1 + h_{12}(b_{11}^1 + b_{12}^2) + h_{22}b_{11}^2] + h_{12}b_{12}^1 + h_{22}b_{12}^2 = 0, \\ l_{22}^1 &= h_{12}b_{12}^1 + h_{22}b_{12}^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отримали чотири лінійних однорідних рівняння з трьома невідомими h_{11} , h_{12} , h_{22} . Якщо система (8) має ненульовий розв'язок, то

$$S_3(x_1, x_2) = x^T (B^T X H + H X^T B) x \equiv 0,$$

тобто кубічна складова повної похідної зникає і справджується рівність

$$\frac{d}{dt}V(x) = -x^T C x.$$

Звідси випливає, що нульове положення рівноваги буде асимптотично стійким.

Таким чином, справедливим є таке твердження.

Теорема 1. Для того щоб нульовий розв'язок системи рівнянь з квадратичною правою частиною на площині (7) був глобально асимптотично стійким, достатньо, щоб система алгебраїчних рівнянь (8) мала ненульовий розв'язок h_{11}, h_{12}, h_{22} , при якому матриці

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

і

$$C = -A^T H - H A$$

додатно визначені.

Зауваження 1. Фактично отримали вимогу рівності нулю всіх коефіцієнтів кубічної складової.

Зауваження 2. Слід зазначити, що у випадку асимптотичної стійкості матриці A множина додатно визначених матриць H , при яких матриця C також буде додатно визначеною, утворює опуклий конус в $(n(n+1)/2)$ -вимірному просторі матриць H . Умова (8) „значно обмежує конус”. Ця умова накладає достатньо „жорсткі” обмеження на параметри початкової системи.

5. Диференціальні системи з квадратичною частиною у тривимірному просторі. Як і в попередньому випадку, розглянемо кубічну форму загального вигляду

$$S_3(x) = x^T L_3(x) x,$$

де

$$L_3(x) = \begin{bmatrix} l_{11}(x) & l_{12}(x) & l_{13}(x) \\ l_{12}(x) & l_{22}(x) & l_{23}(x) \\ l_{13}(x) & l_{23}(x) & l_{33}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} & x^T l_{13} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} & x^T l_{23} \\ x^T l_{13} & x^T l_{23} & x^T l_{33} \end{bmatrix},$$

$L_3(x)$ — симетрична матриця, що складається з лінійних елементів

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad l_{11} = \begin{pmatrix} l_{11}^1 \\ l_{11}^2 \\ l_{11}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{12} = \begin{pmatrix} l_{12}^1 \\ l_{12}^2 \\ l_{12}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{13} = \begin{pmatrix} l_{13}^1 \\ l_{13}^2 \\ l_{13}^3 \end{pmatrix},$$

$$l_{22} = \begin{pmatrix} l_{22}^1 \\ l_{22}^2 \\ l_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{23} = \begin{pmatrix} l_{23}^1 \\ l_{23}^2 \\ l_{23}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{33} = \begin{pmatrix} l_{33}^1 \\ l_{33}^2 \\ l_{33}^3 \end{pmatrix}.$$

Як і для систем на площині, запишемо її таким чином:

$$S_3(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} & x^T l_{13} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} & x^T l_{23} \\ x^T l_{13} & x^T l_{23} & x^T l_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x^T l_{11} x_1^2 + 2x^T l_{12} x_1 x_2 + 2x^T l_{13} x_1 x_3 + x^T l_{22} x_2^2 + 2x^T l_{23} x_2 x_3 + x^T l_{33} x_3^2$$

$$= (l_{11}^1 x_1 + l_{11}^2 x_2 + l_{11}^3 x_3) x_1^2 + 2(l_{12}^1 x_1 + l_{12}^2 x_2 + l_{12}^3 x_3) x_1 x_2 + 2(l_{13}^1 x_1 + l_{13}^2 x_2 + l_{13}^3 x_3) x_1 x_3$$

$$+ (l_{22}^1 x_1 + l_{22}^2 x_2 + l_{22}^3 x_3) x_2^2 + 2(l_{23}^1 x_1 + l_{23}^2 x_2 + l_{23}^3 x_3) x_2 x_3 + (l_{33}^1 x_1 + l_{33}^2 x_2 + l_{33}^3 x_3) x_3^2$$

$$= l_{11}^2 x_1^3 + (l_{11}^1 + 2l_{12}^1) x_1^2 x_2 + (l_{11}^3 + 2l_{13}^1) x_1^2 x_3 + (2l_{12}^2 + l_{22}^1) x_1 x_2^2 + (2l_{12}^3 + l_{22}^2 + l_{23}^1) x_1 x_2 x_3$$

$$+ (2l_{13}^3 + l_{33}^1) x_1 x_3^2 + l_{22}^2 x_2^3 + (l_{22}^1 + 2l_{23}^1) x_2^2 x_3 + (2l_{23}^2 + l_{33}^2) x_2 x_3^2 + l_{33}^3 x_3^3.$$

Тоді отримаємо, що

$$S_3(x) = c_{300} x_1^3 + c_{210} x_1^2 x_2 + c_{201} x_1^2 x_3 + c_{120} x_1 x_2^2 + c_{111} x_1 x_2 x_3 + c_{102} x_1 x_3^2$$

$$+ c_{030} x_2^3 + c_{021} x_2^2 x_1 + c_{012} x_2 x_3^2 + c_{003} x_3^3,$$

де

$$c_{300} = l_{11}^1, \quad c_{210} = l_{11}^2 + 2l_{12}^1, \quad c_{201} = l_{11}^3 + 2l_{13}^1,$$

$$c_{120} = 2l_{12}^2 + l_{22}^1, \quad c_{111} = 2l_{12}^3 + 2l_{13}^2 + 2l_{23}^1,$$

$$c_{102} = 2l_{13}^3 + l_{33}^1, \quad c_{030} = l_{22}^2, \quad c_{021} = l_{22}^3 + 2l_{23}^1, \quad c_{012} = 2l_{23}^2 + l_{33}^2, \quad c_{003} = l_{33}^3.$$

Систему диференціальних рівнянь з квадратичною правою частиною у тривимірному просторі можна записати так:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}^1x_1^2 + 2b_{12}^1x_1x_2 + 2b_{13}^1x_1x_3 + b_{22}^1x_2^2 + 2b_{23}^1x_2x_3 + b_{33}^1x_3^2, \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{11}^2x_1^2 + 2b_{12}^2x_1x_2 + 2b_{13}^2x_1x_3 + b_{22}^2x_2^2 + 2b_{23}^2x_2x_3 + b_{33}^2x_3^2, \\
\dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{11}^3x_1^2 + 2b_{12}^3x_1x_2 + 2b_{13}^3x_1x_3 + b_{22}^3x_2^2 + 2b_{23}^3x_2x_3 + b_{33}^3x_3^2
\end{aligned} \quad (9)$$

або у векторно-матричній формі

$$\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \\
X_1 &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 \\ b_{13}^1 & b_{23}^1 & b_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 & b_{13}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 & b_{23}^2 \\ b_{13}^2 & b_{23}^2 & b_{33}^2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} b_{11}^3 & b_{12}^3 & b_{13}^3 \\ b_{12}^3 & b_{22}^3 & b_{23}^3 \\ b_{13}^3 & b_{23}^3 & b_{33}^3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

тобто

$$\dot{x} = Ax + X^T Bx.$$

Якщо знову ж таки розглядати функцію Ляпунова квадратичного вигляду $V(x) = x^T Hx$, то її повна похідна вздовж розв'язків системи з квадратичною правою частиною (9) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = (Ax + X^T Bx)^T Hx + x^T H(Ax + X^T Bx) = -x^T Cx + S_3(x).$$

Таким чином, у випадку асимптотичної стійкості матриці A повна похідна також складається з суми від'ємно визначеної квадратичної форми й кубічної складової $S_3(x) = x^T \bar{L}_3(x)x$. Знову, як і у двовимірному випадку, розглянемо окремо кубічну складову $S_3(x)$. Перетворимо її внутрішню частину таким чином:

$$\bar{L}_3(x) = B^T XH + HX^T B = [B_1^T, B_2^T, B_3^T] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} H + H[X_1^T, X_2^T, X_3^T] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
b_1^1 &= \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{12}^1 \\ b_{13}^1 \end{pmatrix}, \quad b_2^1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 \\ b_{22}^1 \\ b_{23}^1 \end{pmatrix}, \quad b_3^1 = \begin{pmatrix} b_{31}^1 \\ b_{32}^1 \\ b_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad b_1^2 = \begin{pmatrix} b_{11}^2 \\ b_{12}^2 \\ b_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad b_2^2 = \begin{pmatrix} b_{21}^2 \\ b_{22}^2 \\ b_{23}^2 \end{pmatrix}, \\
b_3^2 &= \begin{pmatrix} b_{31}^2 \\ b_{32}^2 \\ b_{33}^2 \end{pmatrix}, \quad b_1^3 = \begin{pmatrix} b_{11}^3 \\ b_{12}^3 \\ b_{13}^3 \end{pmatrix}, \quad b_2^3 = \begin{pmatrix} b_{21}^3 \\ b_{22}^3 \\ b_{23}^3 \end{pmatrix}, \quad b_3^3 = \begin{pmatrix} b_{31}^3 \\ b_{32}^3 \\ b_{33}^3 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\bar{L}_3(x) &= B_1^T X_1 H + H X_1^T B_1 = \begin{bmatrix} (b_1^1)^T & (b_1^2)^T & (b_1^3)^T \\ (b_2^1)^T & (b_2^2)^T & (b_2^3)^T \\ (b_3^1)^T & (b_3^2)^T & (b_3^3)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & \theta & \theta \\ \theta & x & \theta \\ \theta & \theta & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^T & \theta^T & \theta^T \\ \theta^T & x^T & \theta^T \\ \theta^T & \theta^T & x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (b_1^1)^T x & (b_1^2)^T x & (b_1^3)^T x \\ (b_2^1)^T x & (b_2^2)^T x & (b_2^3)^T x \\ (b_3^1)^T x & (b_3^2)^T x & (b_3^3)^T x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^T b_1^1 & x^T b_2^1 & x^T b_3^1 \\ x^T b_1^2 & x^T b_2^2 & x^T b_3^2 \\ x^T b_1^3 & x^T b_2^3 & x^T b_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11}(x) & \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{13}(x) \\ \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{22}(x) & \bar{l}_{23}(x) \\ \bar{l}_{13}(x) & \bar{l}_{23}(x) & \bar{l}_{33}(x) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{l}_{11}(x) &= x^T [h_{11} b_1^1 + h_{12} b_1^2 + h_{13} b_1^3], \\ \bar{l}_{12}(x) &= x^T [h_{12} b_1^1 + h_{22} b_1^2 + h_{23} b_1^3 + h_{11} b_2^1 + h_{12} b_2^2 + h_{13} b_2^3], \\ \bar{l}_{13}(x) &= x^T [h_{13} b_1^1 + h_{23} b_1^2 + h_{33} b_1^3 + h_{11} b_3^1 + h_{12} b_3^2 + h_{13} b_3^3], \\ \bar{l}_{22}(x) &= x^T [h_{12} b_2^1 + h_{22} b_2^2 + h_{23} b_2^3], \\ \bar{l}_{23}(x) &= x^T [h_{13} b_2^1 + h_{23} b_2^2 + h_{33} b_2^3 + h_{12} b_3^1 + h_{22} b_3^2 + h_{23} b_3^3], \\ \bar{l}_{33}(x) &= x^T [h_{13} b_3^1 + h_{23} b_3^2 + h_{33} b_3^3].\end{aligned}$$

Таким чином, кубічна складова повної похідної вибраної функції Ляпунова має вигляд

$$S_3(x) = x^T \bar{L}_3(x) x, \quad \bar{L}_3(x) = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11}(x) & \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{13}(x) \\ \bar{l}_{12}(x) & \bar{l}_{22}(x) & \bar{l}_{23}(x) \\ \bar{l}_{13}(x) & \bar{l}_{23}(x) & \bar{l}_{33}(x) \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи її з кубічною формою

$$S_3(x) = x^T L_3(x) x,$$

де

$$L_3(x) = \begin{bmatrix} l_{11}(x) & l_{12}(x) & l_{13}(x) \\ l_{12}(x) & l_{22}(x) & l_{23}(x) \\ l_{13}(x) & l_{23}(x) & l_{33}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T l_{11} & x^T l_{12} & x^T l_{13} \\ x^T l_{12} & x^T l_{22} & x^T l_{23} \\ x^T l_{13} & x^T l_{23} & x^T l_{33} \end{bmatrix},$$

$$l_{11} = \begin{pmatrix} l_{11}^1 \\ l_{11}^2 \\ l_{11}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{12} = \begin{pmatrix} l_{12}^1 \\ l_{12}^2 \\ l_{12}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{13} = \begin{pmatrix} l_{13}^1 \\ l_{13}^2 \\ l_{13}^3 \end{pmatrix},$$

$$l_{22} = \begin{pmatrix} l_{22}^1 \\ l_{22}^2 \\ l_{22}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{23} = \begin{pmatrix} l_{23}^1 \\ l_{23}^2 \\ l_{23}^3 \end{pmatrix}, \quad l_{33} = \begin{pmatrix} l_{33}^1 \\ l_{33}^2 \\ l_{33}^3 \end{pmatrix},$$

отримуємо

$$l_{11} = h_{11}b_1^1 + h_{12}b_1^2 + h_{13}b_1^3,$$

$$l_{12} = h_{11}b_1^1 + h_{12}b_1^2 + h_{21}b_1^3 + h_{11}b_2^1 + h_{12}b_2^2 + h_{13}b_2^3,$$

$$l_{13} = h_{13}b_1^1 + h_{23}b_1^2 + h_{33}b_1^3 + h_{11}b_3^1 + h_{12}b_3^2 + h_{13}b_3^3,$$

$$l_{22} = h_{12}b_2^1 + h_{22}b_2^2 + h_{23}b_2^3,$$

$$l_{23} = h_{13}b_2^1 + h_{23}b_2^2 + h_{33}b_2^3 + h_{12}b_3^1 + h_{22}b_3^2 + h_{23}b_3^3,$$

$$l_{33} = h_{13}b_3^1 + h_{23}b_3^2 + h_{33}b_3^3.$$

Для того щоб повна похідна вибраної квадратичної функції Ляпунова була знаковизначеною, достатньо, щоб її складова, кубічна форма, тотожно дорівнювала нулю, тобто щоб виконувалися рівності

$$l_{11} = 0, \quad l_{12} = 0, \quad l_{13} = 0, \quad l_{22} = 0, \quad l_{23} = 0, \quad l_{33} = 0. \quad (10)$$

Тоді буде виконуватись умова

$$S_3(x) = x^T (B^T X H + H X^T B) x \equiv 0$$

і

$$\frac{d}{dt} V(x) = -x^T C x.$$

Таким чином, повна похідна буде від'ємно визначеною функцією, а нульове положення рівноваги — глобально асимптотично стійким. Для цього достатньо щоб система алгебраїчних рівнянь (10) мала ненульовий розв'язок. Отже, має місце твердження, аналогічне випадку на площині.

Теорема 2. Для того щоб нульовий розв'язок системи рівнянь з квадратичною правою частиною (9) був глобально асимптотично стійким, достатньо, щоб система алгебраїчних рівнянь (10) мала ненульовий розв'язок $h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33}$, при якому матриці

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix}$$

і

$$C = -A^T H - H A$$

будуть додатно визначені.

6. Висновок. З використанням наведеної у статті техніки в подальшому становлять інтерес узагальнення отриманих результатів на випадок багатовимірних систем диференціальних рівнянь з квадратичною правою частиною. Також наведений підхід може бути застосований до дослідження аналогічних систем, але вже описаних у термінах функціонально-диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. З практичної точки зору, отримані результати автори планують застосувати до дослідження динаміки систем, що описують поведінку атрактора Лоренца.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. Д. Я. Хусаинов, А. Н. Шарковский, *Осуществимые динамические системы на двумерных многообразиях*, Труды семинара по математической физике, вып. 3, 330–336 (1969).
2. Д. Я. Хусаинов, А. Н. Шарковский, *Об устойчивости движения относительно части переменных*, Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, Институт математики АН УССР, Киев (1973), с. 122–127.
3. Д. Я. Хусаинов, А. Н. Шарковский, *Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Функциональные и дифференциально-разностные уравнения, Институт математики АН УССР, Киев (1974), с. 141–147.
4. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovskii, *Dynamics of solutions of the simplest nonlinear boundary-value problems*, Ukr. Math. J., **51**, № 6, 907–925 (1999).
5. E. Yu. Romanenko, A. N. Sharkovskii, *Dynamical systems and simulation of turbulence*, Ukr. Math. J., **59**, № 2, 229–242 (2007).
6. D. Khusainov, A. Ivanov, I. Grytsay, *Stability of delay systems with quadratic nonlinearities*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **2**, № 2 (2006).
7. L. Berezensky, J. Bařtinec, J. Diblk, Z. Šmarda, *On a delay population model with quadratic nonlinearity*, Adv. Difference Equat., **2012**, Article 230 (2012).
8. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехтеориздат, Москва, Ленинград (1980).
9. В. Ф. Давидов, Д. Я. Хусаинов, *Мажорантні оцінки розв'язків диференціальних систем з квадратичною правою частиною*, Вісн. Київ. ун-ту, фіз.-мат. науки, 206–211 (1994).
10. Д. Я. Хусаинов, В. Ф. Давидов, *Оптимізація оцінки області стійкості квадратичних систем градієнтним методом*, Вісн. Київ. ун-ту, фіз.-мат. науки, вип. 4, 27–33 (1992).
11. R. Genesio, A. Tesi, *Stability analysis of quadratic systems*, IFAC: Nonlinear Control Systems Design, Capri, Italy (1989).
12. F. Amato et al., *Stability analysis of nonlinear quadratic systems via polyhedral Lyapunov functions*, Conf. Paper in Proc. Amer. Control Conf., July 2008; DOI: 10.1109/ACC.2008.4586833.
13. S. Neumeyer, V. S. Sorokin, J. J. Thomsen, *Effects of quadratic and cubic nonlinearities on a perfectly tuned parametric amplifier*, J. Sound and Vibration, **386**, 327–335 (2017).
14. Guoce Zhang, Bo Zhang, *Secondary resonance energy harvesting with quadratic nonlinearity*, Materials, MDPI, Basel, Switzerland (2020).
15. А. А. Мартынюк, В. А. Черниенко, *Достаточные условия устойчивости движения полиномиальных систем*, Прикл. механика, **56(66)**, № 1, 23–31 (2020).
16. А. А. Мартынюк, *Аналіз еквіобмеженості та стійкості руху істотно нелінійних систем*, Прикл. механіка, **59**, № 1, 69–78 (2023).
17. О. Г. Мазко, *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*, Наук. думка, Київ (2023).
18. В. В. Новицький, М. О. Зінчук, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовец, *Неперервні та дискретні майже консервативні динамічні системи та їх застосування*, Праці Інституту математики НАН України, **108** (2020).
19. Liao, Shih-Chi, Hemati, S. Maziar, P. Seiler, *Quadratic constraints for local stability analysis of quadratic systems* (2022); arXiv:2209.03565 [math.DS], DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.03565>.

Одержано 01.07.23