

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ БОЯНОВА – НАЙДЬОНОВА З НЕРІВНОСТЯМИ КОЛМОГОРОВСЬКОГО ТИПУ

We prove that the Boyanov–Naidenov problem $\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \rightarrow \sup$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, on the classes of functions $\Omega_p^r(A_0, A_r) := \{x \in L_\infty^r : \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}$, where $q \geq 1$ for $k \geq 1$ and $q \geq p$ for $k = 0$, is equivalent to the problem of finding the sharp constant $C = C(\lambda)$ in the Kolmogorov-type inequality

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq CL(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega_{p,\lambda}^r, \quad (1)$$

where $\alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}$, $\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b-a \leq \delta\}$, $\delta > 0$, $\Omega_{p,\lambda}^r := \bigcup\{\Omega_p^r(A_0, A_r) : A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p\}$, $\lambda > 0$, $\varphi_{\lambda,r}$ is a contraction of the ideal Euler spline of order r , and $L(x)_p := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b)\}$.

In particular, we obtain a sharp inequality of the form (1) on the classes $\Omega_{p,\lambda}^r$, $\lambda > 0$. We also prove the theorems on relationships for the Boyanov–Naidenov problems on the spaces of trigonometric polynomials and splines and establish the relevant sharp Bernstein-type inequalities.

Встановлено, що задача Боянова–Найдьонова $\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \rightarrow \sup$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, на класах функцій $\Omega_p^r(A_0, A_r) := \{x \in L_\infty^r : \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}$, де $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$, еквівалентна задачі про точну константу $C = C(\lambda)$ в нерівності колмогоровського типу

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq CL(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega_{p,\lambda}^r, \quad (1)$$

де $\alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}$, $\|x\|_{p,\delta} := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b-a \leq \delta\}$, $\delta > 0$, $\Omega_{p,\lambda}^r := \bigcup\{\Omega_p^r(A_0, A_r) : A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p\}$, $\lambda > 0$, $\varphi_{\lambda,r}$ – стиск ідеального сплайна Ейлера порядку r , $L(x)_p := \sup\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b)\}$.

Зокрема, отримано точну на класах $\Omega_{p,\lambda}^r$, $\lambda > 0$, нерівність вигляду (1). Теорема про взаємозв'язок і наслідки з них (точні нерівності бернштейнівського типу) доведено також для задачі Боянова–Найдьонова на просторах тригонометричних поліномів та сплайнів.

1. Вступ. Нехай $G = \mathbf{R}$ або $G = [\alpha, \beta]$. Будемо розглядати простори $L_p(G)$, $0 < p \leq \infty$, всіх вимірних за Лебегом функцій $x : G \rightarrow \mathbf{R}$, для яких $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, де

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{якщо } 0 < p < \infty, \\ \text{vrai sup}_{t \in G} |x(t)|, & \text{якщо } p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbf{N}$ і $p, s \in (0, \infty]$ через $L_{p,s}^r$ позначимо простір усіх функцій $x \in L_p(\mathbf{R})$, що мають локально абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$ -го порядку, причому $x^{(r)} \in L_s(\mathbf{R})$. Будемо писати $\|x\|_p$ замість $\|x\|_{L_p(\mathbf{R})}$ і L_∞^r замість $L_{\infty,\infty}^r$.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 47]), що задача про точну константу C в нерівності колмогоровського типу

$$\|x^{(k)}\|_q \leq C \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_s^{1-\alpha} \quad (1.1)$$

¹ E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com.

на класі функцій $x \in L_{p,s}^r$, де $\alpha = \frac{r-k+1/q-1/s}{r+1/p-1/s}$, а параметри $q, p, s \geq 1$, $r \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $k < r$, задовольняють умову $\alpha \leq (r-k)/r$, рівносильна екстремальній задачі

$$\|x^{(k)}\|_q \rightarrow \sup \quad (1.2)$$

на класі функцій $x \in L_{p,s}^r$ з обмеженнями

$$\|x^{(r)}\|_s \leq A_r, \quad \|x\|_p \leq A_0, \quad (1.3)$$

де A_0, A_r — задані додатні числа. Детальну бібліографію досліджень з даної тематики можна знайти в [1–3]. Зазначимо, що в роботі [4] досліджено питання про збіг точних констант в нерівностях типу (1.1) для періодичних функцій і в таких же нерівностях для неперіодичних функцій на числовій осі. Взаємозв'язок точних констант в нерівностях колмогоровського типу і нерівностях типу Колмогорова–Ремеза досліджено в [5]. Серед робіт, в яких досліджується питання про точні константи в нерівностях типу Колмогорова–Ремеза, відзначимо роботи [6–13].

Боянов і Найдьонов у [14] розглядали таку модифікацію задачі (1.2) з обмеженнями (1.3) при $p = s = \infty$. Для довільного відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ вони розв'язали задачу

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \rightarrow \sup, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

на класах функцій із заданою функцією порівняння, де Φ — неперервно диференційовна додатна функція на півосі $[0, \infty)$, така що $\Phi(t)/t$ не спадає і $\Phi(0) = 0$. Зокрема, ними було розв'язано задачу Ердьоша [15] про характеризацію тригонометричного полінома з фіксованою рівномірною нормою, графік якого на заданому відрізку $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ має максимальну довжину. Цю ж задачу для неперіодичних сплайнів на числовій осі було розв'язано в роботі [16]. В ряді робіт ця тематика отримала подальший розвиток. Через W позначимо клас неперервних, невід'ємних і опуклих функцій Φ , визначених на $[0, \infty)$, таких що $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ і неперервної на числовій осі функції x покладемо [17]

$$L(x)_p := \sup \left\{ \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b) \right\}. \quad (1.5)$$

В роботах [18–20] розв'язано задачу Боянова–Найдьонова (1.4) і для $k = 0$, а саме розв'язано задачу

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x(t)|^p) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \quad (1.6)$$

на класах функцій із заданою функцією порівняння φ , що задовольняють умову $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$. Як наслідок отримано розв'язок задачі

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \rightarrow \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

на тих же класах функцій. Задачу Боянова – Найдьонова і нерівності колмогоровського типу для функцій з несиметричними обмеженнями на старшу похідну розглянуто в [21, 22]. Для додатних (від’ємних) частин функцій задачі Боянова – Найдьонова і Ердьоша розв’язані в [23]. Серед інших досліджень з даної тематики відзначимо роботи [24, 25].

Для формулювання основних результатів цієї роботи важливою є норма

$$\|x\|_{p,\delta} := \sup \{ \|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, 0 < b - a \leq \delta \}. \quad (1.8)$$

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, позначимо r -й 2π -періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ покладемо $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$.

У цій роботі встановлено (теорема 1), що задача Боянова – Найдьонова

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \rightarrow \sup, \quad (1.9)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, r - 1$, на класах функцій

$$\Omega_p^r(A_0, A_r) := \{x \in L_{\infty}^r : \|x^{(r)}\|_{\infty} \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}, \quad (1.10)$$

де $A_0, A_r, p > 0$, $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$, еквівалентна задачі про точну константу $C = C(\lambda)$ в нерівності колмогоровського типу

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq CL(x)_p^{\alpha} \|x^{(r)}\|_{\infty}^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega_{p,\lambda}^r, \quad (1.11)$$

де $\alpha = \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}$, $\Omega_{p,\lambda}^r := \bigcup \{ \Omega_p^r(A_0, A_r) : A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p \}$, $\lambda > 0$.

Задачу (1.9) на класах (1.10) розв’язано в [18]. Тому, як наслідок теореми 1, отримано точну на кожному з класів $\Omega_{p,\lambda}^r$ нерівність вигляду (1.11) (наслідок 1).

Через T_n позначимо простір тригонометричних поліномів порядку не вищого ніж n .

Для $h > 0$, $r \in \mathbf{N}$ через $\sigma_{h,r}$ позначимо простір поліноміальних сплайнів s порядку r дефекту 1 з вузлами в точках kh , $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, $s(t)$ на кожному з відрізків $[kh, (k+1)h]$ є алгебраїчним многочленом порядку не вищого ніж r . Зокрема, при $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, множина $\sigma_{h,r}$ містить простір $S_{n,r}$, що складається з 2π -періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$. Зрозуміло, що для відповідного зсуву $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$ має місце включення $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau) \in \sigma_{h,r}$, де $\lambda = \pi/h$.

У цій роботі також встановлено (теореми 2 і 3), що задача Боянова – Найдьонова (1.9) на просторі T_n тригонометричних поліномів T (або на просторі $\sigma_{h,r}$ сплайнів s), для яких виконується друге обмеження в означенні (1.10), еквівалентна задачі про точну константу C в нерівності бернштейнівського типу для поліномів

$$\|T^{(k)}\|_{q,\delta} \leq Cn^{k+1/p-1/q} L(T)_p, \quad T \in T_n \quad (1.12)$$

(або задачі про точну константу C у відповідній нерівності для сплайнів

$$\|s^{(k)}\|_{q,\delta} \leq C \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p-1/q} L(s)_p, \quad s \in \sigma_{h,r}, \quad (1.13)$$

де $p > 0$, $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$).

Згадані задачі Боянова–Найдьонова було розв'язано в роботах [16, 20]. Тому, як наслідок теорем 2 і 3, отримано точні нерівності вигляду (1.12) і (1.13) (наслідки 2 і 3 відповідно).

Наведемо необхідні для доведення основних результатів відомості.

Враховуючи означення норми (1.8), розв'язок задачі Боянова–Найдьонова на соболевських класах $\Omega_p^r(A_0, A_r)$ функцій можна сформулювати таким чином.

Теорема А [18]. *Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$; $A_0, A_r, p, \delta > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді*

$$\sup \left\{ \|x^{(k)}\|_{q,\delta} : x \in L_\infty^r, \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0 \right\} = A_r \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta},$$

де λ однозначно визначається умовою $A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p$.

Розв'язок задачі Боянова–Найдьонова на просторах T_n з урахуванням означення норми (1.8) можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема Б [20]. *Нехай $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $A, p, \delta > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \in \mathbf{N}$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді*

$$\sup \left\{ \|T^{(k)}\|_{q,\delta} : T \in T_n, L(T)_p \leq AL(\sin n(\cdot))_p \right\} = An^k \|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}.$$

Розв'язок задачі Боянова–Найдьонова на просторах $\sigma_{h,r}$ з урахуванням означення норми (1.8) можна сформулювати таким чином.

Теорема В [16]. *Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$; $A, p, \delta, h > 0$; $\lambda = \pi/h$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді*

$$\sup \left\{ \|s^{(k)}\|_{q,\delta} : s \in \sigma_{h,r}, L(s)_p \leq AL(\varphi_{\lambda,r})_p \right\} = A \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}.$$

2. Теорема про взаємозв'язок на соболевських класах. Нам буде зручно записувати число A_0 в означенні (1.10) класу $\Omega_p^r(A_0, A_r)$ у вигляді

$$A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p. \quad (2.1)$$

З очевидної рівності $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$ випливає, що для $A_0, A_r, p > 0$ існує єдине число λ , яке задовольняє рівність (2.1), а саме

$$\lambda = \left(\frac{A_r L(\varphi_r)_p}{A_0} \right)^{\frac{1}{r+1/p}}. \quad (2.2)$$

Для довільного $\lambda > 0$ покладемо

$$\Omega_{p,\lambda}^r := \bigcup \left\{ \Omega_p^r(A_0, A_r) : A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p \right\}.$$

Зрозуміло, що

$$L_\infty^r = \bigcup \left\{ \Omega_{p,\lambda}^r : \lambda > 0 \right\},$$

до того ж конуси $\Omega_{p,\lambda}^r$, $\lambda > 0$, попарно не перетинаються.

Теорема 1. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, r - 1$; $A_0, A_r, p, \delta > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді задача Боянова – Найдьонова про знаходження точної верхньої грані

$$\sup_{x \in \Omega_p^r(A_0, A_r)} \|x^{(k)}\|_{q, \delta} \tag{2.3}$$

еквівалентна задачі про точну константу $C = C(\lambda)$ в нерівності колмогоровського типу

$$\|x^{(k)}\|_{q, \delta} \leq CL(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega_{p, \lambda}^r, \tag{2.4}$$

де $\alpha = \frac{r - k + 1/q}{r + 1/p}$. При цьому

$$C(\lambda) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda \delta}}{L(\varphi_r)_p^\alpha}. \tag{2.5}$$

Доведення. За теоремою А для довільних $A_0, A_r > 0$ має місце рівність

$$\sup_{x \in \Omega_p^r(A_0, A_r)} \|x^{(k)}\|_{q, \delta} = A_r \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta}, \tag{2.6}$$

де λ вибрано за умовою (2.1). Покажемо, що з цієї рівності випливає нерівність (2.4) з константою (2.5). Зафіксуємо $\lambda > 0$ і $x \in \Omega_{p, \lambda}^r$ та покладемо

$$A_r := \|x^{(r)}\|_\infty, \quad A_0 := L(x)_p. \tag{2.7}$$

Тоді $x \in \Omega_p^r(A_0, A_r)$ і внаслідок (2.6) має місце нерівність $\|x^{(k)}\|_{q, \delta} \leq A_r \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta}$. Звідси на підставі очевидної рівності

$$\|\varphi_{\lambda, r}\|_{q, \delta} = \lambda^{-(r+1/q)} \|\varphi_r\|_{q, \lambda \delta}, \tag{2.8}$$

рівності (2.2) і означення α маємо

$$\begin{aligned} \|x^{(k)}\|_{q, \delta} &\leq A_r \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta} = A_r \lambda^{-(r-k+1/q)} \|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda \delta} \\ &= A_r \left(\frac{A_0}{A_r L(\varphi_r)_p} \right)^\alpha \|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda \delta} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda \delta}}{L(\varphi_r)_p^\alpha} A_0^\alpha A_r^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Зважаючи на означення (2.7), звідси отримуємо нерівність (2.4) з константою (2.5). Очевидно, отримана нерівність є точною на класі $\Omega_{p, \lambda}^r$ і обертається в рівність для функції $x = A_r \varphi_{\lambda, r}$.

Покажемо тепер, що з нерівності (2.4) з константою, що визначена рівністю (2.5), випливає рівність (2.6), тобто розв'язок задачі Боянова – Найдьонова про знаходження точної верхньої грані (2.3).

Справді, зафіксуємо довільну функцію $x \in \Omega_p^r(A_0, A_r)$. Тоді має місце включення $x \in \Omega_{p, \lambda}^r$, де λ задовольняє рівність $A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda, r})_p$. Застосовуючи до функції x нерівність (2.4) з константою, що визначена рівністю (2.5), маємо

$$\|x^{(k)}\|_{q, \delta} \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda \delta}}{L(\varphi_r)_p^\alpha} L(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Враховуючи далі рівність (2.8), її аналог $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p$ та означення α , отримуємо

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \frac{\lambda^{r-k+1/q}\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}}{\lambda^{(r+1/p)\alpha}L(\varphi_{\lambda,r})_p^\alpha} L(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} = \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}}{L(\varphi_{\lambda,r})_p^\alpha} L(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Застосовуючи означення (1.10) класу $\Omega_p^r(A_0, A_r)$ і рівність $A_0 = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p$, отримуємо

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}}{L(\varphi_{\lambda,r})_p^\alpha} (A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p)^\alpha A_r^{1-\alpha} = A_r \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}.$$

Зрозуміло, що отримана оцінка є точною на класі $\Omega_p^r(A_0, A_r)$ і обертається в рівність для функції $x = A_r \varphi_{\lambda,r}$. Отже, співвідношення (2.6) доведено.

Теорему 1 доведено.

З теорем 1 і А одразу випливає точна нерівність колмогоровського типу.

Наслідок 1. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$; $p, \delta, \lambda > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді має місце точна нерівність

$$\|x^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q,\lambda\delta}}{L(\varphi_r)_p^\alpha} L(x)_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega_{p,\lambda}^r, \quad (2.9)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{r-k+1/q}{r+1/p}.$$

Екстремальними в (2.9) є функції вигляду $x(t) = a \cdot \varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Зауваження 1. Для 2π -періодичних функцій точно на класі L_∞^r нерівність типу (2.9) (у випадку $k \geq 1$, $p = \infty$, $\delta = 2\pi$) довів Лигун [26].

3. Теорема про взаємозв'язок на просторах тригонометричних поліномів. Для $A, p > 0$ покладемо

$$T_n(A, p) := \{T \in T_n : L(T)_p \leq AL(\sin n(\cdot))_p\}, \quad (3.1)$$

де величина $L(T)_p$ означена рівністю (1.5).

Теорема 2. Нехай $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $A, p, \delta > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \in \mathbf{N}$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді задача Боянова–Найдьонова про знаходження точної верхньої грані

$$\sup_{T \in T_n(A,p)} \|T^{(k)}\|_{q,\delta} \quad (3.2)$$

еквівалентна задачі про точну на просторі T_n константу C в нерівності бернштейнівського типу

$$\|T^{(k)}\|_{q,\delta} \leq C n^{k+1/p-1/q} L(T)_p, \quad T \in T_n. \quad (3.3)$$

При цьому

$$C = \frac{\|\sin(\cdot)\|_{q,n\delta}}{L(\sin(\cdot))_p}. \quad (3.4)$$

Доведення. За теоремою Б має місце співвідношення

$$\sup_{T \in T_n(A,p)} \|T^{(k)}\|_{q,\delta} = An^k \|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}. \tag{3.5}$$

Покажемо, що з цієї рівності випливає нерівність (3.3) з константою (3.4). Зафіксуємо довільний поліном $T \in T_n$ і покладемо

$$A := \frac{L(T)_p}{L(\sin n(\cdot))_p}. \tag{3.6}$$

Тоді $T \in T_n(A,p)$ за означенням (3.1). Тому на підставі (3.5) і (3.6) маємо

$$\begin{aligned} \|T^{(k)}\|_{q,\delta} &\leq An^k \|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta} \\ &= n^k \frac{\|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}}{L(\sin n(\cdot))_p} L(T)_p = n^{k+1/p-1/q} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{q,n\delta}}{L(\sin(\cdot))_p} L(T)_p. \end{aligned}$$

Таким чином, нерівність (3.3) з константою (3.4) доведено. Очевидно, отримана нерівність є точною на просторі T_n і обертається в рівність для полінома $T = A \sin n(\cdot)$.

Покажемо тепер, що з нерівності (3.3) з константою, що визначена рівністю (3.4), випливає рівність (3.5), тобто розв'язок задачі Боянова – Найдьонова про знаходження точної верхньої грані (3.2).

Справді, зафіксуємо довільний поліном $T \in T_n(A,p)$ і застосуємо до нього нерівність (3.3) з константою, що визначена рівністю (3.4). Будемо мати

$$\|T^{(k)}\|_{q,\delta} \leq n^{k+1/p-1/q} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{q,n\delta}}{L(\sin(\cdot))_p} L(T)_p = n^k \frac{\|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}}{L(\sin n(\cdot))_p} L(T)_p.$$

Враховуючи далі означення класу $T_n(A,p)$ (див. (3.1)), отримуємо

$$\|T^{(k)}\|_{q,\delta} \leq n^k \frac{\|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}}{L(\sin n(\cdot))_p} AL(\sin n(\cdot))_p = An^k \|\sin n(\cdot)\|_{q,\delta}.$$

Зрозуміло, що отримана нерівність є точною на класі $T_n(A,p)$ і обертається в рівність для полінома $T = A \sin n(\cdot)$. Тим самим співвідношення (3.5) доведено.

Теорему 2 доведено.

З теорем 2 і Б одразу випливає точна нерівність бернштейнівського типу.

Наслідок 2. Нехай $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; $A, p, \delta > 0$; $q \geq 1$, якщо $k \in \mathbf{N}$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді має місце точна на просторі T_n нерівність

$$\|T^{(k)}\|_{q,\delta} \leq n^{k+1/p-1/q} \frac{\|\sin(\cdot)\|_{q,n\delta}}{L(\sin(\cdot))_p} L(T)_p. \tag{3.7}$$

Екстремальними в (3.7) є поліноми вигляду $T(\cdot) = a \cdot \sin n(\cdot + b)$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Зауваження 2. Точну нерівність (3.7) (у випадку $k \geq 1$, $p = \infty$ і $\delta = 2\pi$) отримали Кальдерон і Клейн [27].

4. Теорема про взаємозв'язок на просторах сплайнів. Для $A, h, p > 0$ покладемо

$$\sigma_{h,r}(A, p) := \{s(\cdot + \tau) : s \in \sigma_{h,r}, L(s)_p \leq AL(\varphi_{\lambda,r})_p, \tau \in \mathbf{R}\}, \quad (4.1)$$

де величина $L(s)_p$ означена рівністю (1.5). Зазначимо, що для відповідного τ має місце включення $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau) \in \sigma_{h,r}$, де $\lambda = \pi/h$.

Теорема 3. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r-1$; $A, p, \delta, h > 0$; $\lambda = \pi/h$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді задача Боянова–Найдьонова про знаходження точної верхньої грані

$$\sup_{s \in \sigma_{h,r}(A, p)} \|s^{(k)}\|_{q, \delta} \quad (4.2)$$

еквівалентна задачі про точну на просторах $\sigma_{h,r}$ константу K в нерівності бернштейнівського типу

$$\|s^{(k)}\|_{q, \delta} \leq \lambda^{k+1/p-1/q} \cdot K \cdot L(s)_p, \quad s \in \sigma_{h,r}. \quad (4.3)$$

При цьому

$$K = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda\delta}}{L(\varphi_r)_p}. \quad (4.4)$$

Доведення. За теоремою В має місце рівність

$$\sup_{s \in \sigma_{h,r}(A, p)} \|s^{(k)}\|_{q, \delta} = A \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta}. \quad (4.5)$$

Покажемо, що з цієї рівності випливає нерівність (4.3) з константою (4.4). Зафіксуємо довільний сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ і покладемо

$$A := \frac{L(s)_p}{L(\varphi_{\lambda,r})_p}. \quad (4.6)$$

Тоді $s \in \sigma_{h,r}(A, p)$ за означенням (4.1) і на підставі (4.5), (4.6) маємо

$$\|s^{(k)}\|_{q, \delta} \leq A \|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta} = \frac{\|\varphi_{\lambda, r-k}\|_{q, \delta}}{L(\varphi_{\lambda,r})_p} L(s)_p.$$

Враховуючи далі рівність (2.8) та її аналог $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$, отримуємо

$$\|s^{(k)}\|_{q, \delta} \leq \frac{\lambda^{-(r-k+1/q)} \|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda\delta}}{\lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p} L(s)_p = \lambda^{k+1/p-1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q, \lambda\delta}}{L(\varphi_r)_p} L(s)_p.$$

Таким чином, нерівність (4.3) з константою (4.4) доведено. Очевидно, отримана нерівність є точною на класі $\sigma_{h,r}$ і обертається в рівність для довільного зсуву сплайна $s = \varphi_{\lambda,r}$.

Покажемо тепер, що з нерівності (4.3) з константою, що визначена рівністю (4.4), випливає рівність (4.5), тобто розв'язок задачі Боянова–Найдьонова про знаходження точної верхньої грані (4.2).

Справді, зафіксуємо довільний сплайн $s \in \sigma_{h,r}(A, p)$ і застосуємо до нього нерівність (4.3) з константою, що визначена рівністю (4.4). Будемо мати

$$\|s^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \lambda^{k+1/p-1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q,\lambda\delta}}{L(\varphi_r)_p} L(s)_p = \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}}{L(\varphi_{\lambda,r})_p} L(s)_p.$$

Враховуючи далі означення класу $\sigma_{h,r}(A, p)$ (див. (4.1)), одержуємо

$$\|s^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}}{L(\varphi_{\lambda,r})_p} AL(\varphi_{\lambda,r})_p = A\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{q,\delta}.$$

Зрозуміло, що отримана нерівність є точною на класі $\sigma_{h,r}(A, p)$ і обертається в рівність для довільного зсуву сплайна $s = A\varphi_{\lambda,r}$. Таким чином, співвідношення (4.5) доведено.

Теорему 3 доведено.

З теорем 3 і В одразу випливає точна нерівність бернштейнівського типу.

Наслідок 3. Нехай $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$; $A, p, \delta, h > 0$; $\lambda = \pi/h$; $q \geq 1$, якщо $k \geq 1$, і $q \geq p$, якщо $k = 0$. Тоді має місце точна на класі $\sigma_{h,r}$ нерівність

$$\|s^{(k)}\|_{q,\delta} \leq \lambda^{k+1/p-1/q} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{q,\lambda\delta}}{L(\varphi_r)_p} L(s)_p. \tag{4.7}$$

Екстремальним в (4.7) є відповідний зсув сплайнів вигляду $s(t) = a \cdot \varphi_{\lambda,r}(t)$, $a \in \mathbf{R}$.

Зауваження 3. Для 2π -періодичних сплайнів $s \in S_{n,r}$ точну нерівність (4.7) (у випадку $k \geq 1$, $p = \infty$ і $\delta = 2\pi$) довів Лигун [28].

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
2. В. Ф. Бабенко, *Исследования Днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям*, Укр. мат. журн., **52**, № 1, 5–29 (2000).
3. М. К. Kwong, A. Zettl, *Norm inequalities for derivatives and differences*, Lecture Notes in Math., **1536**, Springer-Verlag, Berlin (1992).
4. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Сравнение точных констант в неравенствах для производных на действительной оси и на окружности*, Укр. мат. журн., **55**, № 5, 579–589 (2003).
5. V. A. Kofanov, *On the relationship between sharp Kolmogorov-type inequalities and sharp Kolmogorov–Remez-type inequalities*, Ukr. Math. J., **73**, № 4, 592–600 (2021).
6. E. Nursultanov, S. Tikhonov, *A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials*, Constr. Approx., **38**, 101–132 (2013).
7. S. Tikhonov, P. Yuditski, *Sharp Remez inequality*, Constr. Approx., **52**, 233–246 (2020).
8. V. A. Kofanov, *Sharp Remez-type inequalities for differentiable periodic functions, polynomials, and splines*, Ukr. Math. J., **68**, № 2, 253–268 (2016).
9. V. A. Kofanov, *Sharp Remez-type inequalities of different metrics for differentiable periodic functions, polynomials, and splines*, Ukr. Math. J., **69**, № 2, 205–223 (2017).
10. A. E. Gaidabura, V. A. Kofanov, *Sharp Remez-type inequalities of various metrics in the classes of functions with given comparison function*, Ukr. Math. J., **69**, № 11, 1710–1726 (2017).
11. V. A. Kofanov, *Sharp Kolmogorov–Remez-type inequalities for periodic functions of low smoothness*, Ukr. Math. J., **72**, № 4, 555–567 (2020).
12. V. A. Kofanov, I. V. Popovich, *Sharp Remez-type inequalities of various metrics with asymmetric restrictions imposed on the functions*, Ukr. Math. J., **72**, № 7, 1068–1079 (2020).
13. V. A. Kofanov, T. V. Olexandrova, *A sharp Remez type inequalities which estimates L_q -norm of a function with the help of its L_p -norm*, Ukr. Math. J., **74**, № 5, 635–649 (2022).

14. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau–Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263–280 (1999).
15. P. Erdős, *Open problems*, Open Problems in Approximation Theory (B. Bojanov, Ed.), SCT Publ., Singapore (1994), p. 238–242.
16. В. А. Кофанов, *Неравенства для неперiodических сплайнов на действительной оси и их производных*, Укр. мат. журн., **66**, № 2, 216–225 (2014).
17. A. Pinkus, O. Shisha, *Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation*, J. Approx. Theory, **35**, № 2, 148–168 (1982).
18. В. А. Кофанов, *О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси*, Укр. мат. журн., **61**, № 6, 765–776 (2009).
19. V. A. Kofanov, *Some extremal problems of various metrics and sharp inequalities of Nagy–Kolmogorov type*, East J. Approx., **16**, № 4, 313–334 (2010).
20. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969–984 (2011).
21. В. А. Кофанов, *Задача Боянова–Найденова для функций с несимметричными ограничениями на старшую производную*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 368–381 (2019).
22. В. А. Кофанов, *Неравенства для производных функций на оси с несимметрично ограниченными старшими производными*, Укр. мат. журн., **64**, № 5, 636–648 (2012).
23. В. А. Кофанов, *Задача Боянова–Найденова для дифференцируемых функций и задача Ердьоша для полиномів та сплайнів*, Укр. мат. журн., **75**, № 2, 182–197 (2023).
24. В. А. Кофанов, *Задача Боянова–Найденова для дифференцируемых функций на оси и неравенства разных метрик*, Укр. мат. журн., **71**, № 6, 786–800 (2019).
25. V. A. Kofanov, *Inequalities of different metrics for differentiable periodic functions*, Ukr. Math. J., **67**, № 2, 230–242 (2015).
26. A. A. Ligon, *Inequalities for upper bounds of functionals*, Anal. Math., **2**, № 2, 11–40 (1976).
27. A. P. Calderon, G. Klein, *On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials*, Studia Math., **12**, 166–169 (1951).
28. А. А. Лигун, *Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций*, Мат. заметки, **19**, № 6, 913–926 (1976).

Одержано 01.07.23