DOI: 10.3842/umzh.v76i2.7700

УДК 517.9

Анатолій Баранник (Поморський університет, Слупськ, Польща),
Тетяна Баранник (Полтавський національний педагогічний університет),
Іван Юрик[1] (Національний університет харчових технологій, Київ)

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВІДОКРЕМЛЕННЯМ ЗМІННИХ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ДЖЕРЕЛОМ

We propose a method for the construction of exact solutions to nonlinear heat-conduction equation with a source based on the classical method of separation of variables, its generalization, and the reduction method. We consider substitutions reducing the nonlinear heat-conduction equation to ordinary differential equations and to a system of two ordinary differential equations. The classes of exact solutions of the analyzed equation are constructed by the method of generalized separation of variables.

Запропоновано метод побудови точних розв'язків рівняння нелінійної теплопровідності з джерелом, який базується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні і методі редукції. Розглянуто підстановки, що редукують рівняння нелінійної теплопровідності до звичайних диференціальних рівнянь та системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано класи точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних цього рівняння.

1. Вступ. Роботу присвячено побудові точних розв'язків нелінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + H(u). \tag{1.1}$$

Це рівняння описує нестаціонарну теплопровідність у нерухомому середовищі, якщо коефіцієнт теплопровідності та швидкість реакції є довільними функціями температури. Групові властивості та інваріантні розв'язки рівнянь вказаного вигляду описано в [1]. Конкретні рівняння цього вигляду та їхні розв'язки наведено в [2].

У роботі [3] проведено групову класифікацію рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

і отримано вичерпний перелік інваріантних розв'язків цього рівняння. В [4] запропоновано метод пошуку функцій $F(u)$, для яких рівняння (1.2) має розв'язки вигляду

$$u = u(z), \qquad z = xt^{-1/2}, \quad 0 \le x < \infty.$$

Ефективним методом побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики є метод узагальненого відокремлення змінних (див. [2, 5, 6]). Рівняння (1.2), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних вигляду

$$p(x) = w(t)\varphi(u), \tag{1.3}$$

де $p(x)$ задовольняє рівняння $(p')^2 = ap^n + bp^m$, описано в [7]. У роботах [2, 8, 9] вивчено рівняння

[1] Відповідальний за листування, e-mail: i.yu@ukr.net.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right) + bu + cu^{1-m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial x}\right) + bu^{m+1} + cu + du^{1-m},$$

які допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних. У роботах [10, 11] розглянуто підстановки, які виділяють широкі класи рівнянь вигляду (1.1), що мають точні розв'язки з узагальненим відокремленням змінних.

Ця стаття є продовженням досліджень, викладених в [7, 10, 11]. У ній розвивається метод побудови точних розв'язків із узагальненим відокремленням змінних для рівняння (1.1), який базується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні і методі редукцій. У п. 2 вивчено властивості рівнянь (1.1), що допускають розв'язки вигляду (1.3), де функція $p(x)$ задовольняє рівняння

$$(p')^2 = ap^n + bp^m + cp^2, \qquad a \neq 0, \quad b \neq 0. \tag{1.4}$$

У п. 3 описано рівняння (1.1), які допускають розв'язки вигляду (1.3), де $p(x)$ задовольняє рівняння

$$(p')^2 = ap^n + bp^m. \tag{1.5}$$

У п. 4 вивчено властивості рівнянь (1.1), що допускають розв'язки вигляду

$$x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t).$$

У п. 5 вивчаються рівняння (1.1), які допускають розв'язки вигляду (1.3), де $p(x)$ задовольняє рівняння $(p')^2 = ap^2 + b$.

2. Редукція рівняння (1.1) до звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 2.1. *Будемо говорити, що рівняння* (1.1) *допускає підстановку* $p(x) = w(t)\varphi(u)$, *якщо ця підстановка редукує рівняння* (1.1) *до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією* $w(t)$.

З'ясуємо, для яких функцій $F(u)$ і $H(u)$ рівняння (1.1) допускає підстановку (1.3), (1.4). Рівняння (1.1) зберігає свій вигляд щодо лінійних перетворень $\tilde{u} = A_1 u + A_2$ функції u зі сталими A_1, A_2. Згідно з [3], два рівняння (1.1), що переходять одне в одного при такому перетворенні, називаються еквівалентними. Відповідно до цього означення підстановки (1.3), $p(x) = w(t)\varphi(A_1 u + A_2)$ називаємо еквівалентними. Класифікацію підстановок (1.3) і відповідних їм рівнянь (1.1) будемо проводити з точністю до еквівалентності.

Якщо в рівнянні (1.4) $c = 0$, то отримуємо підстановку (1.3), (1.5), що була використана в [7] для побудови точних розв'язків рівняння нелінійної теплопровідності (1.2). Знаходження розв'язків рівняння (1.5) зводиться до інтегрування виразу

$$p^{-m/2}(ap^{n-m} + b)^{-1/2}\, dp. \tag{2.1}$$

Із відомих результатів, що стосуються інтегровності біноміальних диференціалів [12], випливає, що біноміальний диференціал (2.1) інтегрується в елементарних функціях, якщо виконується одна з таких умов:

1) $\dfrac{-n+2}{2(m-n)}$ — ціле число;

2) $\dfrac{-m+2}{2(m-n)}$ — ціле число.

Отже, у випадку $m = 1$ біноміальний диференціал (2.1) інтегрується в елементарних функціях, якщо $n = \dfrac{k+1}{k},\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0.$

Наведемо розв'язки рівняння

$$(p')^2 = ap^{(k+1)/k} + bp. \tag{2.2}$$

Розв'язуючи (2.2) щодо p', а потім інтегруючи, знаходимо

$$\int (ap^{(k+1)/k} + bp)^{-1/2}\, dp = \pm x + C, \quad C \text{ — стала.} \tag{2.3}$$

Можливі два випадки.

а) $\boldsymbol{k}$ — парне число. Виконавши в (2.3) підстановку $ap^{-1/k} + b = \theta^2$, отримаємо такий розв'язок рівняння (2.2):

$$2ka^{-k/2} \int (\theta^2 - b)^{(k-2)/2}\, d\theta = \pm x + C. \tag{2.4}$$

б) $\boldsymbol{k}$ — непарне число. Виконавши в (2.3) підстановку $a + bp^{-1/k} = \theta^2$, отримаємо такий розв'язок рівняння (2.2):

$$-2kb^{(-1+k)/2} \int (\theta^2 - a)^{-(1+k)/2}\, d\theta = \pm x + C. \tag{2.5}$$

Інтеграл у лівій частині кожного з розв'язків (2.4) і (2.5) є функцією змінної θ. Таким чином, у загальному випадку функція $p(x)$, що є розв'язком рівняння (2.2), задається неявно за допомогою одного із співвідношень (2.4) і (2.5).

Для визначення невідомих функцій $w(t)$ і $\varphi(u)$ в (1.3), (1.4) підставимо (1.3) в рівняння (1.1):

$$\begin{aligned} -\frac{w'}{w}\frac{\varphi}{\varphi'} = w^{n-2}&\left(\frac{an}{2}\frac{\varphi^{n-1}}{\varphi'}F - \frac{a\varphi^n\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{a\varphi^n}{(\varphi')^2}F'\right) \\ &+ w^{m-2}\left(\frac{bm}{2}\frac{\varphi^{m-1}}{\varphi'}F - \frac{b\varphi^m\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{b\varphi^m}{(\varphi')^2}F'\right) \\ &+ \left(c\frac{\varphi}{\varphi'}F - c\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3}F + c\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2}F' + H(u)\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

З умови, що (2.6) повинно бути звичайним диференціальним рівнянням щодо невідомої функції $w = w(t)$, отримаємо систему

$$\frac{an}{2}\frac{\varphi^{n-1}}{\varphi'}F - \frac{a\varphi^n\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{a\varphi^n}{(\varphi')^2}F' = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{2.7}$$

$$\frac{bm}{2}\frac{\varphi^{m-1}}{\varphi'}F - \frac{b\varphi^m\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{b\varphi^m}{(\varphi')^2}F' = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{2.8}$$

$$c\frac{\varphi}{\varphi'}F - c\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3}F + c\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2}F' + H(u) = \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'} \tag{2.9}$$

з дійсними параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

З рівнянь (2.7) і (2.8) випливає, що

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)}\varphi^{2-m} - \frac{2\lambda_1}{a(m-n)}\varphi^{2-n}. \tag{2.10}$$

Підставивши (2.10) в (2.7), отримаємо рівняння для визначення функції $\varphi = \varphi(u)$:

$$\sigma_2\big[-2\varphi\varphi'' + (n-2m+4)(\varphi')^2\big]\varphi^n - \sigma_1\big[2\varphi\varphi'' + (-m+2n-4)(\varphi')^2\big]\varphi^m = 0, \tag{2.11}$$

де

$$\sigma_1 = -\frac{2\lambda_1}{a(m-n)}, \qquad \sigma_2 = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)}.$$

З рівняння (2.9) знаходимо

$$H(u) = -c\frac{\varphi}{\varphi'}F + c\varphi^2\left[\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}F - \frac{1}{(\varphi')^2}F'\right] + \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'},$$

а тому, враховуючи (2.7), маємо

$$H(u) = -\frac{\lambda_2 c}{b(m-n)}(2-n)\varphi^{3-m}\frac{1}{\varphi'} + \frac{\lambda_1 c(2-m)}{a(m-n)}\varphi^{3-n}\frac{1}{\varphi'} + \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}. \tag{2.12}$$

У підсумку отримуємо таку теорему.

Теорема 2.1. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (1.3), (1.4) *і* $F'(u) \neq 0$, *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються за формулами* (2.10) *і* (2.12) *відповідно*, *а функція* $\varphi(u)$ *є розв'язком рівняння* (2.11).

Підставляючи (2.7)–(2.9) в рівняння (2.6), одержуємо рівняння для визначення функції $w = w(t)$:

$$\frac{w'}{w} + \lambda_1 w^{n-2} + \lambda_2 w^{m-2} + \lambda_3 = 0. \tag{2.13}$$

Таким чином, побудова розв'язків вигляду (1.3), (1.5) рівняння (1.1) зводиться до інтегрування рівнянь (1.5), (2.11) і (2.13).

З теореми 2.1 випливає, що рівняння (1.1), яке допускає підстановку (1.3), (1.5), має вигляд

$$u_t = \big[(\sigma_2\varphi^{2-m} + \sigma_1\varphi^{2-n})u_x\big]_x + H(u), \tag{2.14}$$

де $H(u)$ визначено формулою (2.12).

Теорема 2.2 [7]. *Нехай у рівнянні* (2.11) $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0$, *а* m *і* n *є довільними раціональними числами, що задовольняють одну з таких умов*:

$1^\circ)$ $\dfrac{-n+2}{2(m-n)}$ *— ціле число*;

$2^\circ)$ $\dfrac{-m+2}{2(m-n)}$ *— ціле число.*

Тоді рівняння (2.11) *інтегрується і його розв'язками є такі функції*:

1) *якщо* m *і* n *задовольняють умову* 1°, *то*

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}(\theta_1^2 + \sigma_2)^{\frac{n-2}{2(m-n)}}\, d\theta_1, \qquad \theta_1^2 = \varepsilon(\sigma_2 - \sigma_1 \varphi^{m-n}), \quad \varepsilon = \pm 1; \tag{2.15}$$

2) *якщо* m, n *задовольняють умову* 2°, *то*

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}(\theta_1^2 + \sigma_1)^{\frac{m-2}{2(n-m)}}\, d\theta_1, \qquad \theta_1^2 = \varepsilon(\sigma_2 \varphi^{n-m} - \sigma_1), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2.16}$$

У формулах (2.15), (2.16) $A_1,\ A_2$ — *сталі*, $A_1 \neq 0$.

Зазначимо, що інтеграли у кожному з розв'язків (2.15), (2.16) виражаються через функції від θ_1, а тому u є функцією змінної $\varphi(u)$.

Теорема 2.3. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (1.3), (1.5) *і* $n \neq 2,\ m \neq 2$, *то функція* $F(u)$ *визначається за формулою* (2.10),

$$H(u) = \lambda_3 \frac{\varphi}{\varphi'}, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

де φ *є розв'язком рівняння* (2.11), *а функція* $w = w(t)$ *задовольняє рівняння*

$$\frac{w'}{w} + \lambda_1 w^{n-2} + \lambda_2 w^{m-2} + \lambda_3 = 0.$$

Теорема 2.3 випливає з теореми 2.1, якщо в (1.4) і (2.12) покласти $c = 0$.

Теорема 2.4. *Підстановка* $v = \varphi(u)$ *зводить рівняння* (2.14) *до вигляду*

$$\begin{aligned} v_t = &\left(\frac{2\lambda_2}{b(m-n)} v^{2-m} - \frac{2\lambda_1}{a(m-n)} v^{2-n}\right) v_{xx} \\ &+ \left(\frac{m\lambda_1}{a(m-n)} v^{1-n} - \frac{n\lambda_2}{b(m-n)} v^{1-m}\right)(v_x)^2 \\ &+ \left(\frac{\lambda_1 c(2-m)}{a(m-n)} v^{3-m} - \frac{\lambda_2 c(2-n)}{b(m-n)}\right) v^{3-m} + \lambda_3 v. \end{aligned}$$

Розглянемо окремо випадок $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$. Рівняння (2.11) набирає вигляду

$$-2\varphi\varphi'' + [n + 2(2-m)](\varphi')^2 = 0. \tag{2.17}$$

Інтегруючи рівняння (2.17), знаходимо

$$\varphi = (A_1 u + A_2)^{\frac{2}{-n+2m-2}},$$

якщо $-n + 2m - 2 \neq 0,\ A_1,\ A_2$ — сталі, $A_1 \neq 0$, і

$$\varphi = A_1 \exp(A_2 u),$$

якщо $-n + 2m - 2 = 0,\ A_1,\ A_2$ — сталі, $A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0$.

Отже, з огляду на (2.10) у випадку $\lambda_1 = 0$

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)}(A_1 u + A_2)^{\frac{2(2-m)}{-n+2m-2}},$$

якщо $-n+2m-2\neq 0$, і

$$F=\frac{2\lambda_2}{b(m-n)}[A_1\exp(A_2u)]^{2-m},$$

якщо $-n+2m-2=0$.

Таким чином, рівняння (1.1), що допускає підстановку (1.3), (1.4) у випадку $\lambda_1=0,\ \lambda_2\neq 0$, має вигляд

$$u_t=\frac{2\lambda_2}{b(m-n)}\varphi^{2-m}u_{xx}+\frac{2(2-m)\lambda_2}{b(m-n)}\varphi^{1-m}\varphi'(u_x)^2-\frac{\lambda_2c(2-n)}{b(m-n)}\frac{\varphi^{3-m}}{\varphi'}+\lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}. \quad (2.18)$$

Теорема 2.5. *Підстановка $v=\varphi(u)$ зводить рівняння* (2.18) *до вигляду*

$$v_t=\frac{2\lambda_2}{b(m-n)}v^{2-m}v_{xx}-\frac{n\lambda_2}{b(m-n)}v^{1-m}(v_x)^2-\frac{\lambda_2c(2-n)}{b(m-n)}v^{3-m}+\lambda_3v.$$

Теорема 2.5 є наслідком теореми 2.4, якщо в ній покласти $\lambda_1=0$.

3. Точні розв'язки рівняння (1.1). Теорема 2.3 описує широкий клас рівнянь (1.1), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних. Справді, розглянемо підстановку

$$p(x)=w(t)\varphi(u), \quad (3.1)$$

де функція $p(x)$ задовольняє рівняння

$$(p')^2=ap^{\frac{k+1}{k}}+bp,\quad k\in\mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

з ненульовими коефіцієнтами $a,\ b$, яка редукує рівняння (1.1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w(t)$. Рівняння (3.2) інтегрується, і його розв'язки визначаються за формулами (2.4), (2.5). Відповідне рівняння (2.11) для визначення функції $\varphi(u)$ теж інтегрується, його розв'язки наведено в теоремі 2.2.

Функція $w(t)$ задовольняє рівняння

$$w'+\lambda_1w^{1/k}+\lambda_2+\lambda_3w=0, \quad (3.3)$$

яке підстановкою $w_1=w^{1/k}$ зводиться до вигляду

$$kw_1{}'+\lambda_1w_1{}^{2-k}+\lambda_2w_1{}^{1-k}+\lambda_3w_1=0. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) інтегрується.

Таким чином, підстановка (3.1), (3.2) виділяє рівняння (1.1), які допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних. Проілюструємо на прикладі побудову точних розв'язків рівняння (1.1) вигляду (3.1), (3.2).

Приклад **3.1.** Опишемо рівняння (1.1) та побудуємо їхні точні розв'язки, якщо ці рівняння допускають підстановку (3.1), де

$$(p')^2=ap^{3/2}+bp. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) є частинним випадком рівняння (3.2) і відповідає значенню $k=2$. Внаслідок теореми 2.3 рівняння (1.1), що допускає підстановку (3.1), (3.5), має вигляд

$$u_t = \big(\sigma_1\varphi^{1/2} + \sigma_2\varphi\big)u_{xx} + \big(\sigma_1\varphi^{-1/2} + \sigma_2\big)\varphi'(u_x)^2 + \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{3.6}$$

де φ є розв'язком рівняння (2.11) для значень $n = \dfrac{3}{2}$, $m = 1$, а

$$\sigma_1 = \frac{4\lambda_1}{a}, \qquad \sigma_2 = \frac{4\lambda_2}{b}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Згідно з теоремою 2.4, рівняння (3.6) підстановкою $v = \varphi(u)$ зводиться до вигляду

$$v_t = \big(\sigma_1 v^{1/2} + \sigma_2 v\big)v_{xx} + \left(-\frac{1}{2}\sigma_1 v^{-1/2} - \frac{3}{4}\sigma_2\right)v_x^2 + \lambda_3 v. \tag{3.8}$$

Рівняння (3.6) і (3.8) залежать від трьох параметрів σ_1, σ_2, $\lambda_3 \neq 0$. Параметри σ_1, σ_2 набувають довільних значень, одночасно не рівних нулю.

Можливі такі випадки.

1. Випадок $\sigma_1 = 0$. У цьому випадку $\lambda_1 = 0$ і внаслідок (2.11) з точністю до еквівалентності $\varphi = u^{-4/3}$. Таким чином, рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = \big(\sigma_2 u^{-4/3}u_x\big)_x - \frac{3}{4}\lambda_3 u. \tag{3.9}$$

Розв'язком рівняння (3.5) є функція

$$p(x)^{1/2}(x) = \frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}, \quad C_2 - \text{стала}. \tag{3.10}$$

Рівняння (3.3) для визначення функції $w(t)$ у випадку $\lambda_1 = 0$ має вигляд $w' = -\lambda_2 - \lambda_3 w$ і його розв'язком є $w = C_1\exp(-\lambda_3 t) - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$, де $C_1 \neq 0$ — стала. Використовуючи підстановку (3.1), знаходимо розв'язок рівняння (3.9):

$$u^{-4/3} = \left[C_1\exp(-\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right]^{-1}\left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2. \tag{3.11}$$

Поклавши в (3.11) $v = u^{-4/3}$, отримаємо розв'язок рівняння

$$v_t = \sigma_2 v v_{xx} - \frac{3}{4}\sigma_2(v_x)^2 + \lambda_3 v. \tag{3.12}$$

Згідно з (3.7) маємо $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4}\sigma_2 b$, а тому розв'язки (3.11) і (3.12) записуються як

$$u^{-4/3} = v = \left(C_1\exp(-\lambda_3 t) - \frac{\sigma_2 b}{4\lambda_3}\right)^{-1}\left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2. \tag{3.13}$$

У розв'язках (3.13) a, b, C_1, C_2 розглядаються як сталі, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $C_1 \neq 0$.

2. Випадок $\sigma_2 = 0$. У цьому випадку $\lambda_2 = 0$ і внаслідок рівняння (2.11) з точністю до еквівалентності

$$\varphi = \exp u. \tag{3.14}$$

Таким чином, рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = \Big(\sigma_1 \exp\Big(\frac{u}{2}\Big) u_x\Big)_x + \lambda_3. \tag{3.15}$$

Розв'язком рівняння (3.3) для значень $\lambda_2 = 0,\ k = 2$ є функція

$$w^{1/2}(t) = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_3 t\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad C_1 \neq 0 \text{ — стала.} \tag{3.16}$$

Підставляючи (3.10), (3.14), (3.16) у підстановку (3.1), знаходимо розв'язок рівняння (3.15):

$$\exp u = \left[C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_3 t\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right]^{-2} \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2. \tag{3.17}$$

Поклавши в (3.17) $v = \exp u$, отримаємо розв'язок рівняння

$$v_t = \sigma_1 v^{1/2} v_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_1 v^{-1/2}(v_x)^2 + \lambda_3 v. \tag{3.18}$$

Оскільки $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}\sigma_1 a$, то розв'язки рівнянь (3.15) і (3.18) записуються як

$$\exp u = v = \left[C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_3 t\right) - \frac{\sigma_1 a}{4\lambda_3}\right]^{-2} \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2. \tag{3.19}$$

У розв'язках (3.19) $a,\ b,\ C_1,\ C_2$ розглядаються як сталі, $a \neq 0,\ b \neq 0,\ C_1 \neq 0.$

3. Випадок $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0$. Для рівняння (3.8) підстановка (3.1), (3.2) має вигляд

$$v = \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2 w^{-1}, \tag{3.20}$$

де $w(t)$ є розв'язком рівняння $w' = -\lambda_1 w^{1/2} - \lambda_2 - \lambda_3 w,\ \lambda_3 \neq 0$, і задається неявно за допомогою одного зі співвідношень

1°) $$\frac{1}{\lambda_3} \ln\left|\frac{\lambda_3}{2}\left(w^{1/2} + \frac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1^2}{8\lambda_3}\right| - \frac{2\lambda_1}{\lambda_3\sqrt{4\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda_3}{\sqrt{4\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2}}\left(w^{1/2} + \frac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)\right) + t = C,$$

якщо $\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3 < 0$;

2°) $$\frac{1}{\lambda_3} \ln\left|\frac{\lambda_3}{2}\left(w^{1/2} + \frac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1^2}{8\lambda_3}\right| + \frac{\lambda_1}{\lambda_3\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3}} \ln\left|\frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3} + 2\lambda_3\left(w^{1/2} + \dfrac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)}{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3} - 2\lambda_3\left(w^{1/2} + \dfrac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)}\right| + t = C,$$

якщо $\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3 > 0$;

3°) $$\frac{1}{\lambda_3} \ln\left(w^{1/2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_3^2\left(w^{1/2} + \dfrac{\lambda_1}{2\lambda_3}\right)} + t = C,$$

якщо $\lambda_1^2 - 4\lambda_2\lambda_3 = 0$.

Виразивши в $1^\circ - 3^\circ$ параметри $\lambda_1,\ \lambda_2$ через параметри $\sigma_1,\ \sigma_2,\ a,\ b$ згідно з формулами (3.7), отримаємо, наприклад, у випадку 1° співвідношення

$$\frac{1}{\lambda_3}\ln\left|\frac{\lambda_3}{2}\left(w^{1/2}+\frac{\sigma_1 a}{8\lambda_3}\right)^2-\frac{\sigma_2 b}{8}-\frac{\sigma_1^2 a^2}{128\lambda_3}\right|$$

$$-\frac{\sigma_1 a}{\lambda_3\sqrt{-\frac{1}{16}\sigma_1^2 a^2-\sigma_2 b\lambda_3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda_3}{\sqrt{-\frac{1}{16}\sigma_1^2 a^2-\sigma_2 b\lambda_3}}\left(w^{1/2}+\frac{\sigma_1 a}{8\lambda_3}\right)\right)+t=C,$$

де $\frac{1}{16}\sigma_1^2+\sigma_2 b\lambda_3<0$. Таким чином, рівняння (3.8) має розв'язки вигляду (3.20), де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою одного зі співвідношень $1^\circ - 3^\circ$, в яких параметри $\lambda_1,\ \lambda_2$ виражено через параметри $\sigma_1,\ \sigma_2,\ a,\ b$ згідно з формулами (3.7).

Для побудови розв'язків відповідного рівняння (3.6) необхідно визначити функцію $\varphi(u)$, яке задовольняє рівняння (2.11) для значень $n=\frac{3}{2},\ m=1$:

$$\sigma_2\left[-2\varphi\varphi''+\frac{7}{2}(\varphi')^2\right]\varphi^{3/2}-\sigma_1\big[2\varphi\varphi''-2(\varphi')^2\big]\varphi=0. \tag{3.21}$$

Згідно з теоремою 2.2 $\Big($випадок 2 при $n=\frac{3}{2},\ m=1\Big)$, рівняння (3.21) має з точністю до еквівалентності такі розв'язки:

4°) якщо $\theta_1^2=\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1\geq 0,\ \sigma_1<0,\ \sigma_2>0$, то

$$u=(\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1)^{-1/2}+\frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_1)^{1/2}}\right]; \tag{3.22}$$

5°) якщо $\theta_1^2=-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1\geq 0,\ \sigma_1>0,\ \sigma_2<0$, то

$$u=(-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1)^{-1/2}+\frac{1}{\sigma_1^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1)^{1/2}}{\sigma_1^{1/2}}\right]; \tag{3.23}$$

6°) якщо $\theta_1^2=\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1\geq 0,\ \sigma_1>0$, то

$$u=2\big(\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1\big)^{-1/2}+\frac{1}{\sigma_1^{1/2}}\ln\left|\frac{(\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1)^{1/2}-\sigma_1^{1/2}}{(\sigma_2\varphi^{1/2}+\sigma_1)^{1/2}+\sigma_1^{1/2}}\right|; \tag{3.24}$$

7°) якщо $\theta_1^2=-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1\geq 0,\ \sigma_1<0$, то

$$u=2\big(-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1\big)^{-1/2}+\frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}}\ln\left|\frac{(-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1)^{1/2}-(-\sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_2\varphi^{1/2}-\sigma_1)^{1/2}+(-\sigma_1)^{1/2}}\right|. \tag{3.25}$$

Таким чином, якщо рівняння (1.1) допускає підстановку (3.1), (3.5), то воно має вигляд (3.6), де φ є розв'язком рівняння (3.21) і задається неявно за допомогою одного із співвідношень (3.22) – (3.25). Нехай, наприклад, функція φ задається за допомогою співвідношення

(3.22). Тоді з (3.22) випливає, що

$$\varphi' = \frac{4}{\sigma_1}(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{3/2}\varphi,$$

а тому

$$H(u) = \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\lambda_3\sigma_1}{4}(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{-3/2}.$$

Рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = (\sigma_1\varphi^{1/2} + \sigma_2\varphi)u_{xx}$$
$$+ \frac{4}{\sigma_1}\left(\frac{1}{2}\sigma_1\varphi^{-1/2} + \sigma_2\right)(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{3/2}\varphi(u_x)^2 + \frac{\lambda_3\sigma_1}{4}(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{-3/2}. \qquad (3.26)$$

Точні розв'язки рівняння (3.26) отримуються із співвідношення (3.22), якщо в ньому функцію $\varphi(u)$ замінити на функцію

$$h(t,x) = \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2 w^{-1}, \qquad (3.27)$$

де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою одного із співвідношень $1^\circ - 3^\circ$. Так, якщо функція φ визначається за допомогою співвідношення (3.22), то відповідне рівняння (3.26) має розв'язки вигляду

$$u = \left(\sigma_2 h^{1/2} + \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(\sigma_2 h^{1/2} + \sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_1)^{1/2}}\right],$$

де $h(t,x)$ задається формулою (3.27), допустимі значення параметрів σ_1, σ_2 задовольняють нерівності $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$, а

$$h^{1/2}(x) = \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]w^{-1/2}.$$

Якщо функція φ визначається за допомогою співвідношення (3.23), то рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = (\sigma_1\varphi^{1/2} + \sigma_2\varphi)u_{xx}$$
$$- \frac{4}{\sigma_1}\left(\frac{1}{2}\sigma_1\varphi^{-1/2} + \sigma_2\right)\left(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1\right)^{3/2}\varphi(u_x)^2 - \frac{\lambda_3\sigma_1}{4}\left(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1\right)^{-3/2}.$$

Якщо функція φ визначається за допомогою співвідношення (3.24), то рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = (\sigma_1\varphi^{1/2} + \sigma_2\varphi)u_{xx}$$
$$+ \frac{2}{\sigma_1}\left(\frac{1}{2}\sigma_1\varphi^{-1/2} + \sigma_2\right)\left(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1\right)^{3/2}\varphi(u_x)^2 + \frac{\lambda_3\sigma_1}{2}\left(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1\right)^{-3/2}.$$

Якщо ж функція φ визначається за допомогою співвідношення (3.25), то рівняння (3.6) має вигляд

$$u_t = (\sigma_1 \varphi^{1/2} + \sigma_2 \varphi) u_{xx}$$
$$- \frac{2}{\sigma_1} \left(\frac{1}{2} \sigma_1 \varphi^{-1/2} + \sigma_2 \right) \left(-\sigma_2 \varphi^{1/2} - \sigma_1 \right)^{3/2} \varphi (u_x)^2 - \frac{\lambda_3 \sigma_1}{2} \left(-\sigma_2 \varphi^{1/2} - \sigma_1 \right)^{-3/2}.$$

4. Точні розв'язки вигляду $x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)$ рівняння (1.1).

Означення 4.1. *Будемо говорити, що рівняння* (1.1) *допускає підстановку*

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)), \tag{4.1}$$

якщо ця підстановка редукує рівняння (1.1) *до системи двох звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями* w_1 *і* w_2.

Поклавши в (4.1) $p(x) = x$, отримаємо підстановку

$$x = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t)), \tag{4.2}$$

яку використаємо для побудови розв'язків рівняння (1.1). З'ясуємо, для яких функцій $F(u)$ і $H(u)$ рівняння (1.1) допускає підстановку (4.2). У підстановці (4.2) три невідомі функції $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $\varphi(u)$, які визначатимемо з умови, що підстановка (4.2) редукує рівняння (1.1) до системи двох звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $w_1(t)$, $w_2(t)$. Шукану систему знаходимо в такий спосіб. Підставимо (4.2) в рівняння (1.1):

$$-\frac{w_1'}{w_1} \frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{w_2'}{w_2} \frac{1}{\varphi'} = \left(-F \frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F' \frac{1}{(\varphi')^2} \right) \frac{1}{w_1^2} + H(u). \tag{4.3}$$

Якщо розв'язок рівняння (1.1) вигляду (4.2) існує, то рівність (4.3) означає, що функції

$$\frac{\varphi}{\varphi'},\ \frac{1}{\varphi'},\ -F \frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F' \frac{1}{(\varphi')^2},\ H \tag{4.4}$$

є лінійно залежними. Функції $\frac{\varphi}{\varphi'}$, $\frac{1}{\varphi'}$ лінійно незалежні, на всі інші функції (4.4) накладемо вимогу, щоб їх можна було записати як лінійну комбінацію функцій $\frac{\varphi}{\varphi'}$, $\frac{1}{\varphi'}$. Таким чином отримаємо

$$-F \frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F' \frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_1 \frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_1 \frac{1}{\varphi'}, \tag{4.5}$$

$$H = \lambda_2 \frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_2 \frac{1}{\varphi'} \tag{4.6}$$

для деяких $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Підставимо (4.5), (4.6) в рівняння (4.3):

$$\left(-\frac{w_1'}{w_1} - \frac{\lambda_1}{w_1^2} - \lambda_2 \right) \frac{\varphi}{\varphi'} + \left(-\frac{w_2'}{w_1} - \frac{\mu_1}{w_1^2} - \mu_2 \right) \frac{1}{\varphi'} = 0. \tag{4.7}$$

Функції $\frac{\varphi}{\varphi'}$, $\frac{1}{\varphi'}$ лінійно незалежні, а тому рівняння (4.7) розпадається на систему двох рівнянь

$$\frac{w_1'}{w_1} + \frac{\lambda_1}{w_1^2} + \lambda_2 = 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{w_2'}{w_1} + \frac{\mu_1}{w_1^2} + \mu_2 = 0. \tag{4.9}$$

Нехай $F'(u) \neq 0$. Інтегруючи рівняння (4.5), яке є лінійним щодо функції $F = F(u)$, знаходимо

$$F = \left(\lambda_1 \int \varphi \, du + \mu_1 u + \lambda_3\right)\varphi', \quad \lambda_3 \text{ — довільна стала.} \tag{4.10}$$

У підсумку отримуємо таку теорему.

Теорема 4.1. *Нехай в рівняння* (1.1) $F'(u) \neq 0$. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (4.2), *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються за формулами* (4.10) *і* (4.6) *відповідно*, *а* w_1, w_2 *є розв'язками системи рівнянь* (4.8), (4.9).

Згідно з теоремою 4.1, функція $\varphi(u)$ в підстановці (4.2) задається довільно, а функції $F(u)$ і $H(u)$ виражаються через функцію $\varphi(u)$. Відшукання розв'язків вигляду (4.2) рівняння (1.1) зводиться тепер до інтегрування системи (4.8), (4.9). Систему (4.8), (4.9) запишемо в іншому вигляді, перейшовши до нових функцій $v_1, \, v_2$:

$$v_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad v_2 = -\frac{w_2}{w_1}.$$

Тоді система (4.8), (4.9) набере вигляду

$$v_1' = \lambda_1 v_1^3 + \lambda_2 v_1, \tag{4.11}$$

$$v_2' = (\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2) v_2 + \mu_1 v_1^2 + \mu_2. \tag{4.12}$$

Розглянемо три випадки.

1. Випадок $\lambda_1 \neq 0, \; \lambda_2 = 0$. Рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu_2 \frac{1}{\varphi'}, \tag{4.13}$$

де функція $F(u)$ визначається за формулою (4.10). Загальний розв'язок системи (4.11), (4.12) для $\lambda_2 = 0$ визначається формулами

$$v_1 = \big[-2\lambda_1(t + C_1)\big]^{-1/2},$$

$$v_2 = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{3\lambda_1}\big[-2\lambda_1(t + C_1)\big] + C_2\big[-2\lambda_1(t + C_1)\big]^{-1/2},$$

де $C_1, \, C_2$ — довільні сталі. У підсумку отримуємо точний розв'язок рівняння (4.13):

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \big[-2\lambda_1(t + C_1)\big]^{-1/2} x - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \\ - \frac{\mu_2}{3\lambda_1}\big[-2\lambda_1(t + C_1)\big] + C_2\big[-2\lambda_1(t + C_1)\big]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Якщо в (4.14) покласти $\mu_1 = \mu_3 = 0, \; C_2 = 0$, то отримаємо автомодельні розв'язки

$$\varphi(u) = \left[-2\lambda_1(t+C_1)\right]^{-1/2}x \tag{4.15}$$

рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

де функція $F(u)$ визначається за формулою (4.10). Розв'язки вигляду (4.15) вивчено в [4].

2. Випадок $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$. Загальний розв'язок системи (4.11), (4.12) у цьому випадку визначається формулами

$$v_1 = C_1\exp(\lambda_2 t),$$

$$v_2 = \frac{\mu_1 C_1^2}{\lambda_2}\exp(2\lambda_2 t) - \frac{\mu_2}{\lambda_2} + C_2\exp(\lambda_2 t),$$

$C_1,\ C_2$ — сталі, $C_1 \neq 0$. Рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu_1 u + \lambda_3)\varphi'\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{\varphi'}(\lambda_2\varphi + \mu_2) \tag{4.16}$$

і має таку сім'ю розв'язків:

$$\varphi(u) = C_1 x\exp(\lambda_2 t) + \frac{\mu_1 C_1^2}{\lambda_2}\exp(2\lambda_2 t) - \frac{\mu_2}{\lambda_2} + C_2\exp(\lambda_2 t).$$

Теорема 4.2. *Якщо функцію $\varphi(u)$ в рівнянні* (4.16) *задати неявно за допомогою функціонального рівняння $u = \phi(\varphi(u))$, де $\phi(y)$ — довільна наперед задана функція, яка забезпечує існування однозначної і диференційовної оберненої функції $y = \phi^{-1}(u)$, то рівняння* (4.16) *має вигляд*

$$u_t = \frac{\mu_1\phi + \lambda_3}{\phi'}u_{xx} + \left[\frac{\mu_1}{\phi_1'} - \frac{(\mu_1\phi + \lambda_3)\phi''}{(\phi')^3}\right](u_x)^2 + (\lambda_2\varphi + \mu_2)\phi' \tag{4.17}$$

і його розв'язком є функція $u = \phi(\varphi(u))$, де

$$\varphi(u) = C_1 x\exp(\lambda_2 t) + \frac{\mu_1 C_1^2}{\lambda_2}\exp(2\lambda_2 t) - \frac{\mu_2}{\lambda_2} + C_2\exp(\lambda_2 t). \tag{4.18}$$

***Приклад* 4.1.** Нехай у системі (4.11), (4.12) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$, а відповідна функція $\varphi(u)$ в рівнянні (4.16) задається неявно за допомогою функціонального рівняння $u = \phi(\varphi(u))$, де $\phi(\varphi) = a_1\varphi + a_2\varphi^3,\ a_1,\ a_2$ — ненульові дійсні числа. Тоді $\varphi' = \dfrac{1}{a_1 + 3a_2\varphi^2}$, а тому з огляду на (4.17) рівняння (4.16) має вигляд

$$u_t = \frac{\mu_1\phi + \lambda_3}{a_1 + 3a_2\varphi^2}u_{xx} + \left[\frac{\mu_1}{a_1 + 3a_2\varphi^2} - \frac{6a_2(\mu_1\phi + \lambda_3)\varphi}{(a_1 + 3a_2\varphi^2)^3}\right](u_x)^2 + (a_1 + 3a_2\varphi^2)(\lambda_2\varphi + \mu_2).$$

Розв'язком цього рівняння є функція $u = a_1\varphi + a_2\varphi^3$, де φ визначається за формулою (4.18).

3. Випадок $\lambda_1 = 0,\ \mu_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \mu_2 = 0$. Загальний розв'язок системи (4.11), (4.12) у цьому випадку визначається функціями $v_1 = k_1,\ v_2 = \mu_1 k_1^2 t + k_2,\ k_1,\ k_2$ — сталі, $k_1 \neq 0$. Рівняння (1.1) має вигляд

$$u_t = \left[(\mu_1 u + \lambda_3)\varphi' u_x\right]_x \tag{4.19}$$

і його розв'язком є функція $\varphi(u) = k_1 x + \mu_1 k_1^2 t + k_2$.

Теорема 4.3. *Якщо в системі* (4.11), (4.12) $\lambda_1 = 0,\ \mu_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \mu_2 = 0$, *а відповідна функція* $\varphi(u)$ *в рівнянні* (4.19) *задається неявно за допомогою функціонального рівняння* $u = \phi(\varphi(u))$, *де* $\phi(y)$ — *довільна наперед задана функція, яка забезпечує існування однозначної і диференційовної оберненої функції* $y = \phi^{-1}(u)$, *то рівняння* (4.19) *має вигляд*

$$u_t = \frac{\mu_1 u + \lambda_3}{\phi'} u_{xx} + \left[\frac{\mu_1}{\phi'} - \frac{(\mu_1 u + \lambda_3)\phi''}{(\phi')^3}\right](u_x)^2$$

і його розв'язком є функція $u = \phi(z)$, *де* z *визначається за формулою* $z = k_1 x + \mu_1 k_1^2 t + k_2$, $k_1,\ k_2$ — *сталі,* $k_1 \neq 0$.

5. Точні розв'язки вигляду $p(x) = w(t)\varphi(u)$ рівняння (1.1). Опишемо рівняння (1.1) та побудуємо їхні точні розв'язки, якщо ці рівняння допускають підстановку

$$p(x) = w(t)\varphi(u), \tag{5.1}$$

де $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = ap^2 + b, \qquad a \neq 0, \quad b \neq 0. \tag{5.2}$$

Підставимо (5.1) в рівняння (1.1):

$$-\frac{w'}{w}\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{w^2}\left(-bF\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + bF'\frac{1}{(\varphi')^2}\right) + \left(-aF\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + aF'\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + aF\frac{\varphi}{\varphi'} + H\right).$$

Для визначення функцій $F(u),\ H(u)$ і $\varphi(u)$ отримуємо систему рівнянь

$$-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{5.3}$$

$$-aF\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + aF'\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + aF\frac{\varphi}{\varphi'} + H = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'} \tag{5.4}$$

для деяких $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Нехай $F'(u) \neq 0$. Інтегруючи рівняння (5.3), яке є лінійним щодо функції $F(u)$, знаходимо

$$F = \left(\lambda_1 \int \varphi\, du + \lambda_3\right)\varphi', \quad \lambda_3 \text{ — стала.} \tag{5.5}$$

Підставляючи (5.3), (5.4) в попереднє рівняння, отримуємо рівняння для визначення функції $w(t)$:

$$\frac{w'}{w} + \lambda_1 b\frac{1}{w^2} + \lambda_2 = 0. \tag{5.6}$$

З рівнянь (5.3), (5.4) знаходимо

$$H(u) = \frac{1}{\varphi'}(-\lambda_1 a\varphi^3 - aF\varphi + \lambda_2\varphi). \tag{5.7}$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 5.1. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (5.1), (5.2) *і* $F'(u) \neq 0$, *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються за формулами* (5.5) *і* (5.7) *відповідно, де функція* $\varphi(u)$ *задається довільно, а функція* $w(t)$ *є розв'язком рівняння* (5.6).

Рівняння (5.2) має такі розв'язки:

1°) $p(x) = \varepsilon\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,\mathrm{sh}[\sqrt{a}(x+C_2)]$, $\varepsilon = \pm 1$, якщо $a > 0$, $b > 0$;

2°) $p(x) = \varepsilon\sqrt{-\dfrac{b}{a}}\,\mathrm{ch}[\sqrt{a}(x+C_2)]$, $\varepsilon = \pm 1$, якщо $a > 0$, $b < 0$;

3°) $p(x) = \varepsilon\sqrt{-\dfrac{b}{a}}\cos\left[\sqrt{-a}(x+C_2)\right]$, $\varepsilon = \pm 1$, якщо $a < 0$, $b > 0$,
C_2 — стала.

Розв'язками рівняння (5.6) є функції

$$w = \varepsilon\left[C_1\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1 b}{\lambda_2}\right]^{1/2}, \tag{5.8}$$

$\varepsilon = \pm 1$, $C_1 \neq 0$ — стала, якщо $\lambda_2 \neq 0$, і

$$w = \varepsilon(-2\lambda_1 bt + C_1)^{1/2}, \tag{5.9}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1 — стала, якщо $\lambda_2 = 0$.

Підставляючи функції $w(t)$, визначені за формулами (5.8), (5.9), а також функції $p(x)$, визначені за формулами $1^\circ - 3^\circ$, у підстановку (5.1), знаходимо такі розв'язки рівняння (1.1) у випадку, коли функції $F(u)$ і $H(u)$ задано відповідно формулами (5.5) і (5.7):

$$1)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}\left[C_1\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1/2}\mathrm{sh}[\sqrt{a}(x+C_2)], \tag{5.10}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, $C_1 \neq 0$, якщо $a > 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

$$2)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1/2}\,\mathrm{sh}[\sqrt{a}(x+C_2)], \tag{5.11}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, $C_1 \neq 0$, якщо $a > 0$, $\lambda_2 = 0$;

$$3)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}\left[C_1\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1/2}\mathrm{ch}[\sqrt{a}(x+C_2)], \tag{5.12}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, $C_1 \neq 0$, якщо $a > 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

$$4)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{a}}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1/2}\,\mathrm{ch}[\sqrt{a}(x+C_2)], \tag{5.13}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, якщо $a > 0$, $\lambda_2 = 0$;

$$5)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-a}}\left[C_1\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1/2}\cos\left[\sqrt{-a}(x+C_2)\right], \tag{5.14}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, $C_1 \neq 0$, якщо $a < 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

$$6)\ \ \varphi(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-a}}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1/2}\cos\left[\sqrt{-a}(x+C_2)\right], \tag{5.15}$$

$\varepsilon = \pm 1$, C_1, C_2 — сталі, якщо $a < 0$, $\lambda_2 = 0$.

***Наслідок* 5.1.** *Якщо у формулах* (5.5) *і* (5.7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$ *і* $\lambda_2 \neq 0$ *відповідно, а функція* $\varphi(u)$ *задається неявно за допомогою функціонального рівняння* $u = \phi(\varphi(u))$, *де* $\phi(y)$ *— довільна наперед задана функція, яка забезпечує існування однозначної і диференційовної оберненої функції* $y = \phi^{-1}(u)$, *то рівняння* (1.1) *має вигляд*

$$u_t = \frac{\lambda_3}{\phi'} u_{xx} - \frac{\lambda_3 \phi''}{(\phi')^3}(u_x)^2 - \lambda_3 a\varphi + \lambda_2 \varphi\phi'$$

і його розв'язками є функції $u = \phi(\varphi(u))$, *де* $\varphi(u)$ *— одна з таких функцій*:

$$1)\ \ \varphi(u) = \frac{C_1}{\sqrt{a}} \exp(\lambda_2 t) \operatorname{sh}[\sqrt{a}(x + C_2)], \tag{5.16}$$

$a > 0,\ C_1,\ C_2$ *— сталі*, $C_1 \neq 0$;

$$2)\ \ \varphi(u) = \frac{C_1}{\sqrt{a}} \exp(\lambda_2 t) \operatorname{ch}[\sqrt{a}(x + C_2)], \tag{5.17}$$

$a > 0,\ C_1,\ C_2$ *— сталі*, $C_1 \neq 0$;

$$3)\ \ \varphi(u) = \frac{C_1}{\sqrt{-a}} \exp(\lambda_2 t) \cos\left[\sqrt{-a}(x + C_2)\right], \tag{5.18}$$

$a < 0,\ C_1,\ C_2$ *— сталі*, $C_1 \neq 0$.

***Приклад* 5.1.** Нехай у формулі (5.5) $\lambda_1 \neq 0,\ \varphi = u^{k/2},\ k \neq -2$. Тоді

$$F = \frac{\lambda_1 k}{k+2} u^k + \frac{\lambda_3 k}{2} u^{\frac{k-2}{2}}$$

і за формулою (5.7)

$$H = -4\lambda_1 a \frac{k+1}{k(k+2)} u^{k+1} - \lambda_3 a u^{k/2} + \frac{2\lambda_2}{k} u.$$

Таким чином, рівняння (1.1) має вигляд

$$u_t = \left[\left(\sigma u^k + \frac{\lambda_3 k}{2} u^{\frac{k-2}{2}}\right) u_x\right]_x + \sigma \tilde{a}_1 u^{k+1} - \lambda_3 a u^{k/2} + \frac{2\lambda_2}{k} u, \tag{5.19}$$

де

$$\sigma = \frac{\lambda_1 k}{k+2},\ \tilde{a}_1 = -\frac{4(k+1)a}{k^2}.$$

Згідно з теоремою 5.1, розв'язками рівняння (5.19) є функції (5.10)–(5.15), якщо в них покласти $\varphi(u) = u^{k/2}$:

$$1)\ \ u^k = \frac{1}{a}\left[C_1 \exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1} \operatorname{sh}^2[\sqrt{a}(x + C_2)],$$

$C_1,\ C_2$ — сталі, $C_1 \neq 0,\ a > 0,\ \lambda_2 \neq 0$;

2) $u^k = \dfrac{1}{a}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1} \operatorname{sh}^2[\sqrt{a}(x + C_2)]$,

$C_1,\ C_2$ — сталі, $a > 0,\ \lambda_2 = 0$;

3) $u^k = \dfrac{1}{a}\left[C_1 \exp(-2\lambda_2 t) - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1} \operatorname{ch}^2[\sqrt{a}(x + C_2)]$,

$C_1,\ C_2$ — сталі, $C_1 \neq 0,\ a > 0,\ \lambda_2 \neq 0$;

4) $u^k = \dfrac{1}{a}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1} \operatorname{ch}^2[\sqrt{a}(x + C_2)]$,

$C_1,\ C_2$ — сталі, $a > 0,\ \lambda_2 = 0$;

5) $u^k = -\dfrac{1}{a}\left[C_1 \exp(-2\lambda_2 t) - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]^{-1} \cos^2\left[\sqrt{-a}(x + C_2)\right]$,

$C_1,\ C_2$ — сталі, $C_1 \neq 0,\ a < 0,\ \lambda_2 \neq 0$;

6) $u^k = -\dfrac{1}{a}(-2\lambda_1 t + C_1)^{-1} \cos^2\left[\sqrt{-a}(x + C_2)\right]$,

$C_1,\ C_2$ — сталі, $a < 0,\ \lambda_2 = 0$.

Якщо в рівнянні (5.19) покласти $\lambda_3 = 0$, то отримаємо рівняння

$$u_t = \left(\sigma u^k u_x\right)_x + \sigma\tilde{a}_1 u^{k+1} + \frac{2\lambda_2}{k}u,$$

і його розв'язками є функції $1-6$.

***Приклад* 5.2.** Нехай у формулах (5.5) і (5.7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$, а функція $\varphi(u)$ задається неявно за допомогою функціонального рівняння

$$u = a_1\varphi(u) + a_2\varphi(u)^3,$$

де $a_1,\ a_2$ — ненульові дійсні числа. Тоді

$$\varphi' = \frac{1}{a_1 + 3a_2\varphi^2},$$

а тому за формулами (5.5) і (5.7) знаходимо

$$F(u) = \frac{\lambda_3}{a_1 + 3a\varphi^2},$$

$$H(u) = (\lambda_2 a_1 - \lambda_3 a)\varphi + 3\lambda_2 a_2 \varphi^3.$$

Рівняння (1.1) має вигляд

$$u_t = \left(\frac{\lambda_3}{a_1 + 3a\varphi^2}u_x\right)_x + (\lambda_2 a_1 - \lambda_3 a)\varphi + 3\lambda_2 a_2\varphi^3. \tag{5.20}$$

Згідно з наслідком 5.1, рівняння (5.20) має розв'язки вигляду $u = a_1\varphi(u) + a_2\varphi(u)^3$, де $\varphi(u)$ визначається за однією з формул (5.16)–(5.18).

6. Висновки. Підстановка (3.1), (3.2) виділяє широкий клас рівнянь (1.1), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних. Список рівнянь (1.1), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних, можна суттєво розширити, використавши підстановку

$$p(x) = w(t)\varphi(u), \tag{6.1}$$

де функція $p(x)$ задовольняє рівняння

$$(p')^2 = ap^n + bp^m + cp^2 \tag{6.2}$$

з ненульовими коефіцієнтами a, b, c і раціональними показниками n і m. З результатів, викладених у п. 2, випливає, що побудова розв'язків вигляду (6.1), (6.2) рівняння (1.1) зводиться до інтегрування рівняння (6.2). Рівняння (6.2) повністю інтегрується, якщо, наприклад, $n = 1$, $m = 0$. У випадку $n = 4$, $m = 0$ рівняння (6.2) має вигляд

$$(p')^2 = ap^4 + b + cp^2$$

і його точні розв'язки виражаються через еліптичні функції Якобі. Цей вигляд розглянуто в [11]. Якщо в (6.2) $n = \dfrac{2}{3}$, $m = 0$, то

$$(p')^2 = ap^{2/3} + b + cp^2, \tag{6.3}$$

і підстановкою $z = p^{-1/3}$ рівняння (6.3) зводиться до вигляду

$$(z')^2 = a(z^6 + b_1 z^5 + c_1 z^2), \tag{6.4}$$

де $b_1 = \dfrac{b}{9a}$, $c_1 = \dfrac{c}{9a}$.

Точні розв'язки рівняння (6.4), а отже й рівняння (6.3), виражаються через еліптичні інтеграли 1-го і 3-го роду.

Список рівнянь (1.1), що допускають точні розв'язки з узагальненим відокремленням змінних, можна також розширити, якщо використати підстановку

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t), \tag{6.5}$$

де $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = ap^2 + b \tag{6.6}$$

з ненульовими коефіцієнтами a і b.

Теорема 6.1. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (6.5), (6.6), *то функція* $\varphi(u)$ *є розв'язком рівняння*

$$-\big[\mu_1 + (\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi - 2\lambda_2\varphi^2\big]\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + \big[(\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi' - 4\lambda_2\varphi\varphi'\big]\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'} + \mu_2\frac{1}{\varphi'}, \tag{6.7}$$

а функції $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються за формулами*

$$F(u) = \mu_1 + (\lambda_1 - 2\mu_2)\varphi - 2\lambda_2\varphi^2,$$

$$H(u) = \frac{1}{\varphi'}\big[\lambda_2 a\varphi^3 - (\lambda_1 - \mu_2)a\varphi^2 - (\mu_1 a - \lambda_3)\varphi + \mu_3\big], \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}.$$

Для окремих значень параметрів λ_i, μ_i рівняння (6.7) можна зінтегрувати, обчислити функції $F(u)$, $H(u)$ відповідного рівняння (1.1) і побудувати його точні розв'язки. Підстановку (6.5), (6.6) було використано в [7] для побудови точних розв'язків рівняння $u_t = (\sigma u^{-1}u_x)_x$.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. А. Дородницын, *Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **22**, № 6, 1393 – 1400 (1982).
2. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2012).
3. Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности*, Докл. АН СССР, **125**, № 3, 492 – 495 (1959).
4. G. R. Philip, *General method of exact solutions of the concentration-dependent diffusion equation*, Austral. J. Phys., **13**, № 1, 13 – 20 (1960).
5. A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, *Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: applications to reaction-diffusion type equations*, Appl. Math. Lett., **100**, Article 106055 (2020).
6. A. D. Polyanin, *Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients*, Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul., **73**, 379 – 390 (2019).
7. А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик, *Точні розв'язки з узагальненим відокремленням змінних рівняння нелінійної теплопровідності*, Укр. мат. журн., **74**, № 3, 394 – 310 (2022).
8. M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier, *Positivity versus localization in degenerate diffusion equations*, Nonlinear Anal. Theory. Meth. and Appl., **9**, 987 – 1008 (1985).
9. В. А. Галактионов, С. А. Посашков, *О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **29**, № 4, 497 – 506 (1989).
10. А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик, *Метод побудови точних розв'язків нелінійного рівняння теплопровідності* $u_t = (F(u)u_x)_x + G(u)u_x + H(u)$, Укр. мат. журн., **71**, № 11, 1443 – 1454 (2019).
11. А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик, *Точні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності* $u_t = (F(u)u_x)_x + H(u)$, Збірник праць Інституту математики НАН України, **16**, № 1, 6 – 15 (2019).
12. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. II, Физматгиз, Москва (1959).

Одержано 25.07.23