1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. V, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Улучшенная оценка границы нулей L-функций

А. И. Климов

В настоящей работе дается новая оценка верхней границы действительной части нулей L-функций (теорема 4). Эта оценка получена путем видоизменения метода, изложенного в работах проф. Н. Г. Чудакова [1, 2, 3], с применением результатов акад. И. М. Виноградова, касающихся оценок тригонометрических сумм [4]. В формуле для границы нулей $L(s, \chi)$ не только явно указана зависимость от модуля k характера $\chi(n, k)$, но и вычислены входящие в нее постоянные. Краткое сообщение о полученном результате было опубликовано ранее [6].

Приложение этого результата к оценке остаточного члена в формуле для числа $\pi(x, k, l)$ простых чисел $p \leqslant x$ в прогрессии $l+k\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ будет дано в другой работе.

Теорема 1. Пусть p и Q — целые, $p \geqslant 2$,

$$S_1 = \sum_{z=Q}^{Q+p-1} e^{2\pi i F(z)},$$

где $F(z)$ — действительная функция при

$$Q \leqslant z \leqslant Q+p-1, \tag{1}$$

и пусть для некоторого $n \geqslant 11$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{p^n} \leqslant \left| \frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{1}{2p}$$

и для любого z с условием (1)

$$\left| \frac{F^{(n+2)}(z)}{(n+2)!} \right| \leqslant \frac{(8n)^{3n}}{p^{n+2,1}}.$$

Тогда

$$|S_1| < e^{3n \ln^2 n} p^{1 - \frac{1}{9,3n^2 \ln n}}.$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$F(z) = F(Q) + \frac{F'(Q)}{1!}(z-Q) + \cdots + \frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}(z-Q)^{n+1} +$$

$$+ \frac{F^{(n+2)}(z_1)}{(n+2)!}(z-Q)^{n+2} = f_1(z) + \frac{F^{(n+2)}(z_1)}{(n+2)!}(z-Q)^{n+2},$$

где $Q \leqslant z_1 \leqslant Q+p-1$, а $f_1(z)$ — многочлен степени $n+1$ относительно z со старшим коэффициентом, равным $\frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}$. Отсюда

$$|S_1| = \left| \sum_{z=1}^{Q+p-1} e^{2\pi i f_1(z) + 2\pi i \frac{F^{(n+2)}(z_1)}{(n+2)!}(z-Q)^{n+2}} \right| <$$

$$< \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)} \right| + 2\pi p^{n+3} \max_{Q \leqslant z_1 < Q+p-1} \left| \frac{F^{(n+2)}(z_1)}{(n+2)!} \right|, \qquad (2)$$

где $f(x) = f_1(x+Q-1)$.

Старший коэффициент многочлена $f(x)$ остается прежним:

$$a_{n+1} = \frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}.$$

Представим его в виде

$$a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{qT},$$

где $1 \leqslant q \leqslant T$, $(a, q) = 1$, $|\lambda| < 1$. Возьмем $T = p^n$, тогда

$$q \leqslant p^n, \qquad (3)$$

$$a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{qp^n}.$$

По условию

$$\frac{1}{p^n} \leqslant |a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2p},$$

следовательно, $a \neq 0$, так как противоположное предположение противоречит левой части этого неравенства, поэтому, используя правую часть, имеем

$$q = |a_{n+1}|^{-1} \left| a + \frac{\lambda}{p^n} \right| \geqslant 2p \left(|a| - \frac{|\lambda|}{p^n} \right) > 2p \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) > p,$$

что в сочетании с (3) дает

$$p < q \leqslant p^n.$$

Отсюда следует, что сумма

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Виноградова [4], если положить в ней $m = 1$, $r = n+1$, $\theta = \frac{\lambda q}{p^n}$, $\tau = 1$. Согласно этой теореме

$$|S| < (8n)^{\frac{1}{2} n \ln [12n(n+1)]} p^{1 - \frac{1}{3n^2 \ln [12n(n+1)]}}.$$

Поэтому из (2) получаем

$$|S_1| < (8n)^{\frac{1}{2} n \ln [12n(n+1)]} p^{1 - \frac{1}{3n^2 \ln [12n(n+1)]}} + 2\pi p^{n+3} \frac{(8n)^{3n}}{p^{n+2,1}} <$$

$$< e^{3n \ln^2 n} p^{1 - \frac{1}{9{,}3 n^2 \ln n}}.$$

Теорема 2. Пусть

$$S=\sum_{z=T+1}^{[|t|^{\frac{2}{15}}]}\frac{1}{(z+w)^s},$$

где $0\leqslant w\leqslant 1$, $s=\sigma+ti$, σ и t — действительные,

$$T=\left[e^{2,2(\ln|t|)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln|t|)^{\frac{3}{4}}}\right].$$

Тогда в области

$$\sigma\geqslant 1-\frac{1}{\sqrt{\ln|t|}}$$

справедлива оценка

$$|S|<\frac{1}{e^{0,05(\ln|t|)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln|t|)^{\frac{5}{4}}}}.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассматривать положительные значения t, причем будем считать $t>e^{e^{20}}$, так как в противном случае $T>t^{\frac{2}{15}}$ и рассматриваемая сумма S не имеет смысла.

Разобьем интервал суммирования $(T, [t^{\frac{2}{15}}])$ на r частей точками

$$2T,\quad 4T,\ldots,\ 2^{r-1}T,$$

так что $2^{r-1}T\leqslant[t^{\frac{2}{15}}]<2^rT$, откуда

$$1\leqslant r<\ln t.$$

Тогда будем иметь

$$S=\sum_{k=1}^{r}S_k',$$

где

$$S_k'=\sum_{z=N_k}^{N_k'}\frac{1}{(z+w)^s},\quad T+1\leqslant N_k\leqslant[t^{\frac{2}{15}}],\quad N_k\leqslant N_k'\leqslant 2N_k-1$$
$$(k=1,2,\ldots,r).$$

Следовательно,

$$|S|\leqslant r\max_{1\leqslant k\leqslant r}|S_k'|<\ln t\cdot|S'|,\tag{4}$$

где S' — сумма вида

$$S'=\sum_{z=N}^{N'}\frac{1}{(z+w)^s},$$

причем

$$e^{2,2(\ln t)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}}<N\leqslant t^{\frac{2}{15}},\quad N\leqslant N'<2N.$$

Займемся оценкой суммы S'. По теореме Абеля

$$|S'|\leqslant(N+w)^{-\sigma}\max_{N\leqslant N''<N'}\left|\sum_{z=N}^{N''}(z+w)^{ti}\right|.\tag{5}$$

Пусть $N=t^u$ и, следовательно,

$$\frac{2{,}2\,(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}}{(\ln t)^{\frac{1}{4}}}<u\leqslant\frac{2}{15}. \qquad (6)$$

Положим

$$n=\left[\frac{3}{2u}\right],\quad p=\left[8\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Очевидно, что $n\geqslant 11$ и

$$\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}>1. \qquad (7)$$

Обозначим

$$Q_\lambda=N+\lambda p\quad(\lambda=0,1,2,\ldots,H),\quad H=\left[\frac{N''-N}{p}\right].$$

Тогда

$$\left|\sum_{z=N}^{N''}(z+w)^{ti}\right|\leqslant\sum_{\lambda=0}^{H-1}\left|\sum_{z=Q_\lambda}^{Q_\lambda+p-1}(z+w)^{ti}\right|+\left|\sum_{z=Q_H}^{N''}(z+w)^{ti}\right|\leqslant$$

$$\leqslant H\max_{0\leqslant\lambda\leqslant H-1}\left|\sum_{z=Q_\lambda}^{Q_\lambda+p-1}(z+w)^{ti}\right|+p=H|S_1|+p<\frac{N}{p}|S_1|+p, \qquad (8)$$

где S_1 — сумма вида

$$S_1=\sum_{z=Q}^{Q+p-1}(z+w)^{ti},$$

причем $N\leqslant Q<2N-p$, т. е.

$$N\leqslant z+w<2N.$$

Имеем

$$S_1=\sum_{z=Q}^{Q+p-1}e^{ti\ln(z+w)}=\sum_{z=Q}^{Q+p-1}e^{2\pi i F(z)},$$

если взять

$$F(z)=(2\pi)^{-1}t\ln(z+w).$$

Сумма S_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 1, так как $p>2$,

$$F^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!\;(2\pi)^{-1}t(z+w)^{-n}$$

и, следовательно, учитывая (7), имеем неравенства:

$$\left|\frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}\right|p^n>(n+1)^{-1}(2\pi)^{-1}\,t(2N)^{-n-1}\left\{7\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^n=\frac{7^n}{\pi(n+1)\,2^{n+1}}>1,$$

$$\left|\frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}\right|\cdot 2p<(n+1)^{-1}(2\pi)^{-1}tN^{-n-1}\cdot 2\cdot 8\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{8}{\pi(n+1)}\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{-1+\frac{1}{n}}<1,$$

$$\left|\frac{F^{(n+2)}(z)}{(n+2)!}\right|\cdot(8n)^{-3n}p^{n+2{,}1}<(n+2)^{-1}(2\pi)^{-1}\,tN^{-n-2}(8n)^{-3n}\left\{8\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{n+2{,}1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi(n+2)\,8^{2n-2{,}1}n^{3n}}t^{1{,}1u-\frac{2{,}1(1-u)}{n}}<1.$$

Последнее следует из того, что в силу условия (6)

$$1{,}1u-\frac{2{,}1\,(1-u)}{n}\leqslant 1{,}1u-\frac{2{,}1\,(1-u)}{\dfrac{3}{2u}}=$$

$$=u\,(-0{,}3+1{,}4u)<u\left(-0{,}3+1{,}4\cdot\frac{2}{15}\right)<0.$$

Применяя теорему 1, из (5) и (8) получаем

$$|S'|<N^{-\sigma}\left(\frac{N}{p}\,e^{3n\ln^2 n}\,p^{1-\frac{1}{9{,}3n^2\ln n}}+p\right)<$$

$$<e^{3n\ln^2 n}\,N^{1-\sigma}\left\{\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{-\frac{1}{9{,}3n^2\ln n}}+8N^{-\sigma}\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=e^{3n\ln^2 n}\,t^{u\,(1-\sigma)-\frac{u\,(n+1)-1}{9{,}3n^3\ln n}}+8t^{u\,(1-\sigma)-\frac{1-u}{n}}. \tag{9}$$

Здесь, ввиду (6), имеем

$$3n\ln^2 n\leqslant\frac{9}{2u}\left(\ln\frac{3}{2u}\right)^2\leqslant\frac{9\,(\ln t)^{\frac14}}{2\cdot 2{,}2\,(\ln\ln t)^{\frac34}}\left(\ln\frac{3\,(\ln t)^{\frac14}}{2\cdot 2{,}2\,(\ln\ln t)^{\frac34}}\right)^2<$$

$$<\frac{9}{4{,}4}\,\frac{(\ln t)^{\frac14}}{(\ln\ln t)^{\frac34}}\left(\frac14\ln\ln t\right)^2<0{,}128\,(\ln t)^{\frac14}\,(\ln\ln t)^{\frac54},$$

$$u\,(1-\sigma)-\frac{u\,(n+1)-1}{9{,}3n^3\ln n}\leqslant u\,(1-\sigma)-\frac{u\cdot\dfrac{3}{2u}-1}{9{,}3\left(\dfrac{3}{2u}\right)^3\ln\dfrac{3}{2u}}=$$

$$=u\left((1-\sigma)-\frac{4u^2}{9{,}3\cdot 27\ln\dfrac{3}{2u}}\right)<u\left(\frac{1}{(\ln t)^{\frac12}}-\frac{4u^2}{9{,}3\cdot 27\cdot\dfrac14\ln\ln t}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2{,}2\,(\ln\ln t)^{\frac34}}{(\ln t)^{\frac14}}\left(\frac{1}{(\ln t)^{\frac12}}-\frac{16\cdot 2{,}2^2\,(\ln\ln t)^{\frac34}}{9{,}3\cdot 27\ln\ln t\cdot(\ln t)^{\frac12}}\right)<-0{,}186\,\frac{(\ln\ln t)^{\frac54}}{(\ln t)^{\frac34}},$$

$$u\,(1-\sigma)-\frac{1-u}{n}\leqslant\frac{u}{(\ln t)^{\frac12}}-\frac{(1-u)\,2u}{3}<\frac{u}{e^{10}}-\frac{\left(1-\dfrac{2}{15}\right)2u}{3}<$$

$$<-0{,}5u\leqslant-\frac{0{,}5\cdot 2{,}2\,(\ln\ln t)^{\frac34}}{(\ln t)^{\frac14}}<-\frac{(\ln\ln t)^{\frac54}}{(\ln t)^{\frac34}}.$$

Поэтому из (9) получим

$$|S'|<e^{0{,}128\,(\ln t)^{\frac14}\,(\ln\ln t)^{\frac54}}\,t^{-0{,}186\,\frac{(\ln\ln t)^{\frac54}}{(\ln t)^{\frac34}}}+8t^{-\frac{(\ln\ln t)^{\frac54}}{(\ln t)^{\frac34}}}=$$

$$=e^{-0{,}058\,(\ln t)^{\frac14}\,(\ln\ln t)^{\frac54}}+8e^{-(\ln t)^{\frac14}\,(\ln\ln t)^{\frac54}}<\frac{1}{e^{0{,}057\,(\ln t)^{\frac14}\,(\ln\ln t)^{\frac54}}}.$$

Возвращаясь теперь к (4), находим

$$|S| < \frac{\ln t}{e^{0{,}057 (\ln t)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln t)^{\frac{5}{4}}}} < \frac{1}{e^{0{,}05 (\ln t)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln t)^{\frac{5}{4}}}}.$$

Теорема 3. Пусть $L(s, \chi)$ — функция Дирихле, построенная с помощью характера $\chi = \chi(a, k)$, имеющего модулем число k. Пусть, далее,

$$s = \sigma + ti, \ \gamma = |t| + 8.$$

Тогда в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}}, \quad |s-1| \geqslant \frac{1}{3}, \quad \text{если } \chi \text{ — главный характер,}$$

и

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}}, \qquad \text{если } \chi \text{ — неглавный характер,}$$

имеет место неравенство

$$|L(s, \chi)| < (k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}}} \ln (k+3) \cdot e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Доказательство. Если $\sigma \geqslant 2$, то

$$|L(s, \chi)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}} \leqslant \sigma < 2.$$

Известно, что

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right), \tag{10}$$

где

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} - \frac{1}{2(m+w)^s} - s \int_m^{\infty} \frac{u - [u] - \frac{1}{2}}{(u+w)^{s+1}} \, du, \tag{11}$$

m — любое целое неотрицательное число, $0 < w \leqslant 1$, $\sigma > 0$ ([5], теоремы 368, 369).

1. Пусть сначала $\gamma \leqslant e^4$. Полагая в (11) $m = 0$, $w = \frac{a}{k}$, получим из (10)

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k(s-1)} \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \, a^{1-s} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{k} \frac{\chi(a)}{a^s} -$$

$$- \frac{s}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a) \int_0^{\infty} \frac{u - [u] - \frac{1}{2}}{\left(u + \frac{a}{k}\right)^{s+1}} \, du. \tag{12}$$

Если χ — неглавный характер, то $\sum_{a=1}^{k}\chi(a)=0$, и поэтому

$$\frac{1}{s-1}\sum_{a=1}^{k}\chi(a)a^{1-s}=\frac{1}{s-1}\sum_{a=1}^{k}\chi(a)\left(1+\frac{(1-s)\ln a}{1!}+\frac{(1-s)^2\ln^2 a}{2!}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{a=1}^{k}\chi(a)\left(-\frac{\ln a}{1!}-\frac{(1-s)\ln^2 a}{2!}-\cdots\right),$$

т. е. при $|s-1|<\frac{1}{3}$

$$\left|\frac{1}{k(s-1)}\sum_{a=1}^{k}\chi(a)a^{1-s}\right|<\ln k+|1-s|\frac{\ln^2 k}{2!}+|1-s|^2\frac{\ln^3 k}{3!}+\cdots<$$

$$<\ln k+|1-s|\frac{\ln^2 k}{1!}+|1-s|^2\frac{\ln^3 k}{2!}+\cdots=k^{|s-1|}\ln k<$$

$$<k^{\frac{1}{3}}\ln k<1{,}2\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3). \qquad (13)$$

Если же $|s-1|\geqslant\frac{1}{3}$, то при любом характере χ имеем в рассматриваемой области

$$\left|\frac{1}{k(s-1)}\sum_{a=1}^{k}\chi(a)a^{1-s}\right|\leqslant\frac{1}{k|s-1|}\sum_{a=1}^{k}a^{1-\sigma}\leqslant\frac{3}{k}\sum_{a=1}^{k}a^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\leqslant$$

$$\leqslant 3k^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}<1{,}2\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3)$$

при условии, что $\gamma\leqslant e^4$. Таким образом, снова оказывается справедливым неравенство (13).

Далее,

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k}\frac{\chi(a)}{a^s}-\frac{s}{k^s}\sum_{a=1}^{k}\chi(a)\int_0^{\infty}\frac{u-[u]-\frac{1}{2}}{\left(u+\frac{a}{k}\right)^{s+1}}du\right|<\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}+\frac{|s|}{k^\sigma}\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{2}\,\frac{k^\sigma}{\sigma a^\sigma}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}\right)\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma-8}{1-\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\right)^2}\right)\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}<$$

$$<0{,}9\gamma\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}<0{,}75\,e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}. \qquad (14)$$

При любом γ

$$\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}\leqslant\sum_{a=1}^{k}a^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}-1}\leqslant 1+\int_1^k u^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}-1}du=1+\left(k^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}-1\right)\sqrt{\ln\gamma}\leqslant 1+k^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln k, \qquad (15)$$

откуда при $\gamma\leqslant e^4$

$$\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^\sigma}<1{,}1\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3). \qquad (16)$$

Из (12), (13), (14) и (16) находим

$$|L(s,\chi)| < 1{,}2\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3) + 0{,}75\,e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}\cdot 1{,}1\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3) <$$

$$< (k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3)\cdot e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

2. Пусть теперь $e^4 \leqslant \gamma \leqslant e^{e^{10}}$. Положим в формуле (11) $m=[\gamma]$, $w=\frac{a}{k}$, тогда, пользуясь неравенством, аналогичным (15), получим

$$\left|\zeta\left(s,\frac{a}{k}\right)\right| < \frac{(\gamma+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}{|s-1|} + \left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + \sum_{n=1}^{[\gamma]}\frac{1}{n^{\sigma}} + \frac{1}{2(\gamma-1)^{\sigma}} + \frac{|s|}{2\sigma(\gamma-1)^{\sigma}} <$$

$$< \left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + \frac{(\gamma+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}{\gamma-8} + 1 + \gamma^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln\gamma + \frac{1}{2(\gamma-1)^{1-\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma-8}{1-\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\right)^{2}}\right) <$$

$$< \left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + 1{,}26\,e^{\sqrt{\ln\gamma}}\ln\gamma < \left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + 0{,}98\,e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Кроме того, при любом $\gamma \geqslant e^4$ из (15) находим

$$\sum_{a=1}^{k}\frac{1}{a^{\sigma}} \leqslant 1 + k^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln k < 1{,}3\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3) <$$

$$< 0{,}02\,(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3)\cdot e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}. \tag{17}$$

А тогда из (10) следует, что

$$|L(s,\chi)| < \frac{1}{k^{\sigma}}\sum_{a=1}^{k}\left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + k^{1-\sigma}\cdot 0{,}98\,e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}} <$$

$$< (k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3)\cdot e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

3. Теперь будем считать $\gamma=|t|+8\geqslant e^{e^{10}}$. Ввиду того, что при $\sigma>0$ $\zeta(\bar{s},w)=\overline{\zeta(s,w)}$, достаточно при оценке $|\zeta(s,w)|$ ограничиться положительными значениями t. Из формулы (11) при $m=[t^2]$, $w=\frac{a}{k}$ имеем

$$\left|\zeta\left(s,\frac{a}{k}\right)\right| < \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}{t} + \left(\frac{k}{a}\right)^{\sigma} + \left|\sum_{z=1}^{[t^{\frac{1}{2}}]}\frac{1}{(z+w)^{s}}\right| +$$

$$+ \left|\sum_{z=[t^{\frac{1}{2}}]+1}^{[t^2]}\frac{1}{(z+w)^{s}}\right| + \frac{1}{2(t^2-1)^{\sigma}} + \frac{t+2}{2\sigma(t^2-1)^{\sigma}}. \tag{18}$$

Здесь

$$\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}{t} < \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln t}}}}{t} = e^{\frac{\ln(t^2+1)}{\sqrt{\ln t}} - \ln t} < 1 < 0{,}1\, e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}, \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2(t^2-1)^\sigma} + \frac{t+2}{2\sigma(t^2-1)^\sigma} < \frac{t+3}{(t^2-1)^\sigma} \leqslant \frac{t+3}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} <$$

$$< \frac{t+3}{t-1} < 2 < 0{,}1\, e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}. \qquad (20)$$

Далее, из доказательства теоремы 391 из книги Landau [5], где можно считать $\alpha_{12}=3$, принимая во внимание, что условие $\sigma<1$ не является необходимым, будем иметь при $\sigma \geqslant \frac{31}{32}$, $t>3$

$$\left|\sum_{z=[t^{\frac{1}{2}}]+1}^{[t^2]} \frac{1}{(z+w)^s}\right| < 3\ln t \cdot 2^{18}\left(t^{-\frac{15}{64}+\frac{1}{6}} + t^{\frac{1}{16}-\frac{1}{6}}\right)\ln t <$$

$$< 0{,}1\, e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}. \qquad (21)$$

Остается оценить сумму $\sum_{z=1}^{[t^{\frac{1}{2}}]} \frac{1}{(z+w)^s}$. Разобьем интервал суммирования на 12 частей точками

$$T_r = \left[t^{\frac{2}{r+2}}\right] \qquad (r=13,\ 12,\ 11, \ldots, 4,\ 3).$$

Пусть, кроме того,

$$T_2 = [t^{\frac{1}{2}}], \quad T = [e^{2{,}2(\ln t)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}}],$$

и если $T \geqslant T_{13} = [t^{\frac{2}{15}}]$, то $T_0 = T_{r_0}$ есть наибольшее из чисел T_r, не превосходящее T, т. е.

$$T_{r_0} \leqslant T < T_{r_0-1}.$$

Если же $T < T_{13}$, т. е. все числа T_r превосходят T, то положим $T_0 = T$, $r_0 = 13$ (тогда $T_0 < T_{r_0}$). Таким образом, всегда

$$T_0 \leqslant T.$$

Заметим, что при $r_0 \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$T < T_{r_0-1} = \left[t^{\frac{2}{r_0+1}}\right] < t^{\frac{2}{r_0+1}},$$

откуда

$$r_0+1 < \frac{2\ln t}{\ln T} < \frac{2\ln t}{0{,}999\cdot 2{,}2(\ln t)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}} <$$

$$< \frac{0{,}631}{\ln 2}\,\frac{(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}}{(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}} < \frac{\frac{1}{2}\ln\ln\gamma}{\ln 2},$$

если $e^{e^{10}} \leqslant \gamma \leqslant e^{e^{20}}$. Поэтому

$$2^{r_0+1} < (\ln\gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

Если же $\gamma > e^{e^{20}}$, то тоже

$$2^{r_0+1} < 2^{14} < (\ln \gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, всегда при $r_0 \geqslant 3$

$$1-\sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}} < \frac{1}{2^{r_0+1}}. \tag{22}$$

Представим теперь рассматриваемую сумму следующим образом:

$$\sum_{z=1}^{[t^{\frac{1}{2}}]} \frac{1}{(z+w)^s} = \sum_{z=1}^{T_0} \frac{1}{(z+w)^s} + \sum_{z=T_0+1}^{[t^{\frac{2}{15}}]} \frac{1}{(z+w)^s} + \sum_{r=3}^{r_0} \sum_{z=[t^{\frac{2}{r+2}}]+1}^{[t^{\frac{2}{r+1}}]} \frac{1}{(z+w)^s}, \tag{23}$$

причем, если здесь $T_0 \geqslant \left[t^{\frac{2}{15}}\right]$, то вторую сумму считаем равной нулю. В этом случае, очевидно, $T_0 = \left[t^{\frac{2}{r_0+2}}\right]$. Если к тому же $T_0 = [t^{\frac{1}{2}}]$, т. е. $r_0 = 2$, то и вся последняя сумма считается равной нулю.

По аналогии с (15) имеем

$$\left|\sum_{z=1}^{T_0} \frac{1}{(z+w)^s}\right| < \sum_{z=1}^{T} \frac{1}{z^\sigma} < 1 + T^{\frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}}} \ln T < 0{,}1\, e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}. \tag{24}$$

Следующая сумма, если $T_0 < \left[t^{\frac{2}{15}}\right]$, оценивается с помощью теоремы 2, причем, очевидно, что тогда $T_0 = T$:

$$\left|\sum_{z=T_0+1}^{[t^{\frac{2}{15}}]} \frac{1}{(z+w)^s}\right| < \frac{1}{e^{0{,}05 (\ln t)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln t)^{\frac{5}{4}}}} < 1 < 0{,}1\, e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}. \tag{25}$$

Внутренняя сумма в последнем слагаемом равенства (23) может быть оценена по теореме 390 из книги Landau [5], где условие $\sigma < 1$ не является необходимым, а условие $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{4 \cdot 2^{r-1}}$ следует из (22). В силу этой теоремы, учитывая, что $r_0 - 2 \leqslant 11$, имеем

$$\left|\sum_{r=3}^{r_0} \sum_{z=[t^{\frac{2}{r+2}}]+1}^{[t^{\frac{2}{r+1}}]} \frac{1}{(z+w)^s}\right| < 11 \cdot 2^{18} t^{-\frac{1}{8r_0 \cdot 2^{r_0-1}}} \ln^2 t < 0{,}1\, e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}. \tag{26}$$

Сопоставляя (18), (19), (20), (21), (23), (24), (25) и (26), получим

$$\left|\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)\right| < \left(\frac{k}{a}\right)^\sigma + 0{,}6\, e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Возвращаясь к (10) и учитывая (17), заключаем, что

$$|L(s, \chi)| < \frac{1}{k^\sigma} \sum_{a=1}^{k} \left(\frac{k}{a}\right)^\sigma + k^{1-\sigma} \cdot 0{,}6\, e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}} <$$

$$< (k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln \gamma}}} \ln (k+3) \cdot e^{2{,}4 (\ln \gamma)^{\frac{1}{4}} (\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Теорема 4. Пусть $s=\sigma+ti$, где σ и t — действительные, $\gamma=|t|+8$ и $L(s, \chi)$ — L-функция, построенная с помощью характера χ, имеющего данное число $k \geqslant 1$ своим модулем. Тогда $L(s, \chi) \neq 0$ в области

$$\sigma \geqslant 1-\frac{0{,}0005}{\ln (k+3)+(\ln \gamma)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma)^{\frac{3}{4}}}$$

при условии, что $|t| \geqslant 1$ в случае, если χ — действительный характер и $-\infty<t<\infty$, если χ — главный характер или характер третьего рода.

Доказательство. Пусть число $\beta+t_0 i$ является нулем функции $L(s, \chi)$, т. е. $L(\beta+t_0 i, \chi)=0$. Ввиду соотношения $L(\overline{s}, \chi)=\overline{L(s, \overline{\chi})}$ и так как L-функции, построенные с помощью главных характеров, не имеют нулей в области $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 10$, достаточно рассматривать значения t_0 с условием:

$t_0 \geqslant 10$, если χ — главный характер,
$t_0 \geqslant 1$, если χ — действительный характер,
$t_0 \geqslant 0$, если χ — характер третьего рода.

Обозначим $\gamma_0=t_0+8$. Очевидно, что $\gamma_0 \geqslant 8$, причем в случае $k=1$ или $k=2$ характер χ — главный, и тогда даже $\gamma_0 \geqslant 18$.

Как известно, $\beta<1$. Для доказательства теоремы надо показать, что

$$\beta<1-\frac{0{,}0005}{\ln (k+3)+(\ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}}. \tag{27}$$

Положим

$$\sigma_0=1+\frac{0{,}003}{\ln (k+3)+(\ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}},$$

$$R=\frac{0{,}9}{\sqrt{\ln \gamma_0}}.$$

Если $\beta \leqslant \sigma_0-\frac{R}{2}$, то имеем

$$\beta \leqslant 1+\frac{0{,}003}{\ln (k+3)+(\ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}}-\frac{0{,}9}{2\sqrt{\ln \gamma_0}}<$$

$$<1+\frac{0{,}1}{(\ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}}-\frac{0{,}4}{\sqrt{\ln \gamma_0}}<1-\frac{0{,}2}{\sqrt{\ln \gamma_0}}<$$

$$<1-\frac{0{,}0005}{\ln (k+3)+(\ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln \ln \gamma_0)^{\frac{3}{4}}},$$

и теорема доказана. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\beta>\sigma_0-\frac{R}{2}. \tag{28}$$

Возьмем две точки: $s_1=\sigma_0+t_0 i$, $s_2=\sigma_0+2t_0 i$ и опишем около них круги радиуса R:

$$|s-s_1| \leqslant R, \, |s-s_2| \leqslant R.$$

Пусть $s=\sigma+ti$ — произвольная точка одного из этих кругов, тогда

$$t>-R,\quad |t|<2t_0+R<2t_0+1,\quad \gamma_0=t_0+8>\frac{|t|-1}{2}+8=\frac{\gamma+7}{2},$$

откуда

$$\sigma\geqslant\sigma_0-R>1-\frac{0{,}9}{\sqrt{\ln\gamma_0}}>1-\frac{0{,}9}{\sqrt{\ln\frac{\gamma+7}{2}}}>1-\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}},$$

т. е. оба круга целиком лежат в области, указанной в теореме 3. Применим эту теорему к L-функциям, построенным с помощью данного характера χ и его квадрата χ^2, который также является характером, имеющим модуль k. Этот характер χ^2 будет главным только тогда, когда χ — главный или действительный, и в этом случае условие $|s-1|\geqslant\frac{1}{3}$ выполняется, так как $t_0\geqslant 1$, $R<\frac{2}{3}$.

Получим

$$\left.\begin{matrix}|L(s,\chi)|\\ |L(s,\chi^2)|\end{matrix}\right\}<(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}\ln(k+3)\cdot e^{2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Так как $\gamma_0-1<\gamma<2\gamma_0-7$, то здесь

$$(k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}<e^{1{,}1\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}}},$$

$$\ln(k+3)\leqslant\sqrt{\ln\gamma_0}\,(k+3)^{\frac{0{,}4}{\sqrt{\ln\gamma_0}}}<e^{0{,}4\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}}+0{,}4(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}},$$

$$2{,}4(\ln\gamma)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma)^{\frac{3}{4}}<2{,}6(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}+\frac{2}{\sqrt{\ln\gamma_0}}<$$

$$<2{,}6(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}+1{,}5\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}},$$

и поэтому

$$\left.\begin{matrix}M_1=\max\limits_{|s-s_1|\leqslant R}|L(s,\chi)|\\ M_2=\max\limits_{|s-s_2|\leqslant R}|L(s,\chi^2)|\end{matrix}\right\}<e^{3\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}}+3(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}}. \tag{29}$$

Далее, известно, что при $\sigma>1$

$$\frac{1}{L(s,\chi)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\mu(n)}{n^s},$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса ([3], теорема 28). Отсюда

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{|L(s_1,\chi)|}\\ \dfrac{1}{|L(s_2,\chi^2)|}\end{matrix}\right\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}<1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}}=1+\frac{\ln(k+3)+(\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}}{0{,}003},$$

что в сочетании с (29) дает

$$\left.\begin{array}{l}\ln\dfrac{M_1}{|L(s_1,\chi)|}\\ \ln\dfrac{M_2}{|L(s_2,\chi^2)|}\end{array}\right\}<3\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}}+3(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}+$$

$$+\ln\left(1+\frac{\ln(k+3)+(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}}{0{,}003}\right)<$$

$$<6{,}3\left(\frac{\ln(k+3)}{\sqrt{\ln\gamma_0}}+(\ln\gamma_0)^{\frac{1}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}\right)=0{,}021\frac{R}{\sigma_0-1}. \qquad (30)$$

Воспользуемся теперь вторым утверждением теоремы B' из книги Н. Г. Чудакова [3], (стр. 112), которое гласит:

Пусть в круге $|s-s_0|\leqslant R$ функция $f(s)$ правильна и $f(s_0)\neq 0$. Тогда

$$-\Re\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\leqslant\frac{4}{R}\ln\frac{M}{|f(s_0)|}+\sum_{\varrho}\Re\frac{1}{\varrho-s_0},$$

где $M=\max\limits_{|s-s_0|\leqslant R}|f(s)|$, а ϱ пробегает все нули функции $f(s)$, лежащие в круге $|s-s_0|\leqslant\dfrac{R}{2}$ (если таких нулей нет, то соответствующая сумма отсутствует).

Применим это неравенство к функции $L(s,\chi)$ в круге $|s-s_1|\leqslant R$ и к функции $L(s,\chi^2)$ в круге $|s-s_2|\leqslant R$. Так как в обоих случаях все члены суммы $\sum\limits_{\varrho}\Re\dfrac{1}{\varrho-s_0}$ отрицательны, то отбросим их, за исключением одного, соответствующего значению $\varrho=\beta+t_0i$ $\left(\text{в силу условия (28) число } \beta+t_0i \text{ попадает в круг } |s-s_1|\leqslant\dfrac{R}{2}\right)$. Тогда, учитывая (30), будем иметь

$$-\Re\frac{L'(s_1,\chi)}{L(s_1,\chi)}\leqslant\frac{4}{R}\ln\frac{M_1}{|L(s_1,\chi)|}+\frac{1}{\beta-\sigma_0}<\frac{0{,}084}{\sigma_0-1}+\frac{1}{\beta-\sigma_0}, \qquad (31)$$

$$-\Re\frac{L'(s_2,\chi^2)}{L(s_2,\chi^2)}\leqslant\frac{4}{R}\ln\frac{M_2}{|L(s_2,\chi^2)|}<\frac{0{,}084}{\sigma_0-1}. \qquad (32)$$

Пусть теперь $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ $(s>1)$. Тогда

$$-\zeta'(\sigma_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\sigma_0}}<1+\int_1^{\infty}\frac{\ln u}{u^{\sigma_0}}du=1+\frac{1}{(\sigma_0-1)^2}<\frac{1{,}001}{(\sigma_0-1)^2},$$

$$\zeta(\sigma_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}>\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{\sigma_0}}=\frac{1}{\sigma_0-1},$$

откуда

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}<\frac{1{,}001}{\sigma_0-1}. \qquad (33)$$

Из соотношений (31), (32) и (33) находим

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)}-4\Re\frac{L'(\sigma_0+t_0i,\chi)}{L(\sigma_0+t_0i,\chi)}-\Re\frac{L'(\sigma_0+2t_0i,\chi^2)}{L(\sigma_0+2t_0i,\chi^2)}<\frac{3,423}{\sigma_0-1}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}.$$

Левая часть этого неравенства, как известно, неотрицательна ([3], формула 37.1), следовательно,

$$\frac{3,423}{\sigma_0-1}+\frac{4}{\beta-\sigma_0}>0,$$

или

$$\beta<1-\left(\frac{4}{3,423}-1\right)(\sigma_0-1)<1-\frac{0,0005}{\ln(k+3)+(\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}(\ln\ln\gamma_0)^{\frac{3}{4}}},$$

и неравенство (27) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чудаков, О нулях L-функций Dirichlet, Математический сборник, 1 (43): 4 (1936).
2. Н. Г. Чудаков, О нулях функций $L(s,\chi)$: Математический сборник, 19 (61): 1 (1946).
3. Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, Гостехиздат (1947).
4. И. М. Виноградов, Верхняя граница модуля тригонометрической суммы, Известия Академии Наук СССР (серия математическая), т. 14, № 3 (1950).
5. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. II (1927).
6. А. И. Климов, Об оценке границы нулей L-функций, Доклады Академии наук СССР, т. 89, № 2 (1953).

Получена 27 декабря 1952 г.
Саратов.