О компактности систем обобщенных почти периодических функций Вейля

А. С. Кованько

На основе результатов, полученных нами в вопросе полноты одного подпространства пространства, определяемого метрикой Вейля, нам удалось построить достаточные условия компактности системы функций Вейля в одном частном понятии сходимости [1].

Этот вопрос был уже нами затронут [2] в общем пространстве Вейля, но сходимость в нем была заменена фундаментальностью последовательности, поскольку мы оперировали в неполном пространстве [3].

Часть наших прежних результатов [2] перекрыта этой статьей.

§ 1.

Напомним некоторые понятия, обозначения и теоремы.

1) Метрика Степанова. Рассмотрим класс функций L_ω $(\omega \geqslant 1)$, определенных на интервале $(-\infty < x < +\infty)$. Искомая метрика определяется формулой

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) = \sup_{-\infty < a < +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{E(a,\, a+T)} |f-\varphi|^\omega \, dx \right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{1}$$

В частности, если $E = (-\infty, +\infty)$, то мы пишем

$$D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi) = \sup_{-\infty < a < +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{a}^{a+T} |f-\varphi|^\omega \, dx \right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{2}$$

2) Метрика Вейля. Эта метрика определяется по формуле

$$D_{w_\omega}^{E}(f, \varphi) = \lim_{T\to\infty} D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) \tag{3}$$

и, если $E = (-\infty, +\infty)$, то мы ее обозначим так:

$$D_{w_\omega}(f, \varphi) = \lim_{T\to\infty} D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi). \tag{4}$$

Обе метрики удовлетворяют известным условиям симметрии, а также правилу сторон треугольника (как это следует из известного неравенства Минковского). Также имеет место соотношение

$$D_{S_{\omega'}}^{TE}(f, \varphi) \leqslant D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi), \tag{5}$$

если $\omega' < \omega$ (что следует из известного неравенства Гёльдера). Кроме того,

$$D_{S_\omega}^{T(E_1+\dots+E_n)}(f, \varphi) \leqslant D_{S_\omega}^{TE_1}(f, \varphi) + \dots + D_{S_\omega}^{TE_n}(f, \varphi). \tag{6}$$

3. Средняя плотность множества в смысле Степанова. Рассмотрим следующую величину (среднюю плотность множества)

$$\delta_S^T E = \sup_{-\infty < a < +\infty} \frac{|E(a, a+T)|}{T}. \tag{7}$$

Эта величина удовлетворяет условиям:

$$\delta_S^T(E_1 + \dots + E_n) \leqslant \delta_S^T E_1 + \dots + \delta_S^T E_n. \tag{8}$$

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены, то между $D_{S_\omega}^{TE}$ и $\delta_S^T E$ существует соотношение

$$\inf|f-\varphi| \cdot (\delta_S^T E)^{\frac{1}{\omega}} \leqslant D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) \leqslant \sup|f-\varphi| \cdot (\delta_S^T E)^{\frac{1}{\omega}}, \tag{9}$$

которое является прямым следствием формулы среднего значения для интеграла.

Определение 1. Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L_ω $(\omega \geqslant 1)$ называется w_ω — почти периодической (w_ω п. п.), если, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$, таких, что

$$D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon.$$

Свойства функций w_ω п. п. Пусть $f(x)$ есть функция w_ω п. п.

I. Как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$, существует число $T_1 > 0$ и число $\sigma > 0$ такие, что

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, 0) < \varepsilon_1, \quad \text{если} \quad T \geqslant T_1 \quad \text{и} \quad \delta_S^T E < \sigma.$$

II. Как бы мало ни было $\varepsilon_2 > 0$, существует число $T_2 > 0$ и число $\eta > 0$ такие, что

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon_2, \quad \text{если} \quad T \geqslant T_2 \quad \text{и} \quad |h| < \eta.$$

III. Как бы мало ни было $\varepsilon_3 > 0$, существует число $T_3 > 0$ и относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$, таких, что

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon_3, \quad \text{если} \quad T \geqslant T_3.$$

Строим так называемое ядро Вейля. Выбираем относительно плотное счетное множество почти периодов $f(x)$

$$\{\tau_n\} \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

так, что

$$n(l+2\eta) - \frac{1}{2} l < \tau_n < n(l+2\eta) + \frac{1}{2} l,$$

где $l > 0$ таково, что любой интервал длины l содержит хотя бы один почти период функции $f(x)$. Строим затем систему непересекающихся интервалов $(\tau_n - \eta < x < \tau_n + \eta)$ и считаем, что

$$K_\varepsilon(x) = C = \frac{1}{2\eta}(l + 2\eta)$$

внутри этих интервалов и $K_\varepsilon(x) = 0$ вне этих интервалов.

Ядро обладает следующими свойствами:

IV. $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} K_\varepsilon(t)\, dt = 1$ (равномерно в α).

V. Существует монотонно возрастающая последовательность чисел $\{A_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = +\infty$, такая, что предел

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2A_n} \int_{-A_n}^{+A_n} f(x+t) \cdot K_\varepsilon(t)\, dt.$$

существует для любого x.

Существует такое число $T_0 > 0$, что

VI. а) $|\varphi(x+a) - \varphi(x)| \leqslant C \cdot D^T_{S_\omega}(f(x+a), f(x));$

б) $|\varphi(x)| \leqslant C \cdot D^T_{S_\omega}(f(x), 0).$

VII. $D^T_{S_1}(f(x), \varphi(x)) \leqslant \overline{\lim\limits_{A\to\infty}} \dfrac{1}{2A} \displaystyle\int_{-A}^{+A} D^T_{S_\omega}(f(x+t), f(x)) \cdot K_\varepsilon(t)\, dt,$

если $T \geqslant T_0$.

Теорема 1. (Люстерник) [4]. Необходимое и достаточное условие компактности системы $\mathfrak{M}(\varphi)$ почти периодических функций Бора в смысле равномерной сходимости состоит в выполнении следующих условий:

1) существует такое число $M > 0$, что $|\varphi(x)| < M$ для всех функций $\varphi(x)$ нашей системы;

2) как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое число $\eta > 0$, что

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |h| < \eta;$$

3) как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, существует относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$, общих всем функциям системы $\mathfrak{M}(\varphi)$, т. е. таких, что $|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всех функций системы $\mathfrak{M}(\varphi)$.

Теорема 2. (Хаусдорф [4]). Необходимое и достаточное условие компактности системы $\mathfrak{M}(u)$ элементов некоторого полного метрического пространства с метрикой $\varrho(u', u'')$ состоит в том, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует конечная система элементов: $u_1, u_2, \ldots, u_n$ нашего пространства, таких, что для любого элемента u можно подобрать элемент u_i такой, что $\varrho(u, u_i) < \varepsilon$.

Определение 2. [1]. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(-\infty < x < +\infty)$ класса L_ω называется D_{w_ω}-равномерно сходящейся, если существует такая функция $f(x)$ (класса L_ω), что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, ему соответствует число $T_0 > 0$, такое, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{S_\omega}^T(f, f_n) < \varepsilon, \quad \text{если } T \geqslant T_0.$$

Теорема 3. [1]. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась D_{w_ω}-равномерно состоит в выполнении следующего условия: как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $T_0 > 0$, что

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}} D_{S_\omega}^T(f_n(x), \ f_m(x)) < \varepsilon, \quad \text{если } T \geqslant T_0.$$

§ 2.

Для дальнейшего нам необходима следующая теорема.

Теорема A. Достаточное условие компактности системы функций $\mathfrak{M}(f)$ $(-\infty < x < +\infty)$ в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости состоит в следующем: как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $T_0 = T_0(\varepsilon)$ и конечная система функций $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ (принадлежащих или нет к системе $\mathfrak{M}(f)$), что для любой функции $f(x)$ системы $\mathfrak{M}(f)$ можно подобрать функцию $\varphi_i(x)$, такую, что

$$D_{S_\omega}^T(f, \ \varphi_i) < \varepsilon, \quad \text{если } T \geqslant T_0.$$

Доказательство. Возьмем любую последовательность $X\{f_n(x)\}$ $(n = 1, \ 2, \ 3, \ldots)$, составленную из функций системы $\mathfrak{M}(f)$. Зададим бесконечно убывающую последовательность чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \cdots (\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0)$ и каждому ε_n подберем соответствующее число $T_n = T_n(\varepsilon_n)$ и конечную систему $\varphi_1^{(n)}, \ \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_{k_n}^{(n)}$. Начнем наше построение с $n = 1$, т. е. с ε_1 и T_1 и системы $\varphi_1^{(1)}, \ldots, \ \varphi_{k_1}^{(1)}$.

Из последовательности $X\{f_n\}$ $(n = 1, \ 2, \ 3, \ldots)$ можно выделить такую подпоследовательность $X_1\{f_1^{(1)}, \ f_2^{(1)}, \ f_3^{(1)} \ldots\}$ и подобрать такую функцию $\varphi_{i_1}^{(1)}$, что

$$D_{S_\omega}^T(f_p^{(1)}, \ \varphi_{i_1}^{(1)}) < \varepsilon_1$$

для любого p и для $T \geqslant T_1$. Затем будем исходить из чисел ε_2 и T_2 и системы $\varphi_1^{(2)} \ldots \varphi_{k_1}^{(2)}$, выделив такую подпоследовательность

$$X_2(f_1^{(2)}, \ f_2^{(2)}, \ f_3^{(2)}, \ldots) \subset X_1$$

и подобрав такую функцию $\varphi_{i_2}^{(2)}$, что будут выполняться неравенства

$$D_{S_\omega}^T(f_p^{(2)}, \ \varphi_{i_2}^{(2)}) < \varepsilon_2,$$

если $T \geqslant T_2$ и для любого p. В n-ом шаге наших построений мы получим подпоследовательность

$$X_n(f_1^{(n)}, \ f_2^{(n)}, \ f_3^{(n)}, \ldots) \subset X_{n-1},$$

числа ε_n и T_n и систему $\varphi_1^{(n)} \ldots \varphi_{k_n}^{(n)}$, такие, что

$$D_{S_\omega}^T(f_p^{(n)}, \ \varphi_{i_n}^{(n)}) < \varepsilon_n \tag{10}$$

при любом p и при $T \geqslant T_n$.

Таким образом, мы строим счетное множество подпоследовательностей

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$$

К этому счетному множеству мы применим диагональный процесс, построив последовательность

$$X_{\Omega}(f_1^{(1)},\ f_2^{(2)},\ f_3^{(3)}, \ldots) \subset X.$$

Покажем, что последовательность является искомой, т. е. D_{w_ω}-равномерно сходящейся. В самом деле, на основании (10) мы можем заключить, что

$$D_{S_\omega}^{T}(\varphi_{i_n}^{(n)},\ f_{n+m}^{(n+m)}) < \varepsilon_n \tag{11}$$

при $T \geqslant T_n$ и при любом m, поскольку $X_n \supset X_{n+m}$. На том же основании при $T \geqslant T_n$ и любом p

$$D_{S_\omega}^{T}(\varphi_{i_n}^{(n)},\ f_{n+p}^{(n+m)}) < \varepsilon_n. \tag{12}$$

В силу (11) и (12) имеем

$$D_{S_\omega}^{T}(f_{n+p}^{(n+p)},\ f_{n+m}^{(n+m)}) \leqslant D_{S_\omega}^{T}(\varphi_{in}^{(n)},\ f_{n+m}^{(n+m)}) +$$

$$+ D_{S_\omega}^{T}(\varphi_{i}^{(n)},\ f_{n+p}^{(n+p)}) < 2\varepsilon_n.$$

Итак,

$$D_{S_\omega}^{T}(f_{n+p}^{(n+p)},\ f_{n+m}^{(n+m)}) < 2\varepsilon_n \tag{13}$$

если $T \geqslant T_n$ и при любых m и p. Откуда следует, что

$$\overline{\lim_{\substack{m\to\infty \\ p\to\infty}}} D_{S_\omega}^{T}(f_{n+p}^{(n+p)},\ f_{n+m}^{(n+m)}) < 2\varepsilon_n \ldots \tag{14}$$

Но это есть условие теоремы 3 в применении к последовательности X_{Ω}, а потому на основании этой же теоремы мы заключаем, что X_{Ω} есть последовательность, D_{w_ω}-равномерно сходящаяся.

Тем самым наша теорема доказана.

§ 3.

Переходим теперь к нашей основной теореме.

Теорема В. Достаточное условие компактности системы $\mathfrak{M}(f)$ — w_ω-почти периодических функций в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости состоит в выполнении следующих условий:

I. Как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$, существуют число $\sigma > 0$ и число $T_1 > 0$, такие, что для любой функции $f(x)$ нашей системы $\mathfrak{M}(f)$ выполняется неравенство

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, 0) < \varepsilon_1,$$

если $\delta_S^T E < \sigma$, когда $T \geqslant T_1$.

II. Как бы мало ни было $\varepsilon_2 > 0$ существуют число $\eta > 0$ и число $T_2 > 0$, такие, что для любой функции $f(x)$ нашей системы $\mathfrak{M}(f)$ имеет место соотношение

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon_2,$$

если $|h| < \eta$ и $T \geqslant T_2$.

III. Как бы мало ни было число $\varepsilon_3 > 0$, существуют число $T_3 > 0$ и относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$, общих всем функциям системы $\mathfrak{M}(f)$, что имеет место соотношение

$$D_{S_\omega}^T(f(x+\tau),\ f(x)) < \varepsilon_3$$

для любой функции $f(x)$ системы $\mathfrak{M}(f)$, если $T \geqslant T_3$.

Доказательство. Ввиду сложности доказательства мы будем вести его по разделам, опираясь на свойства I—VII (§ 1) функции w_ω — почти периодической.

a) Построим ядро $K_\varepsilon(x)$, приняв в условиях II и III §1 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$.

Прежде всего мы напомним, что свойства I, II и III для системы являются соответственно свойствами I, II и III § 1, присущими индивидуально каждой w_ω — почти периодической функции, и каждая функция $f(x)$ при заданных ε_1, ε_2 и ε_3 имеет свои значения: T_1, T_2, T_3, σ и η. Теперь же эти последние пять величин являются характерными для всех функций системы $\mathfrak{M}(f)$ в их совокупности. Поэтому $K_\varepsilon(x)$ $[\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon]$ как зависящее только от η и почти периодов функции теперь оказывается одинаковым для всех функций нашей системы $\mathfrak{M}(f)$.

Итак, сохраняя полностью обозначения § 1 при формулировке свойств I—VII w_ω — почти периодической функции, мы переносим лишь их теперь на функции $f(x)$ всей системы $\mathfrak{M}(f)$ по совокупности.

Итак, каждой функции $f(x)$ будет соответствовать своя функция $\varphi(x)$ (см. § 1, свойства VI и VII), а следовательно, системе $\mathfrak{M}(f)$ будет соответствовать система $\mathfrak{M}(\varphi)$.

b) Рассмотрим свойства функций системы $\mathfrak{M}(\varphi)$. Покажем, что это — система почти периодических функций Бора, которая удовлетворяет всем условиям теоремы 1 (§ 1), а следовательно, является компактной в смысле равномерной сходимости.

Обратимся к условию I настоящей теоремы. Возьмем число T_0 из свойств VI и VII § 1, которые теперь применяются ко всей системе $\mathfrak{M}(f)$ по совокупности. Построим систему полуинтервалов

$$\left(kT_0 + (i-1)\frac{T_0}{n} \leqslant x < kT_0 + i\frac{T_0}{n}\right),$$

где $n > \dfrac{1}{\sigma}$ (σ взята из условия I) $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Теперь построим систему конгруэнтных множеств E_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. E_i состоит из тех полуинтервалов системы, которые выбираются при данном i и при всевозможных k.

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = (-\infty,\ +\infty).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\delta_S^T E_i \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{если} \quad T \geqslant T_0.$$

В силу соотношения 6 § 1 и условия I настоящей теоремы мы имеем

$$D_{S_\omega}^T(f;\,0) \leqslant \sum_1^n D_{S_\omega}^{TE_i}(f,\,0) < n \cdot \varepsilon_1 = M,$$

если $T \geqslant Max\ (T_0,\ T_1)$. M здесь некоторое фиксированное число > 0. Неравенство в) VI § 1 дает нам

$$|\varphi(x)| \leqslant \cdot C \cdot D_{S_\omega}^T(f, 0) \leqslant C \cdot M.$$

Итак, для всех функций системы $\mathfrak{M}(\varphi)$ выполняется условие

$$|\varphi(x)| \leqslant C.\ M.$$

Это есть условие 1) теоремы 1.

Обращаясь к условию II настоящей теоремы и к неравенству а) VI § 1 и взяв $T \geqslant Max\ (T_0,\ T_2)$, $a = h$ $(|h| < \eta)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$, получим

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqslant C\ .\ D_{S_\omega}^T(f\ (x+h),\ f\ (x)) < C \cdot \varepsilon,$$

т. е.

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < C.\ \varepsilon.$$

Но это есть не что иное, как условие 2) теоремы 1 (поскольку ε произвольно мало). Совершенно аналогично, обращаясь к условию III настоящей теоремы и взяв $\varepsilon_3 = \varepsilon$, $T \geqslant Max\ (T_3,\ T_0)$, $a = \tau$, мы в силу того же свойства VI § 1 получим

$$|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| \leqslant C \cdot D_{S_\omega}^T(f\ (x+\tau),\ f\ (x)) < C \cdot \varepsilon.$$

Итак,

$$|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| < C.\ \varepsilon.$$

Из этого последнего неравенства следует, что каждая функция $\varphi(x)$ — почти периодическая по Бору и, кроме того, поскольку τ есть символ почти периода, общего всем функциям системы $\mathfrak{M}(f)$ в смысле Вейля, следует, что τ есть символ почти периода (в смысле Бора), общего всем функциям системы $\mathfrak{M}(\varphi)$. Следовательно, выполнено условие 3) теоремы 1.

Итак, $\mathfrak{M}(\varphi)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а следовательно, $\mathfrak{M}(\varphi)$ компактна в смысле равномерной сходимости. Тогда в силу теоремы 2 для данного ε можно подобрать такую конечную систему функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x)$$

(очевидно, почти периодических по Бору), что для любой функции системы $\mathfrak{M}(\varphi)$ найдется своя функция $\varphi_i(x)$, что

$$|\varphi(x) - \varphi_i(x)| < \varepsilon. \tag{15}$$

с) Обращаемся теперь к свойству VII § 1 в отношении целой системы $\mathfrak{M}(f)$ и к соответствующим обозначениям, введенным там. Из условий II и III настоящей теоремы мы имеем (взяв $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$):

$$D_{S_\omega}^T(f\ (x+\tau_n),\ f\ (x)) < \varepsilon, \tag{16}$$

если $T \geqslant Max(T_0,\ T_3)$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$;

$$D_{S_\omega}^T(f\ (x+\tau_n+h),\ f\ (x+\tau_n)) < \varepsilon, \tag{17}$$

если $T \geqslant Max(T_0,\ T_2)$ и $|h| < \eta$.

Взяв $\overline{T}_0 = Max\ (T_2,\ T_3,\ T_0)$, мы получим в силу (16) и (17), что

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+\tau_n+h),\ f(x)) \leqslant D_{S_\omega}^{T}(f(x+\tau_n+h),\ f(x+\tau_n)) +$$

$$+ D_{S_\omega}^{T}(f(x+\tau_n),\ f(x)) < 2\varepsilon,$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$ и $|h| < \eta$.

Итак,

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+\tau_n+h),\ f(x)) < 2\varepsilon,$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$ и $|h| < \eta$.

Или иначе

$$D_{S_\omega}^{T}(f(x+t),\ f(x)) < 2\varepsilon, \tag{18}$$

если

$$(\tau_n - \eta \leqslant t \leqslant \tau_n + \eta) \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

т. е. неравенство (18) выполняется для тех значений t, для которых $K_\varepsilon(t) \neq 0$.

Обозначим через E_A совокупность всех интервалов $(\tau_n - \eta,\ \tau_n + \eta)$ и их частей, попадающих в интервал $(-A,\ +A)$. Получим

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} D_{S_\omega}(f(x+t),\ f(x)) \cdot K_\varepsilon(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2A}\int_{E_A} D_{S_\omega}(f(x+t),\ f(x)) \cdot K_\varepsilon(t)\, dt <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{2A}\int_{E_A} K_\varepsilon(t)\, dt = \frac{2\varepsilon}{2A}\int_{-A}^{+A} K_\varepsilon(t)\, dt.$$

Совершая переход к пределу при $A \to \infty$, имеем в силу IV § 1

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\, \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} D_{S_\omega}^{T}(f(x+t),\ f(x)) \cdot K_\varepsilon(t)\, dt < 2\varepsilon.$$

Поэтому в силу свойства VII § 1 мы имеем

$$D_{S_1}^{T}(f,\ \varphi) < 2\varepsilon, \tag{19}$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$.

d) Обозначим теперь через E множество точек, где

$$|f - \varphi| > \frac{2\varepsilon}{\sigma}.$$

В силу неравенств (9) и (15) мы имеем очевидно

$$2\varepsilon > D_{S_1}^{T}(f,\ \varphi) \geqslant D_{S_1}^{TE}(f,\ \varphi) \geqslant \frac{2\varepsilon}{\sigma} \cdot \delta_S^T E,$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$,

откуда следует, что

$$\delta_S^T E < \sigma \tag{20}$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$.

Исследуем теперь величину $D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi)$, когда $T \geqslant \overline{T}_0$.
Имеем

$$D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi) \leqslant D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) + D_{S_\omega}^{TcE}(f, \varphi).$$

В силу (5) и (9) имеем

$$D_{S_\omega}^{TcE}(f, \varphi) = D_{S_\omega}^{TcE}(f - \varphi, 0) < \frac{2\varepsilon}{\sigma}(\delta_S^T cE)^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\sigma}.$$

Итак,

$$D_{S_\omega}^{TcE}(f, \varphi) < \frac{2\varepsilon}{\sigma}. \tag{21}$$

Имеем, далее,

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) \leqslant D_{S_\omega}^{TE}(f, 0) + D_{S_\omega}^{TE}(\varphi, 0). \tag{22}$$

Но в силу условия I настоящей теоремы имеем

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, 0) < \varepsilon_1, \tag{23}$$

поскольку $\delta_S^T E < \sigma$ и $T > \overline{T}_0 \geqslant T_1$.
Также имеем в силу (9)

$$D_{S_\omega}^{TE}(\varphi, 0) < CM \cdot (\delta_S^T E)^{\frac{1}{\omega}} < CM \cdot (\sigma)^{\frac{1}{\omega}}. \tag{24}$$

Итак, в силу (21), (22), (23) и (24) получим

$$D_{S_\omega}^{TE}(f, \varphi) < \frac{2\varepsilon}{\sigma} + \varepsilon_1 + CM \cdot \sigma^{\frac{1}{\omega}}. \tag{25}$$

Поскольку σ не ограничено снизу никаким числом, кроме нуля, то мы можем его выбрать столь малым, чтобы

$$CM\sigma^{\frac{1}{\omega}} < \varepsilon_1.$$

Так как ε_1 и ε независимы друг от друга, мы можем выбрать ε так, что

$$\frac{2\varepsilon}{\sigma} < \varepsilon_1.$$

Тогда неравенство (25) дает нам

$$D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi) < 3\varepsilon_1, \tag{26}$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$.

e) Вернемся теперь к неравенству (15). Из него следует, что

$$D_{S_\omega}^{T}(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon_1 \tag{27}$$

при любом T. Сопоставляя (26) и (27), имеем при $T \geqslant \overline{T}_0$

$$D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi_i) \leqslant D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi) + D_{S_\omega}^{T}(\varphi, \varphi_i) < 4\varepsilon_1.$$

Итак, как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$, существует число $\overline{T}_0 > 0$ и конечная система почти периодических функций Бора $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, что для любой функции $f(x)$ системы $\mathfrak{M}(f)$ найдется своя функция $\varphi_i(x)$ такая, что

$$D_{S_\omega}^{T}(f, \varphi_i) < 4\varepsilon_1, \tag{28}$$

если $T \geqslant \overline{T}_0$.

Это значит, что выполнено условие теоремы A, а потому в силу этой теоремы, следует, что система $\mathfrak{M}(f)$ компактна в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости. Итак, теорема B доказана полностью.

§ 4.

Теоремы A и B имеют некоторые важные приложения в теории почти периодических функций.

1) Если $f(x)$ есть $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодическая функция, то легко видеть, что система всех смещений $\{f(x+k)\}$ этой функции компактна в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости, так как она удовлетворяет всем требованиям теоремы B.

Однако здесь верно и обратное заключение, а именно: если система $\{f(x+k)\}$ компактна в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости, то $f(x)$ будет функцией $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодической. Из того факта, что $\{f(x+k)\}$ компактна в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости, следует тем более, что она компактна в смысле сходимости по метрике D_{w_ω}, а тогда в силу результатов, ранее полученных нами [2], $f(x)$ будет функцией $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодической.

Итак, мы нашли следующую теорему, перекрывающую ранее полученные нами результаты [2].

Теорема C. Необходимое и достаточное условие, чтобы $f(x)$ была бы $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодической, состоит в том, чтобы система всех ее смещений $\{f(x+k)\}$ была бы компактной в смысле D_{w_ω}-равномерной сходимости.

2. Рассмотрим теперь вопрос о приближении $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодических функций полиномами Бохнера—Фейера. Если $\{\sigma(x)\}$ есть система всех возможных полиномов Бохнера—Фейера для данной функции $f(x)$, которая предполагается $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодической, то, как легко показать, имеют место следующие неравенства:

$$D_{S_\omega}^{TE}(\sigma(x), 0) \leqslant D_{S_\omega}^{TE}(f(x), 0)$$

и

$$D_{S_\omega}^{TE}(\sigma(x+a), \sigma(x)) \leqslant D_{S_\omega}^{TE}\{f(x+a), f(x)\}.$$

В силу свойств I, II, III (§ 1) $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодической функции и последних неравенств, легко видеть, что система $\sigma(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы B, а потому эта система компактна. В силу этого, выбрав последовательность полиномов $\sigma_{n_1}(x), \sigma_{n_2}(x), \ldots$, которая сходится к $f(x)$ в смысле метрики D_{w_ω}, мы сможем, в силу теоремы B, выделить такую подпоследовательность $\sigma_{n_{i_k}}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, которая сходится D_{w_ω}-равномерно и очевидно к той же функции $f(x)$.

Итак, мы приходим к следующей теореме.

Теорема D. Какова бы ни была $\boldsymbol{w}_\omega$ — почти периодическая функция $f(x)$, существует такая последовательность тригонометрических полиномов

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k^{(n)} e^{i\lambda_k^{(n)} x},$$

которая сходится D_{w_ω}-равномерно к функции $f(x)$.

Примечание. Эта теорема была доказана другим способом Безиковичем в его книге „Almost periodic functions".

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько, К вопросу о сходимости последовательностей функций в смысле метрики Вейля — $D_{w_{(t)}}$, Укр. математ. журн., т. III, № 4.
2. О. С. Кованько, Про компактність систем узагальнених майже періодичних функцій Вейля, Наукові записки Львівського державного університету, серія фізико-математична, вип. I, т. V.
3. А. С. Кованько, О компактности систем обобщенных почти периодических функций Вейля, ДАН СССР, т. XLIII, № 7, 1944.
4. Л. А. Люстерник, Основные понятия функционального анализа, Успехи мат. наук, т. I, стр. 77—140.

Получена 9 апреля 1952 г.
Львов.