

## О приближенном решении систем нелинейных уравнений

Д. Ф. Давиденко

Приближенное решение систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

имеет важное значение в различных разделах физики и техники. Однако методы решения таких систем весьма немногочисленны, и к тому же они не всегда удовлетворяют требованиям практики.

При решении указанных систем в настоящее время применяют преимущественно метод Ньютона, итерации и графические методы<sup>1</sup>. Практические недостатки этих методов хорошо известны.

Так, при применении метода Ньютона важную роль играет выбор первых приближений к решениям. Для этого на практике обычно прибегают к графическим методам, применение которых к системам более чем с тремя неизвестными является чрезвычайно сложным. Кроме того, для получения точного результата необходимо многократное повторение процесса, и при каждом шаге приходится решать систему линейных уравнений.

Метод Ньютона становится неприменимым, если функциональный определитель  $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  обращается в нуль в точке, являющейся искомым решением системы (1), или в малой окрестности этой точки. Обращение в нуль функционального определителя означает или: а) наличие кратного решения или б) наличие двух (или более) близких решений.

Метод итерации можно применять к решению систем уравнений (1) лишь только в том случае, если удастся предварительно преобразовать ее к виду

$$x_i = \omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

так, чтобы во всех точках в некоторой окрестности решения соблюдались следующие условия:

$$\left| \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial \omega_2}{\partial x_i} \right| + \dots + \left| \frac{\partial \omega_n}{\partial x_i} \right| < m < 1, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

<sup>1</sup> Об этих методах см., например, [1].

Такое преобразование далеко не всегда удается выполнить без затруднений.

Здесь наиболее сложным и важным является получение достаточно точного исходного приближения, которое обеспечило бы преобразование системы уравнений, данной в произвольном виде, к виду (2) с соблюдением условий (3).

В некоторых случаях метод итерации вовсе не следует применять, так как сходимость его может оказаться слишком медленной. Вследствие этого необходимо заранее исследовать условия сходимости метода итерации.

Заметим, что к решению некоторого класса систем нелинейных уравнений (1) применяется также метод Зейделя [2]. Однако в нем сохраняются все практические недостатки обычного метода итерации.

Графические методы дают, как правило, грубо приближенные значения решений, не всегда удовлетворяющие требованиям практики. Кроме того, известно, что они приводят при сколь-нибудь сложных уравнениях к весьма трудоемким выкладкам.

Даже в простейшем случае построение кривой, соответствующей уравнению  $F(x, y) = 0$ , связано с утомительными вычислениями, так как для определения значений  $y$ , соответствующих определенному значению  $x = x_0$ , надо решить уравнение  $F(x_0, y) = 0$ .

К решению систем уравнений более чем с тремя неизвестными графические методы, как уже указывалось, практически неприменимы.

Для приближенного решения систем нелинейных алгебраических уравнений может также применяться метод „наискорейшего спуска“ [3]. Общая идея этого метода восходит еще к Коши, который предложил его в 1847 г. для решения задачи о минимуме функции  $n$  переменных и приводящейся к ней задаче о решении систем  $n$  алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными. Для общих функциональных уравнений метод разработан Л. В. Канторовичем [4].

Весьма существенным неудобством практического применения метода наискорейшего спуска к решению систем нелинейных алгебраических уравнений является то, что при каждом шаге необходимо, вообще говоря, решать нелинейное уравнение.

Следует здесь также указать на работу Е. Lahaye [5], в которой предлагается один способ приближенного решения некоторого класса систем трансцендентных уравнений. Суть этого способа состоит в следующем.

Система уравнений обобщается введением параметра  $t$  так, что первоначальная система получается при  $t = 1$ . Обобщенная система решается при отдельных значениях  $t$ :  $t_0, t_1, \dots, t_k = 1$ . Система при  $t_0$  может быть легко решена. Система при  $t_{i+1}$  решается методом Ньютона, начиная с решения системы при  $t_i$ .

Некоторое практическое неудобство этого способа заключается в том, что точки деления  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$  интервала  $0-1$  приходится определять путем многократных проб, поскольку при произвольном выборе  $t_i$  метод Ньютона может оказаться расходящимся.

На практике очень часто приходится иметь дело также с более общими системами алгебраических и трансцендентных уравнений вида

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — параметр, принимающий заданные значения на некотором конечном интервале. Однако общих методов приближенного решения таких систем до настоящего времени, насколько нам известно, не существует. Их приходится решать в отдельности для каждого заданного значения параметра  $\lambda$  вышеуказанными методами решения систем (1), что практически неудобно, а иногда и вовсе невозможно.

Отсюда следует признать необходимым развитие общих методов приближенного решения указанных систем, которые удовлетворяли бы запросам практики в отношении точности получаемых результатов и простоты требуемых расчетов.

В настоящей работе мы предлагаем один общий метод приближенного решения систем уравнений (4) и их частного вида (1), основанный на применении методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка<sup>1</sup>.

Предлагаемый метод, как нам кажется, является одним из наиболее эффективных при решении задач указанного типа. Он в одинаковой мере пригоден как для решения систем алгебраических, так и трансцендентных уравнений. Даже в тех случаях, когда известные методы неприменимы или трудно применимы, наш метод реализуется на практике весьма просто и дает удовлетворительные результаты.

Следует также заметить, что этот метод может быть непосредственно применен и к вопросу о численном решении нелинейных интегральных уравнений.

Основное внимание в этой работе уделяется методике практического нахождения приближенных решений систем нелинейных уравнений и ее применению к конкретным примерам. Вопросы теоретического анализа быстроты сходимости метода будут рассмотрены в нашей следующей работе.

В первом параграфе работы даны в общем виде правила приближенного решения систем нелинейных уравнений, которые содержат в себе параметр  $\lambda$ , принимающий заданные значения на некотором конечном интервале. Во втором параграфе рассматривается применение этих правил к решению систем уравнений, не содержащих параметра  $\lambda$ . В третьем — изложенная методика иллюстрируется конкретными примерами.

## § 1.

Пусть дана система  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1,1)$$

где  $\lambda$  — параметр, принимающий заданные значения на конечном интервале  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ .

<sup>1</sup> Краткое изложение основных принципов этого метода опубликовано в ДАН СССР, т. LXXXVIII, № 4, 1953.

Предположим, что при некотором заданном значении параметра  $\lambda$ , скажем,  $\lambda = \lambda_0$ , решение системы (1,1) нам известно:

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \dots, \quad x_n = x_n^{(0)}. \quad (1,2)$$

Предположим также, что:

1) все функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  определены и непрерывны в некоторой  $(n+1)$ -мерной области  $G$  изменения  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ , содержащей точку  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_0)$ ;

2) существуют и непрерывны в  $G$  частные производные от этих функций по всем аргументам;

3) функциональный определитель

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

в точке  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_0)$  отличен от нуля.

Требуется найти приближенные решения системы (1,1) для заданных значений параметра  $\lambda > \lambda_0$ .

Для нахождения указанных решений поступаем следующим образом.

Принимая параметр  $\lambda$  за независимую переменную и считая  $x_1, x_2, \dots, x_n$  функциями от этой переменной, дифференцируем уравнения (1,1) по  $\lambda$ . В результате получим систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\frac{dx_r}{d\lambda}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_r} \cdot \frac{dx_r}{d\lambda} = - \frac{\partial f_k}{\partial \lambda}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1,3)$$

Пусть определитель этой системы во всех точках области  $G$  отличен от нуля, т. е.

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \neq 0.$$

Разрешив систему (1,3) относительно производных

$$\frac{dx_r}{d\lambda} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

получим

$$\frac{dx_r}{d\lambda} = \frac{\Delta_r(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)} = F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \quad (1,4)$$

$$r=1, 2, \dots, n,$$

где  $\Delta_r(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) — определители, получающиеся из определителя системы (1,3) путем замены элементов  $r$ -го столбца свободными членами.

Очевидно, что кривая

$$x_1 = x_1(\lambda), \quad x_2 = x_2(\lambda), \dots, \quad x_n = x_n(\lambda), \quad (1,5)$$

определяемая системой (1,1) и проходящая через точку

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_0),$$

будет интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (1,4).

Чтобы определить для заданных  $\lambda$  точки кривой (1,5) или, что то же самое, решения системы (1,1), систему (1,4) численно интегрируем на интервале  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$  при начальных условиях (1,2):

$$\lambda = \lambda_0; \quad x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \dots, \quad x_n = x_n^{(0)}.$$

При этом шаг интегрирования выбираем по возможности с таким расчетом, чтобы точками деления интервала были заданные значения параметра  $\lambda$ .

Полученные при интегрировании численные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  для каждого заданного значения параметра  $\lambda$  и будут искомыми приближенными решениями системы (1,1).

Если интегрирование производить методом Адамса—Штермера, то на всем протяжении вычислений пользуемся одной и той же формулой

$$\Delta x_i = \eta_i + \frac{1}{2} \Delta \eta_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{i-3}, \quad (1,6)$$

где  $\eta = h \frac{dx}{d\lambda}$  ( $h$  — шаг интегрирования);  $\Delta \eta$ ,  $\Delta^2 \eta$  и  $\Delta^3 \eta$  — разности соответственно первого, второго и третьего порядков.

Вычисления располагаются в простую схему и с удобством выполняются на счетных машинах.

Число верных цифр в получаемых результатах будет, вообще говоря, на единицу меньше, чем число цифр, сохранявшихся при вычислениях.

Частные случаи. 1. Предположим, что в некоторой точке  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$  области  $G$ , являющейся решением системы (1,1), определитель системы (1,3) обращается в нуль, т. е.

$$\Delta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i) = 0, \quad (1,7)$$

но

$$\Delta_r(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i) \neq 0, \quad r=1, 2, \dots, n.$$

При этом правые части  $F_r (r=1, 2, \dots, n)$  системы (1,4) обращаются в  $\infty$ , и ее нельзя численно интегрировать в окрестности точки

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i).$$

Для того, чтобы в этом случае найти решения системы (1,1) в окрестности точки  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ , поступаем следующим образом. Систему  $n$  уравнений (1,4) заменяем новой системой, состоящей из  $n+1$  уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_r}{dt} &= \Delta_r(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda), \quad r=1, 2, \dots, n, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda). \end{aligned} \quad (1,8)$$

где  $t$  — новая независимая переменная, и численно интегрируем ее на некотором интервале  $t_0 \leq t \leq t^*$ .

<sup>1</sup> О методах численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка см., например, [6].

В качестве начальных значений для  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\lambda$  принимаем какую-нибудь из уже известных систем их значений, полученных при численном интегрировании системы (1,4), из достаточно малой окрестности точки  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ , т. е. значения вида

$$x_1 = x_1^{(i)} \pm \delta x_1, \quad x_2 = x_2^{(i)} \pm \delta x_2, \dots, \quad x_n = x_n^{(i)} \pm \delta x_n, \quad \lambda = \lambda_i \pm \delta \lambda.$$

Начальное значение для  $t$  выбираем произвольно, взяв, например,  $t_0 = 0$ .

Пройдя некоторую окрестность точки  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ , снова возвращаемся к системе (1,4) и продолжаем численно интегрировать ее (если это необходимо), причем за начальные значения  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\lambda$  берем последнюю из систем их значений, полученных при численном интегрировании системы (1,8).

Значения  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\lambda$ , полученные численным интегрированием системы (1,8), и будут искомыми приближенными решениями системы (1,1) в окрестности точки  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ .

Здесь необходимо заметить, что при прохождении через точку  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$  производная  $\frac{d\lambda}{dt}$  меняет знак (так как в силу условия (1,7) она в этой точке обращается в нуль) и, следовательно,  $\lambda$  начинает убывать. Поэтому при переходе от системы  $n + 1$  уравнений (1,8) к системе  $n$  уравнений (1,4) необходимо шаг интегрирования  $h$  выбрать отрицательным, т. е. изменить направление интегрирования. Это обеспечит изменение параметра  $\lambda$  в том направлении, в каком он менялся до перехода к системе  $n$  уравнений (1,4).

Вообще направление интегрирования будет меняться каждый раз, как только мы проходим через точки кривой (1,5), в которых выполняется условие (1,7).

Заметим также, что в силу условий

$$\Delta_r(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i) \neq 0, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

уравнения (1,4) в окрестности точки  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$  можно разрешить относительно  $\frac{dx_r}{dx_k}$  ( $r = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ) и  $\frac{d\lambda}{dx_k}$ , т. е. взять за независимую переменную любое  $x_k$ , и в этой окрестности вместо системы (1,8) численно проинтегрировать систему

$$\frac{dx_r}{dx_k} = \frac{\Delta_r(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\Delta_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}, \quad r = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

$$\frac{d\lambda}{dx_k} = \frac{\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}{\Delta_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda)}.$$

2. Пусть теперь в точке  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$  области  $G$ , являющейся решением системы (1,1), выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i) &= 0, \\ \Delta_r(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}, \lambda_i) &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1,9)$$

Такие точки, которые одновременно удовлетворяют условиям (1,9) и (1,1), будем называть особыми точками интегральной кривой (1,5) <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Эти особые точки отдельной интегральной кривой, т. е. особые точки, встречающиеся в дифференциальной геометрии, не следует смешивать с особыми точками дифференциальных уравнений.

Очевидно, что в этом случае также численным интегрированием системы (1,4) нельзя будет найти решения системы (1,1) в окрестности особой точки. Поэтому, чтобы найти указанные решения, необходимо в окрестности особой точки вместо системы (1,4) численно проинтегрировать систему (1,8), т. е. поступить, вообще говоря, аналогично предыдущему случаю.

При этом некоторое осложнение будет только в том случае, если особая точка является точкой самопересечения кривой (1,5).

В самом деле, в момент прохождения особой точки производные  $\frac{dx_r}{dt}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\frac{d\lambda}{dt}$  в системе (1,8) меняют свои знаки (так как в силу условий (1,9) они в этой точке обращаются в нуль) и, следовательно,  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\lambda$  меняют направление своего изменения, в то время как в действительности они должны меняться в прежнем направлении.

В данном случае при численном интегрировании системы (1,8) после прохождения особой точки следует изменить знаки вышеуказанных производных на противоположные. Этим самым мы обеспечим изменение  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\lambda$  после особой точки в том же направлении, в каком они изменялись до особой точки.

## § 2.

Предлагаемый метод весьма просто применим также и к нахождению приближенных решений систем алгебраических и трансцендентных уравнений

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2,1)$$

которые не содержат параметра  $\lambda$ .

В этом случае необходимо только предварительно преобразовать систему (2,1) к виду (1,1), рассмотренному в § 1.

С этой целью в систему (2,1) вводим параметр  $\lambda$  так, чтобы:

1) при  $\lambda = 1$  преобразованная система

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2,2)$$

обращалась в исходную (2,1);

2) при  $\lambda = 0$  можно было без затруднений найти ее решение

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \dots, \quad x_n = x_n^{(0)}.$$

Если при этом функциональный определитель

$$J = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

окажется равным нулю в точке  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, 0)$ , то следует ввести параметр  $\lambda$  каким-либо другим способом, однако так, чтобы условия 1) и 2) выполнялись.

С преобразованной системой (2,2) поступаем аналогично вышеизложенному (§ 1), причем полученную систему дифференциальных уравнений численно интегрируем на интервале  $0 \leq \lambda \leq 1$ . В качестве начальных

условий берем значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , соответствующие  $\lambda = 0$ . Значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при  $\lambda = 1$  будут искомым решением системы (2,1).

З а м е ч а н и е. Эффективность решения системы (2,1) в значительной мере зависит от способа введения параметра  $\lambda$ .

### § 3.

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим два примера.

1. Пусть дано уравнение

$$\arcsin \frac{\lambda}{x} - 2 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{x^2}} + 0,047x - 0,094\lambda - 1,844 = 0. \quad (3,1)$$

Предположим, что требуется найти приближенные решения этого уравнения для таких значений параметра  $\lambda$ :

$$0, 1, 2, 3, \dots, 10.$$

Продифференцировав левую часть уравнения (3,1) по  $\lambda$  и разрешив относительно производной  $\frac{dx}{d\lambda}$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{0,094x^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} - x(x+2\lambda)}{0,047x^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} - \lambda(x+2\lambda)}. \quad (3,2)$$

Уравнение (3,2) численно интегрируем методом Адамса—Штермера на интервале  $0 \leq \lambda \leq 10$  при начальном условии

$$\lambda = 0, x = 81,78723,$$

которое находим непосредственно из уравнения (3,1), полагая в нем  $\lambda = 0$ .

Ограничиваясь при вычислениях пятью десятичными знаками, шаг интегрирования  $h$  выбираем равным 0,5. При таком выборе  $h$  разности третьего порядка в формуле (1,6) не оказывают влияния на результат, и мы их не учитываем при вычислениях.

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Начало таблицы составляем способом последовательных приближений<sup>1</sup>.

Полученные значения  $x$ , соответствующие значениям  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$ , и будут искомыми решениями уравнения (3,1).

Погрешность, допущенная при вычислениях, не превышает  $10^{-4}$ .

Заметим, что применение любого из существующих методов к решению уравнения (3,1) потребовало бы решения десяти уравнений соответственно для каждого заданного значения параметра  $\lambda$  и, следовательно, большой затраты времени. В частности, при решении этого уравнения методом итерации необходимо, прежде всего, для каждого  $\lambda$  графически определить достаточно точные исходные приближения к решениям, которые обеспечили бы преобразование уравнения (3,1) к виду

$$x = \omega(x, \lambda_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$

с соблюдением условия

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| < m < 1$$

<sup>1</sup> А. Н. Крылов, [6], стр. 301.



(см. введение), что в данном случае представляет значительные трудности.

Таблица 1

$n$	$\lambda$	$x$	$\Delta x$	$\eta = h \frac{dx}{d\lambda}$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$
0	0	81,78723	0,86993	0,86993	0,00118	
1	0,5	82,65716		0,87111		
0	0	81,78823	0,87052	0,86993	0,00118	2
1	0,5	82,65775	0,87170	0,87111	0,00120	0
2	1,0	83,52945	0,87292	0,87231	0,00120	2
3	1,5	84,40237	0,87410	0,87351	0,00122	-1
4	2,0	85,27647	0,87536	0,87473	0,00121	2
5	2,5	86,15183	0,87653	0,87594	0,00123	-1
6	3,0	87,02836	0,87782	0,87717	0,00122	1
7	3,5	87,90618	0,87899	0,87839	0,00123	-1
8	4,0	88,78517	0,88025	0,87962	0,00122	1
9	4,5	89,66542	0,88144	0,88084	0,00123	-1
10	5,0	90,54686	0,88270	0,88207	0,00122	0
11	5,5	91,42956	0,88390	0,88329	0,00122	0
12	6,0	92,31346	0,88512	0,88451	0,00122	-1
13	6,5	93,19858	0,88634	0,88573	0,00121	-1
14	7,0	94,08492	0,88754	0,88694	0,00120	0
15	7,5	94,97246	0,88874	0,88814	0,00120	-1
16	8,0	95,86120	0,88994	0,88934	0,00119	0
17	8,5	96,75114	0,89112	0,89053	0,00119	-2
18	9,0	97,64226	0,89232	0,89172	0,00117	
19	9,5	98,53458	0,89347	0,89289		
20	10,0	99,42805				

Кроме того, для получения каждого решения с заданной точностью необходимо, вообще говоря, многократное повторение процесса итерации.

Предлагаемым методом, как мы уже убедились, уравнение (3,1) решается довольно просто и не требует большой затраты времени, так как получаем сразу, одно за другим, решения для всех значений  $\lambda$ .

2. В качестве второго примера возьмем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} y - \sin x + 1,32 &= 0,^1 \\ \cos y - x + 0,85 &= 0. \end{aligned} \quad (3,3)$$

Пусть требуется найти ее решение с точностью до  $10^{-4}$ .

Преобразуем прежде всего систему (3,3) к виду (1,1), для чего вводим параметр  $\lambda$  следующим образом:

$$\begin{aligned} y + \lambda(1,32 - \sin x) &= 0, \\ \cos y - x + 0,85 &= 0. \end{aligned} \quad (3,4)$$

Полученная система уравнений при  $\lambda = 1$  совпадает с исходной (3,3), а при  $\lambda = 0$  она имеет решение

$$x = 1,85; y = 0.$$

<sup>1</sup> Этот пример мы взяли из книги Дж. Скарборо [1].

Таблица 2

$n$	$\lambda$	$x$	$\Delta x$	$\eta = h \frac{dx}{dz}$	$J\eta$	$J^2\eta$	$y$	$Jy$	$\xi = h \frac{dy}{dz}$	$J\xi$	$J^2\xi$
0	0	1,85000	0,00000	0,00000	-0,00129		0,00000	-0,03587	-0,03587	0,00003	
1	0,1	1,85000	-0,00065	-0,00129	-0,00128		-0,03587	-0,03584	-0,03584	0,00005	
0	0	1,85000	-0,00065	0,00000	-0,00128	1	0,00000	-0,03586	-0,03587	0,00005	11
1	0,1	1,84935	-0,00192	-0,00128	-0,00127		-0,03586	-0,03580	-0,03582	0,00016	
2	0,2	1,84743	-0,00255	-0,00255	-0,00127		-0,07166	-0,03566	-0,03566		
0	0	1,85000	-0,00064	0,00000	-0,00128	1	0,00000	-0,03586	-0,03587	0,00005	11
1	0,1	1,84936	-0,00192	-0,00128	-0,00127	3	-0,03586	-0,03575	-0,03582	0,00016	9
2	0,2	1,84744	-0,00318	-0,00255	-0,00124	5	-0,07161	-0,03553	-0,03566	0,00025	9
3	0,3	1,84426	-0,00440	-0,00379	-0,00119	6	-0,10714	-0,03525	-0,03541	0,00034	7
4	0,4	1,83986	-0,00555	-0,00498	-0,00113	6	-0,14239	-0,03486	-0,03507	0,00041	6
5	0,5	1,83431	-0,00665	-0,00611	-0,00107	6	-0,17725	-0,03443	-0,03466	0,00047	4
6	0,6	1,82766	-0,00769	-0,00718	-0,00101	7	-0,21168	-0,03393	-0,03419	0,00051	3
7	0,7	1,81997	-0,00867	-0,00819	-0,00094	7	-0,24561	-0,03341	-0,03368	0,00054	0
8	0,8	1,81130	-0,00957	-0,00913	-0,00087		-0,27902	-0,03286	-0,03314	0,00054	
9	0,9	1,80173	-0,01041	-0,01000			-0,31188	-0,03233	-0,03260		
10	1,0	1,79132					-0,34421				

Дифференцируя левые части уравнений (3,4) по  $\lambda$  в предположении, что  $x$  и  $y$  являются функциями  $\lambda$ , и разрешая относительно производных  $\frac{dx}{d\lambda}$  и  $\frac{dy}{d\lambda}$ , имеем

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\lambda} &= \sin y \frac{1,32 - \sin x}{1 + \lambda \cos x \sin y}, \\ \frac{dy}{d\lambda} &= - \frac{1,32 - \sin x}{1 + \lambda \cos x \sin y}.\end{aligned}\tag{3,5}$$

Систему дифференциальных уравнений (3,5) при начальном условии

$$\lambda = 0; \quad x = 1,85, \quad y = 0$$

численно интегрируем методом Адамса—Штермера на интервале  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Для получения решения системы уравнений (3,3) с заданной точностью  $10^{-4}$  вычисления производим с пятью десятичными знаками. При этом шаг интегрирования  $h$  достаточно выбрать равным 0,1.

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Как и в предыдущем примере, начало таблицы составляем способом последовательных приближений.

Полученные значения неизвестных  $x$  и  $y$  при  $\lambda = 1$  и будут искомым приближенным решением системы (3,3).

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}f(x, y) &= y - \sin x + 1,32, \\ \varphi(x, y) &= \cos y - x + 0,85,\end{aligned}$$

то вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}f(1,79132; -0,34421) &= 0,00001, \\ \varphi(1,79132; -0,34421) &= 0,00002.\end{aligned}$$

В заключение выражаю глубокую благодарность действительному члену АН УССР Н. Н. Боголюбову за предложенную тему и ряд ценных советов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Скарборо, Численные методы математического анализа, Гостехиздат, 1934.
2. Д. М. Загадский, К вопросу о приложимости метода Зейделя к решению систем нелинейных уравнений, Л. Учен. зап. пед. ин-та, 28 (1939).
3. Н. Суггу, The method of steepest descent for non-linear minimization problems, Quarterly of Appl. Mathem., 2, № 3 (1944).
4. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, т. III, вып. 6 (28) (1948).
5. E. Lahaye, Sur la resolution des systemes d'equations transcendantes, Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci (5), 34 (1948).
6. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, М.-Л., 1950.

Получена 8 декабря 1952 г.

Киев.