Линейные формы и статистические критерии. I.

Ю. В. Линник

1.

Линейные формы

§ 1.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ представляют собой независимые наблюдения над случайной величиной X, распределенной по закону $F(x)$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} L_1(x) &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r \\ L_2(x) &= b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_rx_r \end{aligned}\right\} \qquad (1,1)$$

и

две линейные формы с постоянными реальными коэффициентами от наблюдений (линейные статистики).

Мы будем допускать обращение некоторых коэффициентов a_i и b_i в нуль, но не всех сразу, так что $\sum_{i=1}^{r} a_i^2 \neq 0$ и $\sum_{i=1}^{r} b_i^2 \neq 0$.

Мы будем интересоваться теми законами $F(x)$, при которых наши формы $L_1(x)$ и $L_2(x)$ оказываются одинаково распределенными. Это мы будем обозначать $L_1(x) \cong L_2(x)$. Такие законы образуют при заданных L_1 и L_2 некоторые множества законов Ω_{L_1, L_2}. Требование одинаковой распределенности $L_1(x)$ и $L_2(x)$ можно интерпретировать как требование однородности соответствующих выборок и на этом основании построить статистический критерий для испытания гипотезы о принадлежности закона $F(x)$ к множеству Ω_{L_1, L_2}. В частности, таким образом удается построить новый критерий принадлежности закона к нормальному типу.

В первой части работы будут изложены теоретико-вероятностные теоремы и их доказательства, а во второй — их приложения к математической статистике.

§ 2.

Для данных двух форм $L_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r$, и $L_2(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_rx_r$ введем целую функцию комплексного переменного

$$\sigma(z) = |a_1|^z + |a_2|^z + \cdots + |a_r|^z - |b_1|^z - \cdots - |b_r|^z,$$

которую мы будем называть **о п р е д е л я ю щ е й ф у н к ц и е й.**

Теорема I. Пусть даны две линейные статистики

$$L_1(x) = a_1x_1 + \ldots + a_rx_r$$
$$L_2(x) = b_1x_1 + \ldots + b_rx_r,$$

удовлетворяющие условию [1]

$$\sup(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_r|). \quad (2,1)$$

Для эквивалентности двух утверждений —

(A) наблюдения x_i принадлежат к нормальному типу распределений,

(B) статистики $L_1(x)$ и $L_2(x)$ одинаково распределены — необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_r$;

2) $\sigma(2) = 0$;

3) все положительные корни $\sigma(z)$, являющиеся целыми числами, делящимися на 4, должны быть простыми;

4) все положительные корни $\sigma(z)$, являющиеся целыми четными числами $\equiv 2 \pmod 4$, должны иметь кратность не свыше 2, притом, если есть такой двукратный корень, он должен быть единственным и максимальным из всех положительных корней $\sigma(z)$;

5) если $\sigma(z)$ имеет положительный корень γ, не являющийся целым четным числом, то он должен быть единственным, максимальным из положительных корней, простым, и $\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ $\left|\text{целая часть } \frac{\gamma}{2}\right|$ должна быть нечетной.

Доказательство теоремы проводится в § 3—54 и заканчивается в § 54.

В разделе II будут даны приложения теоремы 1 к статистическим критериям.

Теорема II. Пусть заданы линейные статистики

$$L_1(x) = a_1x_1 + \ldots + a_rx_r$$
$$L_2(x) = b_1x_1 + \ldots + b_rx_r,$$

под условием

$$\sup(|a_1|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, \ldots, |b_r|). \quad (2,1)$$

Пусть для некоторого закона $F(x)$ распределения наблюдений x_i имеем

$$L_1(x) \cong L_2(x).$$

Пусть γ — максимальный реальный корень определяющей функции $\sigma(z)$. Тогда $\gamma > 0$. Если закон $F(x)$ имеет $2m$-й момент, где $m = \left[\frac{\gamma}{2} + 1\right]$, то $F(x)$ — нормальный закон (быть может, несобственный).

Доказательство этой теоремы проводится в § 3—26 и заканчивается в § 26.

[1] В моей заметке „Линейные статистики и нормальный закон распределения" (ДАН СССР, т. LXXXIII, № 3) это условие по ошибке опущено. Случай его нарушения должен быть изучен дополнительно.

В разделе II будут даны ее приложения к математической статистике и к выводу закона Максвелла в классической физике для распределения скорости движения молекул [1].

Если отбросить требование (2,1), то получается сходная с II теорема.

Теорема II′. Пусть для некоторого закона $F(x)$ распределения наблюдений x_i имеем $L_1(x) \simeq L_2(x)$, но требование (2,1) не налагается. Пусть σ есть точная верхняя грань абсцисс нулей определяющей функции

$$\sigma(z) = |a_1|^z + \cdots + |a_r|^z - |b_1|^z - \cdots - |b_r|^z.$$

Если закон $F(x)$ имеет $2m$-й момент, где

$$m = \left[\frac{\sigma}{2} + 1\right],$$

то $F(x)$ — нормальный закон (быть может, несобственный). Заметим, что если $\sigma(z) \not\equiv 0$, то всегда $\sigma < \infty$. Теорема II′ доказывается в § 3—26.

Следствие. Если $\sigma(z) \not\equiv 0$ и $F(x)$ имеет все моменты, то из теоремы II′ следует, что $F(x)$ нормальный (быть может, несобственный) закон распределения.

Это следствие в несколько иной формулировке доказано Марцинкевичем [2]. При этом Марцинкевич ставит вопрос о том, можно ли в формулировке требовать существования только второго момента $a_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$. Ответ на этот вопрос отрицательный. Более того, существование любого фиксированного количества моментов закона $F(x)$ при условии $\sigma(z) \not\equiv 0$ и $L_1(x) \simeq L_2(x)$ еще не обеспечивает нормальности $F(x)$. Это доказывается в § 55.

Предыдущие теоремы трактуют случай нормальности. Перейдем к более общему случаю.

Теорема III. Пусть заданы числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ под условием

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_l \leqslant 2. \tag{2,4}$$

Тогда можно построить бесконечно много четверок линейных статистик

$$L_i = a_1^{(i)} x_1 + \cdots + a_r^{(i)} x_r; \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a_m^{(i)} \geqslant 0,$$

таких, что если

$$L_1(x) \simeq L_2(x) \text{ и } L_3(x) \simeq L_4(x) \tag{2,5}$$

для какого-либо симметричного закона $\Phi(x)$ с характеристической функцией $f(u)$, то $f(u)$ имеет вид

$$f(u) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{e} A_{\gamma_j} |u|^{\gamma_j}\right), \tag{2,6}$$

где A_{γ_i} — некоторые константы, причем $A_{\gamma_1} \geqslant 0$ и $A_{\gamma_e} \geqslant 0$.

Точно так же, если задан симметрический закон $\Phi(x)$ с х. ф. [1]

[1] Для краткости мы всюду дальше пишем х. ф. вместо характеристическая функция.

вида (2,6), например, композиция устойчивых законов с х. ф.

$$f(u) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{e} A_{\gamma} |u|^{\gamma_j}\right), \quad \text{где} \quad A_{\gamma_j} \geqslant 0,$$

то для $\Phi(x)$ будем иметь

$$L_1(x) \cong L_2(x); \quad L_3(x) \cong L_4(x).$$

Эта теорема доказывается в § 56.

Множество х. ф. типа (2,6), к сожалению, не исчерпывается композициями устойчивых законов. Его состав поясняется теоремой IV.

Т е о р е м а IV. Пусть заданы положительные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_e$ под условиями

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_e, \; 0 < \gamma_1 < 2, \tag{2,7}$$

положительное число $A_e > 0$ и произвольные реальные числа $E_2, E_3, \ldots, E_{e-1}$. Тогда при всяком достаточно большом A функция

$$f(u) = \exp(-A|u|^{\gamma_1} + E_2|u|^{\gamma_2} + \cdots + E_{e-1}|u|^{\gamma_{e-1}} - A_e|u|^{\gamma_e}) \tag{2,8}$$

будет характеристической функцией для некоторого симметрического закона $\Phi(x)$.

Доказательство этой теоремы дается в § 44—49.

Общие теоремы об одинаково распределенных формах выглядят довольно громоздко. Мы приведем две из них.

Т е о р е м а V. Пусть даны две линейные и одинаково распределенные статистики

$L_1(x)$ и $L_2(x)$ с условием

$$\sup(|a_1|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, \ldots, |b_r|). \tag{2,1}$$

Тогда $f(u) \neq 0$ на всей оси. Обозначая $\psi(u) = \ln|f(u)|^2$, получим $\psi(u) = \psi(-u)$ и для $u \geqslant 0$

$$\int_0^u \frac{\psi(u)}{u} du = \sum_{j=1}^{k_1} u^{\gamma_j} \cdot P_{\gamma_j}(\ln u) + \sum_{m=0}^{\infty} S_m(u), \tag{2,2}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k_1}$ — реальные нули $\sigma(z)$, $P_{\gamma_j}(\ln u)$ — полиномы степени $\leqslant k_2$, и

$$S_m(u) = \sum_{j=1}^{k_3} [u^{\varrho_j} \cdot P_{\varrho_j}(\ln u) + u^{\bar{\varrho}_j} \cdot \overline{P_{\varrho_j}(\ln u)}],$$

где $k_1, k_2, k_3 \ldots$ — константы, зависящие только от $\sigma(z)$, $P_{\varrho_j}(\ln u)$ — полиномы степени $\leqslant k_2$; ϱ_j — комплексные корни $\sigma(z)$ в верхней полуплоскости $z = x + iy$, между ординатами $y = m + \delta_0$ и $y = m + 1 + \delta_0$, причем δ_0 можно и нужно выбрать так, чтобы все корни $\sigma(z)$ были на расстоянии $\geqslant \delta_1$ от горизонталей $y = m + \delta$. Ряд (2,2) будет сходиться равномерно во всяком сегменте полупрямой $[0, \infty)$.

Далее, если отметим среди точек $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, такие точки, для которых соответствующие полиномы $P_{\gamma_j}(\ln u)$ не исчезают тождественно, и если σ_1 и $\sigma_2 \geqslant \sigma_1$ — крайние из этих точек, то абсциссы всех комплексных нулей ϱ_j, для которых $P_{\varrho_j}(\ln u) \neq 0$, лежат между σ_1 и σ_2. При этом σ_1 удовлетворяет условию

$$0 < \sigma_1 < 2. \tag{2,3}$$

Теорема V доказывается в § 3—27, причем там сообщаются в виде лемм еще некоторые сведения о ряде (2,2).

В случае, когда условие (2,1) нарушено, представление (2,2), вообще говоря, действует только вблизи 0. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема V'. В условиях теоремы V, за исключением (2,1), имеем представление (2,2) при $0 \leqslant u \leqslant u_0$, где u_0 — некоторое число, причем при $|u| > u_0$ и $0 < \sigma_1 < 1$ $f(u)$ может, вообще говоря, быть любой невогнутой книзу четной функцией, обращающейся в 0 при $|u| \geqslant u_1 > 0$.

Доказательство этой теоремы будет дано в § 57.

Отметим еще, что ввиду известной дуальности между функцией и ее трансформацией Фурье, при которой умножению функций отвечает свертка трансформаций Фурье и обратно, можно установить некоторую дуальность между умножением х. ф., отвечающим сложению независимых наблюдений, и умножением интегральных законов, отвечающим рассмотрению максимума наблюдений. Ввиду этого линейным формам $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ можно сопоставить неаналитические статистики $\sup(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n)$ и рассматривать теоремы об одинаковом распределении таких статистик.

Соответствующие теоремы и вытекающие из них статистические критерии будут разобраны в другой работе.

§ 3.

При заданных формах $L_1(x)$ и $L_2(x)$ (1,1) совокупность законов $F(x)$, для которых $L_1(x) \cong L_2(x)$ образует, очевидно, ассоциативную систему с одним действием, если за это действие взята операция композиции законов, отвечающая сложению независимых случайных величин. Далее, если $L_1(x) \cong L_2(x)$ для наблюдений x_i с законом распределения $F(x)$, то одинаковая распределенность наших форм сохранится и при замене x_i на $(-x_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и по-предыдущему — и для наблюдений $x_i - x_i'$, где x_i и x_i' — независимые и одинаково распределенные величины. Величины $x_i - x_i'$ обладают симметрическим законом $\Phi(x) = F(x) * (1 - F(-x))$ ($*$ знак композиции).

В дальнейшем мы будем изучать симметрические законы распределения наблюдений, для которых $L_1(x) \cong L_2(x)$. Для таких законов имеем

$$a_ix_i \cong -a_ix_i.$$

Ввиду этого можно считать, не нарушая общности, что все коэффициенты a_i и b_i неотрицательны.

Рассмотрим х. ф. наблюдений x_i

$$f(u) = E(e^{iux_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, d\Phi(x).$$

Эта функция реальна, четна, непрерывна на всей оси, и $f(0) = 1$.

Мы сделаем теперь важное предположение

$$\sup(a_1, a_2, \ldots, a_r) \neq \sup(b_1, b_2, \ldots, b_r), \tag{3,1}$$

отказ от которого будем оговаривать особо.

Из условия $L_1(x) \simeq L_2(x)$ находим, что

$$f(a_1u)\,f(a_2u)\ldots f(a_2u) = f(b_1u)\ldots f(b_2u). \tag{3,2}$$

Будем считать, не нарушая общности, что $a_1 = \sup(a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_r)$. Тогда в силу условия (3,1) имеем

$$b_i < a_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3,3}$$

Вводя новую переменную a_1u, которую можно снова обозначить буквой u, получим из (3,2)

$$f(u)\,f(a_1u)\ldots f(a_ru) = f(b_1u)\ldots f(b_ru), \tag{3,4}$$

где

$$a_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r);\; b_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3,5}$$

§ 4.

Лемма 1. Функция $f(u) \neq 0$ на всей реальной оси.

Доказательство. Пусть в (3,4) имеем $a_1, a_2, \ldots, a_k = 1$; $a_{n+1}, \ldots, a_r < 1$) (k может совпадать с 1). Тогда получим

$$(f(u))^k f(a_{n+1}u)\ldots f(a_ru) = f(b_1u)\ldots f(b_ru). \tag{4,1}$$

Пусть $\mathfrak{A}$ множество точек, для которых $f(u) = 0$. Мы должны доказать, что $\mathfrak{A}$ — пустое множество.

Пусть это не так. В силу непрерывности $f(u)$ $\mathfrak{A}$ — замкнутое множество. Так как $f(0) = 1$, некоторая окрестность нуля не входит в $\mathfrak{A}$. Существует ближайшая справа к 0 точка $\mathfrak{A}$; пусть это будет u_0; $f(u_0) = 0$, $u_0 > 0$. Ввиду условия, наложенного на $a_1, \ldots, a_2, b_1, \ldots, b_2$, имеем $f(a_iu) \neq 0$; $f(b_ju) \neq 0$; $i = k+1, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, r$. Ввиду этого из (4,1) получим при всяком достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$(f(u_0-\varepsilon))^k = \frac{f(b_1(u_0-\varepsilon))\ldots f(b_r(u_0-\varepsilon))}{f(a_{k+1}(u_0-\varepsilon))\ldots f(a_r(u_0-\varepsilon)}.$$

При $\varepsilon \to 0$ левая часть $\to 0$, а правая часть — к $\dfrac{f(b_1u_0)\ldots f(b_ru_0)}{f(a_{k+1}u_0)\ldots f(a_ru_0)} \neq 0$. Это противоречие и доказывает лемму.

Теперь в равенстве (3,4) можно производить сокращения, если некоторые из чисел a_i совпадают с некоторыми из чисел b_j. Допустим, что такое сокращение произведено, и мы получим

$$f(u)\,f(a_1u)\ldots f(a_ru) = f(b_1u)\ldots f(b_qu), \tag{4,2}$$

где уже далее сокращать нельзя.

При этом может оказаться, что получится равенство

$$(f(u))^k = 1.$$

Легко видеть в силу непрерывности $f(u)$ и равенства $f(0) = 1$, что $f(u) \equiv 1$ и отвечающий ей закон $\Phi(x) = \varepsilon(x)$ несобственный. Такой случай будем считать тривиальным и отбрасывать. После этого можно считать, что числа a_i и b_j, входящие в (4,2), удовлетворяют неравенствам

$$0 < a_i \leqslant 1;\; 0 < b_j < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r,\; j = 1, 2, \ldots, q) \tag{4,3}$$

§ 5.

Ввиду доказанного выше $f(u)$ положительна на всей оси и непрерывна. Она четна, так что достаточно изучать ее при $u > 0$.

Положим теперь $\alpha_i = \ln a_i$; $\beta_i = \ln b_i$; $u = e^t$; тогда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_i \leqslant 0$, $\beta_j < 0$; t меняется от $-\infty$ до ∞.

Введем новую функцию $\varphi(t) = \ln f(u) = \ln f(e^t)$; мы замечаем, что $\varphi(t)$ непрерывна на всей оси t и что

$$\varphi(t) \leqslant 0. \tag{5,1}$$

Уравнение (4,2) перепишем так:

$$\varphi(t)+\varphi(t+\alpha_2) + \ldots + \varphi(t+\alpha_r) = \varphi(t+\beta_1) + \ldots + \varphi(t+\beta_q). \tag{5,2}$$

Здесь все α_i отличны от всех β_j.

Мы должны рассматривать непрерывные решения уравнения (5,2). Уравнения вида (5,2) являются частным случаем линейных дифференциальных уравнений со сдвинутым аргументом, изученных А. Д. Мышкисом [3].

Аналитические решения таких и значительно более общих уравнений, трактуемых как линейные дифференциальные уравнения бесконечно высокого порядка, изучались А. О. Гельфондом [4], давшим ряд важных приложений их в теории функций комплексного переменного. В частности, уравнения типа (5,2) (снабженные постоянными коэффициентами A_k, A_j при $\varphi(t+\alpha_k)$ и $\varphi(t+\beta_j)$), как оказалось, играют важную роль в теории целых функций [5].

Решения уравнений типа (5,2) естественно называть обобщенно-периодическими функциями, так как они охватывают обычные периодические функции, задаваемые уравнением

$$\varphi(t) = \varphi(t+\beta).$$

Заметим здесь же, что эти решения, вообще говоря, не являются почти периодическими функциями и не охватывают всех непрерывных почти периодических функций.

Из всех непрерывных решений уравнения (5,2) мы должны выделить те, которые могут быть логарифмами реальных х. ф. случайных величин. Ввиду того, что $f(0) = 1$, имеем, помимо (5,1),

$$\varphi(t) \to 0 \text{ при } t \to -\infty. \tag{5,3}$$

Если условие (3,1) не выполнено, то (5,2) можно гарантировать при $t \leqslant t_0$.

§ 6.

Мы будем решать уравнение (5,2) с помощью трансформации Лапласа, для чего понадобятся некоторые априорные оценки решений.

Лемма II. Имеют место оценки:

$$|\varphi(t)| < C_1 e^{C_2 t} \text{ при } t > 0, \tag{6,1}$$

$$|\varphi(t)| < C_1 \text{ при } t \leqslant 0. \tag{6,2}$$

(В дальнейшем $C_1, C_2, \ldots; K_1, K_2, \ldots$, положительные константы).

Доказательство. Ввиду свойств чисел α_i и β_j уравнение (5,2) можно переписать так:

$m\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \varphi(t - B_j)$, где m — число совпадающих $\alpha_i = 0$, $\varepsilon_j = \pm 1$; $B = |\alpha_j|$ или $|\beta_j|$; $k \leqslant r + q$.

Отсюда

$$|\varphi(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{k} |\varphi(t - B_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{k} M(t - B_n),$$

где через $M(t)$ обозначена функция $M(t) = \sup_{v \leqslant t} |\varphi(v)|$.

Ввиду монотонности $M(t)$ получаем

$$M(t) \leqslant \sum_{n=1}^{k} M(t - B_n)$$

и, далее, $M(t) \leqslant kM(t - B_1)$, где через B_1 обозначено минимальное из чисел B_i.

Так как $\varphi(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, то $M(t) \leqslant C_3$ при $t \leqslant B_1$. Пусть $t = qB_1$, где $q \geqslant 1$ целое число. Тогда согласно нашему неравенству для $M(t)$ получим $M(qB_1) \leqslant C_3 k^q = C_3 k^{\frac{t}{B_1}}$. Если $\frac{t}{B_1}$ не целое, то

$$t \leqslant \left(\left[\frac{t}{B_1} \right] + 1 \right) B_1$$

и ввиду монотонности $M(t)$ получим

$$M(t) \leqslant M\left[\left(\left[\frac{t}{B_1} \right] + 1 \right) B_1 \right] = C_3 k^{\left(\left[\frac{t}{B_1} \right] + 1 \right) B_1} < C_4 e^{C_5 t},$$

что и доказывает (6,1); (6,2) — тривиальное следствие (5,3).

§ 7.

Уравнение (5,2) допускает много непрерывных частных решений. В частности, если λ — корень целой функции

$$\sigma(z) = e^{\alpha_1 z} + e^{\alpha_2 z} + \cdots + e^{\alpha_r z} - e^{\beta_1 z} - \cdots - \delta^{\beta_q z} \tag{7,1}$$

и если λ имеет кратность $\nu \geqslant 1$, то (5,2) имеет частное решение вида $e^{\lambda t} \cdot P_\lambda(t) + e^{\overline{\lambda} t} \cdot \overline{P_\lambda(t)}$, где $P_\lambda(t)$ любой полином степени $\nu - 1$.

Общее непрерывное решение (5,2) можно получить с помощью трансформации Лапласа, при учете леммы II.

При этом достаточно выполнение уравнения (5,2) на полупрямой $t \geqslant t_0$ или $t \leqslant t_0$ для получения представления $\varphi(t)$ через названные выше частные решения на соответствующей полупрямой.

Рассмотрим полупрямую $t \geqslant t_0$ и положим $\varphi(t + t_0) = \varphi_1(t)$, так что $\varphi_1(t)$ будет удовлетворять на полупрямой $t > 0$ уравнению

$$\varphi_1(t - t_0) + \varphi_1(t + \alpha_2 - t_0) + \cdots + \varphi_1(t + \alpha_r - t_0) =$$
$$= \varphi_1(t + \beta_1 - t_0) + \cdots + \varphi_1(t + \beta_q - t_0). \tag{7,2}$$

Будем считать $t_0 \geqslant 0$, так как для нашей задачи нам понадобятся лишь полупрямые $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и $t \leqslant t_0 \leqslant 0$. Лемма II дает возможность применить к $\varphi_1(t)$ одностороннюю трансформацию Лапласа.

Полагая $z = x + iy$ найдем из (6,1), что при $x \geqslant x_0$, интеграл

$$\chi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi_1(t)\, dt$$

сходится и является функцией регулярной в $x > x_0$. Далее, при всяком фиксированном α имеем

$$\int_0^\infty e^{-zt} \varphi_1(t+\alpha)\, dt = e^{z\alpha} \cdot \chi(z) - e^{z\alpha} \int_0^\alpha e^{-zt} \cdot \varphi_1(t)\, dt.$$

Таким образом, полагая, как ранее,

$$\sigma(z) = e^{\alpha_1 z} + \cdots + e^{\alpha_r z} - e^{\beta_1 z} - \cdots - e^{\beta_q z} \qquad (\alpha_1 = 0) \tag{7,2}$$

и обозначая $\alpha_n' = \alpha_n - t_0$; $\beta_n' = \beta_n - t_0$, найдем

$$e^{-t_0 z} \sigma(z) \chi(z) - \sum_{k=1}^{r} e^{\alpha_k' z} \cdot \int_0^{\alpha_k'} e^{-zt} \varphi_1(t)\, dt + \sum_{k=1}^{q} e^{\beta_k' z} \cdot \int_0^{\beta_k'} e^{-zt} \varphi_1(t)\, dt = 0.$$

Далее, имеем

$$e^{\alpha_k' z} \int_0^{\alpha_k'} e^{-zt} \varphi_1(t)\, dt = e^{\alpha_k z} \int_{t_0}^{\alpha_k} e^{-zu} \varphi(u)\, du = E(z, \alpha_k).$$

Полагая

$$E(z) = \sum_{k=1}^{r} E(z, \alpha_k) - \sum_{k=1}^{q} E(z, \beta_k),$$

найдем

$$\chi(z) = \frac{E(z)\, e^{t_0 z}}{\sigma(z)}. \tag{7,3}$$

§ 8.

Для дальнейшего применяем теорему Г. Детша [6]: если односторонняя трансформация Лапласа непрерывной функции $\varphi_1(t)$ сходится при $x = Rz > x_0$, то

$$\int_0^t \varphi_1(\tau)\, d\tau = \mathrm{V.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tz} \cdot \frac{\chi(z)}{z}\, dz, \tag{8,1}$$

где V. p. (valeur principale) $= \lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{x-iy}^{x+iy}$.

При всяком реальном $\varLambda$, функция $e^{-\varLambda t}\cdot\varphi_1(t)$ будет иметь трансформацию Лапласа $X(z+\varLambda)$, сходящуюся в некоторой полуплоскости, ввиду чего (8,1) даст

$$\int\limits_0^t \varphi_1(\tau)e^{-\varLambda\tau}\,d\tau = \text{V. p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tz}\cdot\frac{\chi(z+\varLambda)}{z}\cdot dz. \tag{8,2}$$

Таким образом, находим при $t>0$, $\varLambda\geqslant 0$

$$\int\limits_0^t \varphi_1(\tau)e^{-\varLambda\tau}\,d\tau = \text{V. p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tz+t_0(z+\varLambda)}\frac{E(z+\varLambda)}{z\sigma(z+\varLambda)}\,dz =$$

$$= \text{V. p.}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{(t+t_0)z-\varLambda t}\frac{E(z)}{(z-\varLambda)\sigma(z)}\,dz \tag{8,3}$$

при $x>x_0>\varLambda$.

Лемма III. Все нули $\sigma(z)$ расположены в некоторой полосе $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. Кратность каждого нуля не превосходит k_0, и количество нулей в каждом круге радиуса 1 не превосходит k_1.

Доказательство. Имеем

$$\sigma(z) = 1+e^{\alpha_2 z}+\cdots+e^{\alpha_r z}-e^{\beta_1 z}-\cdots-e^{\beta_q z}, \tag{8,4}$$

и первое утверждение следует из вида этой функции. Второе утверждение следует из того, что $\sigma(z)$ удовлетворяет на всей плоскости линейному однородному дифференциальному уравнению порядка $r+q$ с постоянными коэффициентами. Если бы для некоторого z и $k_0=r+q+1$ имели бы $\sigma(z_0)=\sigma'(z_0)=\ldots=\sigma^{(r+q)}(z_0)=0$, то отсюда следовало бы $\sigma(z)\equiv 0$ на всей плоскости.

Третье утверждение следует из известной теоремы Иенсена [7], примененной к кругам с центрами x_2+1+iy и радиусами $2(x_2-x_1+1)$.

§ 9.

Лемма IV. Если точка z_0 удалена от всех нулей $\sigma(z)$ более чем на $\varepsilon_0>0$, т. е. $|z-\varrho_k|>\varepsilon_0$ (ϱ_k нули $\sigma(z)$), то

$$|\sigma(z_0)|>C_0(\varepsilon_0). \tag{9,1}$$

Доказательство. Из выражения для $\sigma(z)$ будем иметь $|\sigma(z)|>C_0$ при $x\geqslant x_3$ и при $x\leqslant -x_3$ для подходящего x_3.

Пусть в полосе $|x|\leqslant x_3$ имеется точка z_0, удаленная от всех нулей $\sigma(z)$ больше, чем на ε_0. Опишем вокруг точки круг $|z-z_0|<x_4$, где x_4 выбрано под условием: $x_4\geqslant 4x_3$, и все точки окружности круга удалены от всех нулей $\sigma(z)$ более чем на ε_0.

Последнее условие всегда выполнимо при достаточно малом ε_0 в силу леммы III.

Рассматриваем далее функцию

$$\sigma_1(z)=\frac{\sigma(z)}{(z-\varkappa_1)\ldots(z-\varkappa_m)}.$$

Она регулярна в нашем круге, и на его окружности

$$|\sigma_1(z)| < \frac{C_6}{\varepsilon_0^m}. \tag{9,2}$$

По принципу модуля то же свойство будет выполняться во всем круге.

Полагая $L(z) = \ln \sigma_1(z)$ видим, что $L(z)$ регулярна в нашем круге и что

$$R\,L(z) = \ln|\sigma_1(z)| < C_7 + m \ln \frac{1}{\varepsilon_0} < C_8(\varepsilon_0)$$

(m ограничено по лемме III).
Отсюда заключаем по теореме Каратеодори — Ландау [7], что в круге $|z - z_0| \leqslant \frac{x_4}{2}$; имеем

$$|L(z) - L(z_0)| \leqslant 4C_8(\varepsilon_0).$$

Но круг $|z - z_0| \leqslant \frac{x_4}{2}$ содержит точки полосы $x \geqslant x_3$, и для таких точек z нашего круга $|L(z)| < C_9$.
Отсюда получим $|L(z_0)| < C_9(\varepsilon_0)$. Ввиду условия для точки z_0 имеем:

$$\ln \sigma(z_0) = L(z_0) + \ln(z_0 - \varkappa_1)\ldots(z_0 - \varkappa_m)$$
$$|\ln(z_0 - \varkappa_1)\ldots(z_0 - \varkappa_m)| < C_{10}(\varepsilon_0),$$

откуда $|\ln \sigma(z_0)| < C_{11}(\varepsilon_0)$; $|\sigma(z_0)| > C_0(\varepsilon_0)$, что и требовалось вывести.

§ 10.

Лемма V. При $x < -x_5$ (постоянное число) имеем

$$\left|\frac{E(z)}{\sigma(z)}\right| < C_{12} \cdot e^{t_0|x|}. \tag{10,1}$$

Доказательство. Если

$$A_0 = \sup(|\alpha_2|, \quad |\alpha_3|, \ldots, |\alpha_r|, \quad |\beta_1|, \ldots, |\beta_s|),$$

где α_i, β_i — числа из (8,2), то при $x < -x_s$

$$|\sigma(z)| > C_{13}\, e^{A_0 x}. \tag{10,3}$$

Далее, имеем

$$E(z, \alpha) = e^{\alpha z} \int_{t_0}^{\alpha} e^{-zu} \varphi(u)\, du.$$

При $x = Rz \leqslant 0$ получим:

$$|E(z, \alpha)| \leqslant C_{13}\, e^{\alpha|x|} e^{t_0|x|},$$
$$E(z) \leqslant C_{14}\, e^{A_0|x| + t_0|x|}, \tag{10,4}$$

(10,3) и (10,4) вместе дают (10,1).

В дальнейшем будем обозначать буквой B ограниченное по модулю количество, не всегда одно и то же. Тогда (10,1) напишем

$$\left|\frac{E(z)}{\sigma(z)}\right| = Be^{t_0|x|}. \tag{10,5}$$

§ 11.

Соответственно лемме III обозначим

$$x_1 = \inf R\varrho,\ x_2 = \sup R\varrho. \tag{11,1}$$

Между каждыми двумя прямыми $y = n$ и $y = n + 1$ проведем вертикальные прямые $y = y_n$, удаленные от всех нулей $\sigma(z)$ более чем на $\varepsilon_0 > 0$. Тогда согласно (8,3)

$$\int_0^t \varphi_1(\tau) e^{-\Lambda\tau} d\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x_3 - iy_n}^{x_3 + iy_n} e^{(t+t_0)z - \Lambda t} \cdot \frac{E(z)\,dz}{(z-\Lambda)\sigma(z)}, \tag{11,2}$$

где $x_3 > x_0$. Рассмотрим $\int\limits_{x_3 - iy_n}^{x_3 + iy_n}$. Дополняя его горизонтальными контурами $z = x \pm iy_n$, $x \leqslant x_3$, $n \geqslant 1$, найдем, что на этих контурах согласно лемме IV

$$|\sigma(z)| > C_0(\varepsilon_0), \quad \left|\frac{E(z)}{\sigma(z)}\right| = Be^{t_0|x|},$$

$$\left|\int_{x_3+iy_n}^{-\infty+iy_n} e^{(t+t_0)z - \Lambda t} \frac{E(z)}{(z-\Lambda)\sigma(z)} dx\right| = \frac{B}{n} \int_{-\infty}^{x_3} \exp\left(t_0|x| + (t+t_0)x - \Lambda t\right) dx =$$

$$= \frac{B}{nt} \exp\left(t(x_3 - \Lambda) + 2t_0|x|\right). \tag{11,3}$$

Будем считать, что Λ не есть нуль $\sigma(z)$, и $\Lambda > x_3$. Пусть $S_n(t)$ есть сумма вычетов подинтегральной функции между двумя парами прямых: $y = y_n$, $y = y_{n+1}$; $y = y_{-n-1}$, $y = y_{-n}$; $S_0(t)$ — сумма вычетов между $y = y_1$ и $y = y_{-1}$. Тогда получим, полагая $x_3 = x_2 + \varepsilon$,

$$\varphi_2(t, \Lambda) = \int_0^t \varphi_1(\tau) e^{-\Lambda\tau} d\tau = \sum_{m=0}^{n} S_m(t) e^{-\Lambda t} + R_n(t) \tag{11,4}$$

$$|R_n(t)| = \frac{B(\varepsilon)}{nt} \exp\left(t(x_2 + \varepsilon - \Lambda) + 2t_0|x_2 + \varepsilon|\right), \tag{11,5}$$

где $S_n(t)$ — реальная функция t, которая состоит из членов вида

$$e^{t(\sigma_j + i\tau_j)} \cdot P_j(t) + e^{t(\sigma_j - i\tau_j)} \cdot \overline{P_j(t)}, \tag{11,6}$$

где $P_j(t)$ — полином степени не выше k_0; $\sigma_j + i\tau_j$ пробегает нули $\sigma(z)$ в верхней полуплоскости.

§ 12.

Обозначим через L_n прямоугольный контур между прямыми $y = y_n$, $y = y_{n+1}$, $x = x_1 - \varepsilon$, $x = x_2 + \varepsilon$, L_0 — контур между $y = y_1$, $y = y_{-1}$; $x = x_1 - \varepsilon$, $x = x_2 + \varepsilon$ и через L_{-n} ($n \leqslant 1$) — зеркальные изображения контуров L_n в реальной оси. Тогда, если $\Lambda > x_2 + \varepsilon$

$$S_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} e^{(t+t_0)z} \frac{E(z)}{(z-\Lambda)\sigma(z)} dz.$$

В результате получается при

$$t>0 \quad \text{и} \quad \varphi_3(t, \varLambda) = \int_t^{\infty} \varphi_1(\tau) e^{-\varLambda\tau} d\tau$$

$$\varphi_3(t, \varLambda) = -e^{-\varLambda t} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} e^{(t+t_0)z} \frac{E(z)}{(z-\varLambda)\sigma(z)} dz - R_n(t) \tag{12,1}$$

$$|R_n(t)| = \frac{B(\varepsilon)}{nt} e^{-\varLambda t} \exp(t(x_2+\varepsilon) + 2t_0(x_2+\varepsilon)). \tag{12,2}$$

§ 13.

Нам нужно получить аналогичную формулу для случая, когда $\varphi(t)$, заданная на всей оси, удовлетворяет при $t \leqslant t_0 \leqslant 0$ уравнению (5,2).

Проводя рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, имеем:

при $t<0$ и $\varphi_1(t)=\varphi(t+t_0)$, $\varLambda<x_1-\varepsilon$

$$\varphi_3(t, \varLambda) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_1(\tau) e^{-\varLambda\tau} d\tau =$$

$$= e^{-\varLambda t} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} e^{(t+t_0)z} \frac{E(z)\,dz}{(z-\varLambda)\sigma(z)} + R_n(t) \tag{13,1}$$

$$|R_n(t)| = \frac{B(\varepsilon)}{n(t)} e^{-\varLambda t} \cdot \exp(t(x_1-\varepsilon) + 2|t_0||x_1-\varepsilon|). \tag{13,2}$$

В случае, когда $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (5,2) на всей оси, получаем формулу ($t_0=0$, $\varLambda=0$)

$$\int_t^{\infty} \varphi(\tau) d\tau = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} e^{tz} \frac{E(z)\,dz}{z\sigma(z)},$$

верную при $t>0$ и $t<0$. Остаточные члены после суммирования от $-n$ до n будут выражаться формулой (12,2) при $t>0$ и (13,2) при $t<0$.

Все вычеты подинтегральной функции надо вычислять в точках $z=\varLambda$ и $z=\varrho$, где ϱ пробегает нули $\sigma(z)$. Последние вычеты дают выражение вида (11,6). При этом для некоторых $\varrho=\sigma_j+i\tau_j$ может случиться так, что $P_j(t)\equiv 0$. В связи с этим, такие нули $\sigma(z)$, для которых вычеты не исчезают, будем называть активными нулями $\sigma(z)$.

Вернемся снова к абсциссам x_1 и x_2, ограничивающим полосу, где лежат нули $\sigma(z)$ (эту полосу будем называть критической).

Отбирая среди нулей критической полосы активные нули, образуем критическую полосу активных нулей $[\sigma_1, \sigma_2]$; здесь $x_1 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant x_2$; σ_1 и σ_2 соответствующие точные нижняя и верхняя грань активных нулей.

Очевидно, в формулах (12,1)—(13,2) можно заменить x_1 и x_2 на σ_1 и σ_2.

Теперь мы должны использовать тот факт, что $\varphi(t) \leqslant 0$ на всей оси. Мы докажем лемму.

Лемма VI. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (5,2) на всей оси, то абсциссы σ_1 и σ_2 являются активными нулями $\sigma(z)$. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет (5,2) на правой полупрямой $t \geqslant t_0$, то σ_2 является активным нулем $\sigma(z)$, а если $\varphi(t)$ удовлетворяет (5,2) на левой полупрямой, то σ_1 является активным нулем $\sigma(z)$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, связанный с правой полупрямой $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. В этом случае имеем соотношение (12,1) и (12,2). Докажем, что σ_2 активный нуль $\sigma(z)$. Пусть это не так. Тогда существуют два комплексных нуля $\mu + i\tau$ и $\mu - i\tau$ такие, что при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ в полуплоскости $x > \mu + \varepsilon_1$ нет реальных активных нулей $\sigma(z)$. Проведем через эти два нуля окружность с центром σ на реальной оси, и будем вариировать ее радиус. При достаточно большом радиусе внутри этой окружности и на ней не будет реальных нулей, а центр ее будет правее σ_2. Среди всех комплексных нулей $\sigma(z)$ внутри этой окружности и на ней отметим ближайшие к центру окружности σ и среди них — пару сопряженных нулей с минимальными по модулю ординатами. Проведем через эти нули окружность с центром σ. Внутри нее не будет нулей $\sigma(z)$. Если их не будет и на окружности, будем считать процесс законченным. Если они там присутствуют, то дадим радиусу окружности, проходящей через наши два нуля малую вариацию, при которой на окружности и внутри нее уже не окажется иных нулей.

Так мы получим окружность с центром $\Lambda > \sigma_2$. При этом будет существовать два, и только два, активных нуля $\varrho_0 = \mu_0 + i\tau_0$ и $\overline{\varrho_0} = \mu_0 - i\tau$, ближайших к Λ.

Теперь обратимся к (12,1). Правые стенки контуров проведем при абсциссе $\dfrac{\sigma_2 + \Lambda}{2}$. При $n \to \infty$ ряд (12,1) будет сходится равномерно в каждом фиксированном сегменте полупрямой $t > 0$.

§ 14.

Разобьем активные нули $\sigma(z)$ на три класса: $\mathfrak{A}_0$ — нули ϱ_0 и $\overline{\varrho}_0$, ближайшие к Λ, с расстоянием от Λ $d_0 = |\varrho_0 - \Lambda| = |\overline{\varrho_0} - \Lambda|$; $\mathfrak{A}_0$ — нули, лежащие внутри таких контуров L_n, все точки которых находятся на расстоянии от Λ, превышающем $2(d_0 + 1)$; $\mathfrak{A}_1$ — остальные нули. Их будет конечное число, и все они будут лежать в фиксированном круге с центром Λ и на расстоянии от Λ, превышающем d_0.

Обозначим теперь

$$g(t) = \int_t^\infty \varphi_1(\tau) e^{-\Lambda\tau} d\tau;$$

(12,1) и (12,2) перепишем

$$g(t) = -\sum_{(n)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_n} e^{t(z-\Lambda)} \frac{e^{t_0 z} E(z)}{(z-\Lambda)\sigma(z)} dz. \qquad (14,1)$$

Правые стенки контуров L_n имеют абсциссу $\frac{\sigma_2+\varDelta}{2}$, и ввиду сказанного выше о сходимости ряда и того, что $\frac{\sigma_2+\varDelta}{2}-\varDelta=\frac{\sigma_2-\varDelta}{2}<0$, можно почленно проинтегрировать ряд от $t>0$ до ∞. Получим

$$\int\limits_t^\infty g(t)\,dt=\sum_{(n)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_n} e^{t(z-\varDelta)}\frac{e^{t_0 z}\cdot E(z)}{(z-\varDelta)^2\sigma(z)}.$$

Новый ряд будет уже абсолютно сходящимся. Эту операцию можно повторить. Введем оператор

$$L_r(g)=\underbrace{\int\limits_t^\infty dt\ldots\int\limits_t^\infty}_{r\text{ раз}} g(t)\,dt. \tag{14,2}$$

Получим

$$L_r(g)=\sum_{(n)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_n}\frac{e^{t(z-\varDelta)}\cdot e^{t_0 z}\cdot E(z)}{(z-\varDelta)^{r+1}\sigma(z)}\,dz. \tag{14,3}$$

При $r\geqslant 2$ ряд будет абсолютно и равномерно сходиться при $t>0$.

§ 15.

Рассмотрим нули множества $\mathfrak{A}_2$. Соответствующие им члены ряда (14,3) будут иметь по абсолютной величине оценку

$$Be^{+\frac{\sigma_2-\varDelta}{2}}\cdot M_n\cdot\frac{1}{\varDelta_n^r}, \tag{15,1}$$

где $M_n=\sup\left|\frac{E(z)}{\sigma(z)}\right|$ и $\varDelta_n=\inf|z-\varDelta|$ на контуре L_n.

По построению контуров L_n имеем $M_n<C_{14}$; далее, ввиду того, что рассматриваются нули из $\mathfrak{A}_2$, имеем

$$\varDelta_n>2(d_0+1)\qquad(n\leqslant C_{15})$$

$$\varDelta_n>\frac{n}{2}\qquad(n>C_{15}).$$

Ввиду этого контуры, соответствующие нулям из $\mathfrak{A}_2$, дадут в (14,3) сумму с оценкой

$$B\cdot\frac{\exp\left(t\frac{\sigma_2-\varDelta}{2}\right)}{(2(d_0+1))^{r+1}}. \tag{15,2}$$

Теперь перейдем к изучению части суммы (14,3), создаваемой нулями $\in\mathfrak{A}_1$. Их будет фиксированное число, и мы можем перенумеровать их (без учета кратности): $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{k_2}$. Каждое ϱ_j $(j\leqslant k_2)$ обведем окружностью C_{ϱ_j} радиуса, столь малого, что она будет заключать лишь один нуль и расстояние всех точек C_{ϱ_j} от точки $z=\varDelta$ будет

$> d_0 + \frac{\eta}{2}$, где $\eta = \inf\{(\varrho_j - \Lambda| - |\varrho_0 - \Lambda|\}$. Мы получим $\inf|\sigma(z)| = \varepsilon_\eta > 0$ по лемме III. Полагая

$$D_{\varrho_j}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{\varrho_j}} \frac{e^{t(z-\Lambda)} \cdot e^{t_0 z}}{(z-\Lambda)^{r+1}} \frac{E(z)}{\sigma(z)} dz,$$

получим

$$|D_{\varrho_j}(t)| = B_\eta \frac{e^{t\frac{\sigma_2-\Lambda}{2}}}{\left(d_0 + \frac{\eta}{2}\right)^{r+1}}, \tag{15,3}$$

где B_η число, ограниченное при η фиксированном. Ввиду этого оценка членов, вносимых в сумму (14,3) нулями из $\mathfrak{A}_1$, будет

$$B \cdot \frac{e^{t\frac{\sigma_2-\Lambda}{2}}}{\left(d_0 + \frac{\eta}{2}\right)^{r+1}}. \tag{15,4}$$

§ 16.

Остается изучить приложение оператора L_r к вычетам в полюсах ϱ_0 и $\overline{\varrho_0}$ функции $-\frac{e^{t_0 z}}{z-\Lambda} \frac{E(z)}{\sigma(z)}$

$$e^{t(\varrho_0-\Lambda)} \cdot P_0(t) + e^{t(\overline{\varrho}_0-\Lambda)}\, \overline{P_0(t)} \tag{16,1}$$

$$P_0(t) = a_0 t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + \cdots + a_\nu;\ a_0 \neq 0, \quad \nu \geqslant 0.$$

Положим $\varrho_0 - \Lambda = d_0 e^{i\alpha} = \Delta$. Имеем

$$L_r(e^{\Delta \cdot t} \cdot P_0(t)) = \int\limits_t^\infty dt \ldots \int\limits_t^\infty e^{\Delta \cdot t} P_0(t)\, dt.$$

По построению Λ, $R\Delta < 0$. Поэтому

$$L_r(e^{\Delta t}) = (-1)^r \frac{e^{\Delta \cdot t}}{\Delta^r}. \tag{16,2}$$

Далее, для $n > 0$ целого находим

$$L_r(e^{\Delta \cdot t} t^n) = (-1)^r \frac{e^{\Delta \cdot t}}{\Delta} \left(\frac{t^n}{\Delta^r} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m (-1)^m \times \right.$$

$$\left. \times\, r(r+1) \ldots (r+m-1) \frac{t^{n-m}}{\Delta^{r+m}} \right). \tag{16,3}$$

Положим сперва, что $\nu = 0$ (так будет, если ϱ_0 и $\overline{\varrho_0}$ — простые нули $\sigma(z)$, но, разумеется, не только в этом случае).

В указанном случае приложение оператора L_r к (16,1) даст

$$2R\left(a_0 \frac{\exp(\Delta\cdot t - ir(\alpha+\pi))}{d_0^{r+1}}\right) =$$

$$= 2R\left(|\alpha_0| \frac{\exp\left[(d_0\cos\alpha + id_0\sin\alpha)t - ir(\alpha+\pi)\right]}{d_0^{r+1}}\right). \tag{16,4}$$

При данных r и t оценки (15,2) и (15,4) дадут в сумме величину, не превосходящую

$$C_{15}\frac{e^{t\frac{\sigma_2-\Delta}{2}}}{\left(d_0+\frac{\eta}{2}\right)^{r+1}}. \tag{16,5}$$

Заметим, что $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ в (16,4) по построению. Выберем теперь r столь большим, чтобы было

$$2\,|a_0|\,\frac{1}{d_0^r}\exp\left(d_0\cos\alpha\cdot\frac{4\pi}{d_0\sin\alpha}\right) > 2C_{15}\frac{\exp\left(\frac{2\pi}{d_0\sin\alpha}\cdot\frac{\sigma_2-\Delta}{2}\right)}{\left(d_0+\frac{\eta}{2}\right)^{r+1}}. \tag{16,6}$$

Зафиксируем это r. После этого выберем $t = t_1$ в сегменте $\left[\frac{2\pi}{d_0\sin\alpha}, \frac{4\pi}{d_0\sin\alpha}\right]$ так, что

$$\exp\left[(d_0\cos\alpha + id_0\sin\alpha)t - i(\alpha+\pi)r\right] = \exp(d_0\cos\alpha\cdot t).$$

Тогда (16,6) наверное будут выполнены и получим

$$L_r(g(t)) > |a_0|\,\frac{1}{d^{r+1}}\exp\left(d_0\cos\alpha\cdot\frac{4\pi}{d_0\sin\alpha}\right) > 0 \tag{16,7}$$

при $t = t_1$. Но мы имели $\varphi_1(\tau) \leqslant 0$ при $t > 0$. Отсюда $g(t) \leqslant 0$ и $L_r(g) \leqslant 0$ при всех t. Получившееся противоречие доказывает, что σ_2 — активный нуль $\sigma(z)$.

Пусть теперь $\nu \neq 0$, так что $\nu \geqslant 1$. (16,3) дает тогда

$$L_r(e^{\Delta\cdot t}\cdot P_\nu(t)) = (-1)^\nu r(r+1)\ldots(r+\nu-1)\frac{e^{\Delta\cdot t}}{\Delta^{r+\nu}}\left(1 + B(\Delta)\frac{|t|^\nu}{r}\right)a_0(-1)^r,$$

где B — ограниченное число при фиксированном Δ, $t > \varepsilon_0 > 0$. Снова выбирая сперва подходящее, достаточно большое r, фиксируем его, и, выбирая подходящее t в сегменте $\left[\frac{2\pi}{d_0\sin\alpha}, \frac{4\pi}{d_0\sin\alpha}\right]$, получим, что при таком $t = t_1$, $L_r(g) > 0$. Снова получается противоречие, доказывающее, что σ_r — активный нуль $\sigma(z)$.

§ 17.

В случае, когда уравнение (5,2) удовлетворяется функцией $\varphi(t)$ на полупрямой $t \leqslant t_0 < 0$, то, действуя с соотношениями (13,1) и (13,2) так же, как мы действовали с (12,1) и (12,2), получим, что абсцисса σ_1 является активным нулем $\sigma(z)$ (для вывода удобно положить $t = -u$;

$u > 0$, $\varphi(-u) = f(u)$). Если $\varphi(t)$ удовлетворяет (5,2) на всей оси, то σ_1 и σ_2 — активные нули $\sigma(z)$, и лемма VI доказана полностью.

Пусть теперь имеет место (12,1) и пусть

$$\mathbf{res}_{\sigma_2}\left(e^{(t+t_0)z} \ldots \frac{E(z)}{\sigma(z)}\right) = e^{\sigma_2 \cdot t} \cdot P_2(t), \tag{17,1}$$

где $P(t) = a_0 t^\nu + a_1 t^{\nu-1} + \cdots + a_\nu$ — полином, зависящий, вообще говоря, от t_0.

Мы хотим доказать, что $a_0 < 0$, и высказать аналогичное утверждение относительно σ_1 при условии (13,1), т. е. сформулировать лемму:

§ 18.

Лемма VII. При тех же условиях, при которых доказано существование активных нулей σ_2 или σ_1, вычеты имеют вид

$$e^{t\sigma_j} \cdot P_j(t) \qquad (j = 1, 2),$$

где $P_2(t)$ — полином с отрицательным старшим коэффициентом, а $P_1(t)$ — полином степени $m \geqslant 0$, старший коэффициент которого имеет знак $(-1)^{m+1}$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай наличия (12,1) и существование активного нуля σ_2.

Выберем Δ в точности таким же, как при доказательстве леммы VI в § 13—16, и сохраним те же обозначения, ϱ_0 и $\bar{\varrho}_0$ будут ближайшими к числу Δ среди комплексных активных нулей $\sigma(z)$, но их расстояние $d_0 = |\varrho_0 - \Delta|$ будет больше расстояния $\delta_0 = \Delta - \sigma_2$:

$$d_0 > \delta_0. \tag{18,1}$$

Теперь обратимся к выражению

$$e^{\sigma_2 t} \cdot P_2(t). \text{ Пусть } P_2(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \cdots + A_m$$

и пусть $A_0 > 0$. Тогда при достаточно большом $t \geqslant t_1$ получим $P_2(t) > \frac{A_0}{2}$, так что

$$\int_t^\infty e^{-\Delta t} e^{\sigma} P_2(t)\,dt > \frac{A_0}{2}\int_t^\infty e^{\cdot} \qquad dt = \frac{A_0}{2\delta_0} e^{-\delta_0 \cdot t}.$$

Отсюда согласно § 16

$$L_r(g) > \frac{A_0}{2\delta_0}\,\frac{e^{-\delta_0 t}}{\delta_0^r} + B\,\frac{e^{\frac{\sigma_2 - \Lambda}{2} t}}{\left(d_0 + \frac{\eta}{2}\right)^{r+1}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\varrho_0}} \frac{e^{t(z-\Delta)} \cdot e^{t_0 z}}{(z-\Delta)^{r+1}\sigma(z)} E(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\bar{\varrho}_0}} \frac{e^{t(z-\Delta)} e^{t_0 z} E(z)}{(z-\Delta)^{r+1}\sigma(z)} \cdot dz, \tag{18,2}$$

где C_{ϱ_0} и $C_{\bar\varrho_0}$ малые кружки вокруг ϱ_0 и $\bar{\varrho}_0$. При достаточной малости этих кружков соответствующие интегралы получают оценку

$$B\frac{\varrho^{\frac{\sigma_2-\varDelta}{2}t}}{\left(\delta_0+\frac{\eta}{2}\right)^{r+1}}. \tag{18,3}$$

Выберем $t=t_1$, и, зафиксировав его, выберем r столь большим, что в формуле (18,2) $\frac{1}{2}\frac{A_0}{2\delta_0}\cdot\frac{e^{-\delta_0 t}}{\delta_0^2}$ — больше всех остальных членов (18,2). Тогда получим

$$L_r(g)>\frac{A_0}{4}e^{-\delta_0 t_1}\cdot\frac{1}{\delta_0^2}>0,$$

что невозможно. Этим доказана первая часть леммы VII.

Для доказательства второй части берем (13,1) в форме

$$g_1(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_1(t)e^{-\Delta\tau}d\tau=\sum_{m=-n}^{n}\oint\limits_{L_m}e^{(t+t_0)z-\varDelta\cdot\tau}\frac{E(z)\,dz}{(z-\varDelta)\,\sigma(z)}+R_n(t) \tag{18,4}$$

$$|R_n(t)|=\frac{B(\varepsilon)}{n(t)}e^{(\sigma_1-\varDelta-\varepsilon)\,t};\quad \varDelta<\sigma_1 \tag{18,5}$$

(здесь t_0 фиксировано). Формула годна при $t<0$. Введя оператор

$$L_r(g_1)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{t}dt\ldots\int\limits_{-\infty}^{t}}_{r\ \text{раз}}g_1(t)\,dt$$

и выбирая $\varDelta<\sigma_1$, достаточно близким к σ_1, докажем и вторую часть леммы.

§ 19.

Лемма VIII. Число

$$\sigma_1>0. \tag{19,1}$$

Доказательство. Мы используем тот факт, что $\varphi(t)\to 0$ при $t\to-\infty$. Пусть сперва $\sigma_1<0$. Фиксируем $\varDelta=1,1.\,\sigma_1,<0$. Обращаясь к (17,5) и (17,6), возьмем ε в (17,6) столь малым, что $\sigma_1-\varDelta-\varepsilon>0$. В (17,5) проведем левые стенки контуров L_m для $|m|\geqslant 1$ при абсциссе $\sigma_1-\varepsilon_1$, где ε_1 столь мало, что расстояние полученных стенок, а стало быть, и всех точек контуров L_n от числа $z=\varDelta$ будет $>\delta_0+\eta$, где $\delta_0=\sigma_1-\varDelta=\frac{|\varDelta|}{10}$ и $\eta>0$. При этом пусть $\delta_1-\varepsilon_1>\frac{\sigma_1+\varDelta}{2}$.

Далее, все нули ϱ_j внутри контура L_0, за исключением нуля σ_1, заключаем в кружки столь малые, что расстояние всех точек их окружностей от $z=\varDelta$ будет $>\delta_0+\eta$ и все они лежат в полуплоскости $x\leqslant\frac{\sigma_1+\varDelta}{2}$.

Теперь рассмотрим при $t<0$ оператор

$$L_r(g_1)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{t} dt \ldots \int\limits_{-\infty}^{t}}_{r \text{ раз}} dt.$$

Его применение к правой части (17,5) даст

$$L_r(g_1)=L_r\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\varDelta t} e^{\sigma_1 t} P_1(t)\,dt\right)+B\frac{e^{\frac{\sigma_1-\varDelta}{2}t}}{(\delta_0+\eta)^{r+1}}. \qquad (19,2)$$

Далее, согласно лемме VII, $P_1(t)=A_0 t^m+\ldots+A_m$, где $A_0(-1)^{m+1}>0$. Далее, при $t<-T_1<0$ $P_1(t)$ сохраняет свой знак, и $|P_1(t)|>\frac{|A_0|}{2}$. Ввиду этого при $t<-T_1$

$$\left|L_r\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\varDelta t} e^{\sigma_1 t} P_1(t)\,dt\right|=L_r\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\varDelta t} e^{\sigma_1 t}|P_1(t)|\,dt\right)>$$

$$>\frac{|A_0|}{2}L_r\left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\delta_0 t}\,dt\right)=\frac{|A_0|}{2}\,\frac{e^{\delta_0\cdot t}}{\delta_0^{r+1}}.$$

При $t=-T_1$, $r\geqslant r_0(T_1)$ получим

$$\frac{1}{2}\,\frac{|A_0|}{2}\,\frac{e^{\delta_0\cdot t}}{\delta_0^{r}}>B\frac{e^{\frac{\sigma_1-\varDelta}{2}t}}{(\delta_0+\eta)^{r+1}}. \qquad (19,3)$$

B из правой части (19,2) — ограниченное число; $|B|<C_{16}$. Ввиду этого получаем при $t=-T_1$, $r\geqslant r_0(T_1)$

$$|L_r(g_1)|>\frac{|A_0|}{4}\,\frac{e^{\delta_0 t}}{\delta_0^{r+1}}=\frac{|A_0|}{4}\,\frac{e^{\frac{|\varDelta|}{10}t}}{|\varDelta|^{r+1}}10^{r+1}. \qquad (19,5)$$

С другой стороны, мы имеем, в виду того, что $|\varphi_1(t)|\leqslant 1$ при $t\leqslant -T_1$,

$$|L_r(g_1)|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{t} dt\ldots\int\limits_{-\infty}^{t} dt\, e^{-\varDelta\tau}|\varphi_1(\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant L_r(e^{-\varDelta t})=\frac{e^{-\varDelta t}}{\varDelta^{r+1}}=\frac{e^{|\varDelta|t}}{\varDelta^{r+1}} \qquad |t=-T_1|. \qquad (19,6)$$

При достаточно большом r (19,5) будет больше (19,6), что приводит к противоречию.

Итак, $\sigma_1\geqslant 0$. Докажем, что случай $\sigma_1=0$ также приводит к противоречию.

По заданному ε_0 выберем $T_1>100$ такое, что $|\varphi_1(\tau)|\leqslant\varepsilon_0$ при $\tau\leqslant -T_1$. Выберем $\varDelta<0$; $|\varDelta|<0{,}001$ и зафиксируем.

Далее, приводим рассуждения, как и выше, считая, что $|P_1(t)|>\frac{|A_0}{2}$ при $t\leqslant -T_1$ и что $P_1(t)$ сохраняет знак на полупрямой $t\leqslant -T_1$. Полагая $\delta_0=\sigma_1-\varDelta=|\varDelta|$, получим, как в (19,5),

$$|L_r(g_1)|>\frac{|A_0|}{4}\,\frac{e^{\delta_0 t}}{\delta_0^{r+1}};\quad t=-T_1. \qquad (19,7)$$

С другой стороны, при $t = -T_1$.

$$|L_r(g_1)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{t} dt \ldots \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\Lambda\tau} |\varphi_1(\tau)| d\tau \leqslant \varepsilon_0 L_r(e^{-\Lambda\tau}) = \varepsilon_0 \frac{e^{\delta_0 t}}{\delta_0^{r+1}} \text{ при } t = -T_1. \quad (19{,}8)$$

Если ε_0 было выбрано меньше $\frac{|A_0|}{8}$, то (19,8) вступает в противоречие с (19,7), что и доказывает лемму.

§ 20.

Мы будем продолжать заниматься классом функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих (5,2) на полупрямой $t \leqslant t_0$, и разыскивать среди них такие, которые являются логарифмами х. ф. симметрических случайных величин. Мы видели, что для них $\sigma_1 > 0$ и потому в разложении (17,5) можно взять $\Lambda = 0$ и написать

$$g_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_1(\tau) d\tau = \sum_{m=-n}^{n} \oint\limits_{L_m} \frac{e^{(t+t_0)z} \cdot E(z)}{z\sigma(z)} dz + R_n(t), \quad (20{,}1)$$

$$|R_n(t)| = \frac{B(\varepsilon)}{n|t|} e^{(\sigma_1-\varepsilon)t}; \quad t < 0. \quad (20{,}2)$$

Мы имели

$$\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau + t_0) = \ln f(e^{\tau+t_0}) = \psi(uu_0),$$

где

$$u = e^{\tau}, \quad u_0 = e^{t_0}; \quad 0 < u \leqslant 1, \quad 0 < u_0 \leqslant 1.$$

Функция $\Psi(uu_0)$, а значит и $\Psi(u)$, является логарифмом х. ф. При такой замене переменных (20,1) и (20,2) перепишутся так:

$$\int\limits_{0}^{u} \frac{\Psi(uu_0) du}{u} = \sum_{|m| \leqslant n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_m} \frac{(uu_0)^z E(z)}{z\sigma(z)} dz + R_n(u), \quad (20{,}3)$$

$$|R_n(u)| = \frac{B(\varepsilon)}{n|\ln u|} u^{\sigma_1-\varepsilon}; \quad 0 < u \leqslant 1. \quad (20{,}4)$$

Левые стенки контуров L_m считаем проведенными при абсциссе $\varepsilon_1 > 0$.

Для дальнейшего нам нужно исследовать влияние на расположение нуля σ_1, совпадающего с нижней гранью абсцисс всех активных нулей $\sigma(z)$, наличия производных $\Psi(u)$ при $u = 0$.

Введем еще обозначение σ_3 и σ_4 для нижней и верхней грани абсцисс всех активных **комплексных** нулей $\sigma(z)$.

Таким образом,

$$\sigma_1 \leqslant \sigma_3 \leqslant \sigma_4 \leqslant \sigma_2. \quad (20{,}5)$$

Перенумеруем все активные реальные нули $\sigma(z)$; пусть это будут

$$s_1 = \sigma_1, \ s_2, \ldots, s_p \leqslant \sigma_2. \quad (20{,}6)$$

Знак равенства для s_p будет, в частности, тогда, когда $\varphi(t)$ удовлетворяет (5,2) на какой-либо правой полупрямой.

Все корни s_j лежат внутри контура L_0. Обозначим сумму соответствующих им вычетов для функции $(uu_0)^z \dfrac{E(z)}{\sigma(z)}$ через $S(u)$:

$$S(u) = \sum_{s_j} \text{rés}_{s_j} \left((uu_0)^z \frac{E(z)}{\sigma(z)}\right). \tag{20,7}$$

Тогда получим: ввиду $\sigma_1 > 0$, $\int\limits_0^u \dfrac{S(u)}{u} du$ существует и

$$\int\limits_0^u \frac{S(u)}{u} du = S_1(u) = \sum_{s_j} \text{rés}_{s_j} \left((uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\right). \tag{20,8}$$

Внося это в (20,3), получим

$$\int\limits_0^u \Psi(uu_0) \frac{du}{u} = S_1(u) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{|m| \leqslant n}' \oint\limits_{L_m} \frac{(uu_0)^z E(z)}{z\sigma(z)} dz + R_n(u), \tag{20,9}$$

где штрих при знаке суммы показывает, что в $\oint\limits_{L_0}$ не нужно учитывать вычетов в реальных корнях s_j.

Заметим также, что разложение типа (20,9) единственно, как в этом легко убедиться.

§ 21.

Для дальнейшего необходимо указать новую оценку для $R_n(u)$, выраженную через абсциссу σ_3.

Непосредственно ясно, что в сумме Σ' из (20,9) можно провести левые стенки всех контуров L_n при абсциссе $\sigma_3 - \varepsilon$ при сколь-угодно малом фиксированном ε.

Возвращаясь от переменной u к переменной $t = \ln u$ и проведя рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям § 11, найдем, что в оценке для $R_n(u)$ можно заменить σ_1 на σ_3, так что получится

$$|R_n(u)| = \frac{B(\varepsilon)}{n|\ln u|} u^{\sigma_3 - \varepsilon}; \quad 0 < u \leqslant 1, \quad \sigma_3 - \varepsilon > 0. \tag{21,1}$$

Мы докажем теперь следующую лемму.

Лемма IX. Пусть функция $\Psi(u)$ имеет n-ю производную $\Psi^{(n)}(u)$, $0 < u \leqslant u_0$, причем при $u \to +0$, $\Psi^{(n)}(u) \to \Psi^{(n)}_+(0)$, т. е. существует предел справа.

Тогда имеет место неравенство

$$\sigma_3 \geqslant n. \tag{21,2}$$

Кроме того, те реальные активные нули $\sigma(z)$, которые меньше n

$$s_j < n,$$

суть целые положительные числа, и точки s_j суть простые полюсы функции

$$\frac{(uu_0)^z E(z)}{\sigma(z)}.$$

Ввиду невозможности почленно дифференцировать ряд (20,9), приходится прибегать к сложному окольному пути для доказательства этой леммы.

Сперва докажем такую вспомогательную лемму.

Пусть $g(u)$ задана в $[0,1]$; $g(0)=0$ и $g^{(n)}(u)$ существует и непрерывна в $[0,1]$. Составим выражение

$$\chi(u, r)=\int_0^1 \frac{d\alpha_r}{\alpha_r}\int_0^1 \frac{d\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \ldots \int_0^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} g(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r u). \tag{21,3}$$

Тогда, если $n \geqslant 1$, (21,3) имеет смысл, и

$$\chi^{(n)}(u, r)=\int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_2 \alpha_1^{n-1} \alpha_2^{n-1} \ldots \alpha_n^{n-1} g^{(n)}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r u). \tag{21,4}$$

Докажем, что (21,3) имеет смысл. Заметим, что в силу существования и непрерывности $g'(u)$ и того, что $g(0)=0$, функция $\frac{g(u)}{u}$ непрерывна в $[0,1]$, и интеграл $\int_0^u \frac{g(u)}{u} du$ существует. Ввиду этого имеем: при всяком $v_1>0$

$$\int_0^1 \frac{g(\alpha_1 v_1)}{\alpha_1} d\alpha_1=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{g(\alpha_1 v_1)}{\alpha_1} d\alpha_1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon v_1}^{v_1} \frac{g(z)}{z} dz=\int_0^{v_1} \frac{g(z)}{z} dz=g_1(v_1).$$

Положим $v_1=\alpha_2 v_2$; имеем $g_1'(v_1)=\frac{g(v_1)}{v_1}$ существует и непрерывна в $[0,1]$, и $g_1(0)=0$. Ввиду этого по-предыдущему $g_2(0)=0$ и $g_2'(v_2)$ существует и непрерывна. Продолжая далее это рассуждение, докажем наше утверждение.

Теперь докажем, что

$$\int_0^1 \alpha_1^{n-1} g^{(n)}(\alpha_1 v_1) d\alpha_1=g_1^{(n)}(v_1).$$

При $n=1$ нужно доказать

$$\int_0^1 g'(\alpha_1 v_1) d\alpha_1=g_1'(v_1)=\frac{g(v_1)}{v_1} \qquad (v_1>0). \tag{21,5}$$

Это равносильно равенству $\int_0^1 g'(\alpha_1 v_1) d\alpha_1 v_1=g(v_1)$, которое непосредственно проверяется.

Далее, в (21,5) допустимо дальнейшее дифференцирование под знаком интеграла, если $\frac{\partial}{\partial\alpha_1} g'(\alpha v_1)=v_1 g''(\alpha v_1)$ существует и непрерывна по α_1 и v_1, что совпадает с существованием и непрерывностью $g''(u)$

при $u \in [0,1]$. Переход к (21,4) совершается при $n=1$ индукцией по r, и затем законным дифференцированием (21,4) при $n=1$ под знаком интеграла.

Обозначим $\Psi(uu_0)=\Psi_1(u)$. Очевидно, ввиду $u_0 \neq 0$ условия дифференцируемости $\Psi(u)$, данные в формулировке теоремы, будут выполняться и для $\Psi_1(u)$ в сегменте $[0,1]$. Далее, $\Psi_1(0)=\Psi(0)=0$. На основании сказанного выше имеем $\int\limits_0^1 \frac{\Psi_1(\alpha u)}{\alpha}\,d\alpha=\int\limits_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u}\,du$. Обозначим этот интеграл через $\Psi_2(u)$. Тогда для $\Psi_1(u)$ будет верно разложение (20,9). Далее, если $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ — любые фиксированные комплексные числа; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ числа из $(0,1)$, то имеем

$$\sum_{j=1}^{M} Z_j \Psi_2(\beta_j u)=\sum_{j=1}^{M} Z_j S_1(\beta_j u)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{|m|\leqslant n}{}' \oint\limits_{L_m}\Big(\sum_{j=1}^{M} Z_j\beta_j^z\Big)\times$$

$$\times (uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz+\sum_{j=1}^{M} Z_j R_n(\beta_j u). \qquad (21,6)$$

§ 22.

Обозначая $\Pi(z)=\sum\limits_{j=1}^{M} Z_j\beta_j^z$, выразим подинтегральную функцию (21,6) в виде

$$\Phi(z)=\Pi(z)\,(uu_0)^z\,\frac{E(z)}{z\sigma(z)}. \qquad (22,1)$$

Мы хотим доказать такую лемму: пусть $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$ — какие-либо активные нули $\sigma(z)$, которые являются полюсами $\frac{E(z)}{\sigma(z)}$ соответственных порядков $l_0, l_1, \ldots, l_k$. Тогда можно подобрать $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_1} \in (0,1)$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k1}$, и, стало быть, $\Pi(z)$ так, что $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ не будут полюсами $\Phi(z)$, а ϱ_0 будет полюсом порядка e_0, где $e_0 \leqslant l_0$ — заданное целое число.

Для доказательства выберем число $\xi>0$, столь малое, что $e^{-\xi\varrho_{j_1}} \neq e^{-\xi\varrho_{j_2}}$ при $j_1 \neq j_2$, и составим систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{k=1} Z_m e^{-m\xi\varrho_j}=\delta_j. \qquad (22,2)$$

Здесь $j=1, 2, \ldots, k$, $\delta_0=1$, $\delta_j=0$ $(j>0)$. Система разрешима, так как ее детерминант есть детерминант Вандермонда $\neq 0$.

Полагая $\Pi_1(z)=\sum\limits_{m=0}^{k-1} Z_m e^{-m\xi z}$, найдем, что если $l=\sup(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ (все эти кратности ограничены константой), то $(\Pi_1(z))^l=\Pi_2(z)$ будет иметь ϱ_j нулями кратности, по крайней мере, l_j при $j \geqslant 1$, и $\Pi_2(\varrho_0) \neq 0$. Если теперь e_0 назначено $<l_0$, то введем еще функцию $(e^{-z}-e^{-\varrho_0})^{l_0-e_0}$; тогда $\Pi(z)=\Pi_2(z)(e^{-z}-e^{-\varrho_0})^{l_0-e_0}$ будет иметь ϱ_0 нулем кратности ро́вно l_0-e_0. Далее, $\Pi(z)$ можно изобразить в виде $\Pi(z)=\sum\limits_{j=1}^{k_1} Z_j\beta_j^z$, где $0<\beta_i<1$, и через Z_j обозначены новые комплексные числа.

Начнем с доказательства того, что $\sigma_3 \geqslant n$. Пусть $\sigma_3 < n$. Тогда мы сможем найти комплексный активный нуль $\varrho_0 = b_0 + i\tau_0$ под условиями

$$b_0 = n - \eta_0,\ \eta_0 > 0;\ \sigma_3 - b_0 \leqslant 0{,}01. \tag{23,1}$$

Обозначим $|\varrho_0| = \delta_0$. Пусть кратность ϱ_0 есть l_0. Выберем теперь K под условием: $K > 2 + \delta_0 + 2\delta_0^{\frac{1}{n-b_0}-1}$. Все нули, которые находятся в прямоугольнике $\sigma_1 \leqslant x \leqslant \sigma_2$; $|y| \leqslant 2K\delta_0$, за исключением нуля ϱ_0, перенумеруем, как $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_{k_1}$.

Построим согласно предыдущему такую $\Pi(z)$, что ϱ_0 будет простым полюсом $\Phi(z)$, а $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{k_1}$ — не будут полюсами. Тогда из (21,6) получим

$$\Psi_1(u) = \sum_{j=1}^{k_1} Z_j \Psi_2(\beta_j u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{|m| \leqslant n} \oint_{L_m} \left(\sum_{j=1}^{k_1} Z_j \beta_j^z \right) \times$$
$$\times (uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)} + \sum_{j=1}^{k_1} Z_j R_n(\beta_j u) \tag{23,2}$$

(сумма содержащая $S_1(u)$ исчезает).

Введем теперь $(r-1)$-кратный интеграл

$$\chi(u) = \int_0^1 \frac{d\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \int_0^1 \frac{d\alpha_{r-2}}{\alpha_{r-2}} \ldots \int_0^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \Psi_3(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{r-1} u). \tag{23,3}$$

Имеем $\Psi_1(0) = 0$ в силу (21,1). Согласно сказанному выше (23,3) имеет смысл. Ввиду равномерной сходимости (23,2) получим

$$\chi(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(m)} \oint_{L_m} \Pi(z)(uu_0)^z \frac{E(z)}{z^2\sigma(z)} dz. \tag{23,4}$$

Полученный ряд будет сходиться абсолютно и равномерно при $r \geqslant 2$. Если $r \geqslant n+2$, его можно n раз почленно дифференцировать по u. В этих условиях имеем

$$\chi^{(n)}(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(m)} \oint_{L_m} \Pi(z) u^{z-n} u_0^z \frac{E(z)}{z^r \sigma(z)} z(z-1)\ldots(z-n+1)\, dz. \tag{23,5}$$

Полагая

$$\Phi_1(z) = \Pi(z) u_0^z \frac{E(z)}{\sigma(z)} z(z-1)\ldots(z-n+1),$$

найдем

$$\chi^{(n)}(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(m)} \oint_{L_m} \frac{u^{z-n}}{z^r} \Phi_1(z)\, dz. \tag{23,6}$$

Согласно (23,2) и § 21 будем иметь

$$\chi(u)=\sum_{j=1}^{k_1} Z_j \int_0^1 \frac{d\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \ldots \int_0^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \Psi_2(\beta_j u\alpha_1\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_1} Z_j \int_0^1 \frac{d\alpha_{r-1}}{\alpha_{r-1}} \ldots \int_0^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha} \Psi_1(\beta_j u\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1})$$

и

$$\chi^{(n)}(u)=\sum_{j=1}^{k_1} Z_j \int_0^1 d\alpha_{r-1} \ldots \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha \beta_j^n \alpha^{n-1}\alpha_1^{n-1} \ldots \alpha_{r-1}^{n-1} \Psi_1^{(n)}(\beta_j u\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}).$$

Ввиду сказанного выше о $\Psi_1^{(n)}(u)$ и того, что числа $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta_j$ все $\in (0,1)$, имеем

$$|\chi^{(n)}(u)| < C_{17} \tag{23,7}$$

при всех $z > n+2$ и всех $u \in [0, 1]$.

Теперь предположим, что $\sigma_3 < n$. Мы должны притти к противоречию.

Все полюсы $\Phi_1(z)$, кроме простого полюса ϱ_0, удалены от 0 на расстояние $\geqslant 2K\delta_0$, где

$$K > 2+\delta_0+2\delta_0^{\frac{1}{n-b_0}-1}. \tag{23,8}$$

Окружим их кружками C_{ϱ_j} столь малыми, что точки их контуров лежат в полуплоскости $x > \sigma_3 - 0{,}01$ и расстояние их от 0 будет $\geqslant K\delta_0$.

Вычет подинтегральной функции (23,6) в ϱ_0 будет иметь вид

$$F_0 \frac{u^{\varrho_0-n}}{\varrho_0^r}, \tag{23,9}$$

где F_0 — фиксированное комплексное число. Ввиду этого (23,6) перепишем:

$$\chi^{(n)}(u)=F_0 \frac{u^{\varrho_0-n}}{\varrho_0^r} + \sum_{(\varrho_j)} \oint_{C_{\varrho_j}} \frac{u^{z-n}}{z^r} \Phi_1(z)\, dz. \tag{23,10}$$

§ 24.

Согласно предыдущим сведениям о расположении ϱ_i и лемме IV (9,1) последняя сумма в (23,10) мажорируется выражением

$$C_{18} \frac{u^{\sigma_3-0{,}01-n}}{(K\delta_0)^r} \quad \text{при} \quad u>0, \quad r \geqslant n+2,$$

которое ввиду того, что $\sigma_3 - b_0 \leqslant 0{,}01$, меньше, чем

$$C_{18} \frac{u^{b_0-0{,}02-n}}{(K\delta_0)^r}. \tag{24,1}$$

Положим $u=(K\delta_0)^{-r}$. Тогда

$$\left| F_0 \frac{u^{\varrho_0-n}}{\varrho_0^r} \right| = |F_0| \cdot \frac{u^{b_0-n}}{\delta_0^r} = |F_0| \cdot K^r. \tag{24,2}$$

Далее,

$$C_{18}\frac{u^{b_0-0{,}02-n}}{(K\delta_0)^r}=C_{18}\frac{u^{b_0-n}}{\delta_0^{\,r}}\cdot\frac{u^{-0{,}02r}}{K^r}. \qquad (24{,}3)$$

Ввиду того, что $K>\delta_0$,

$$\frac{u^{-0{,}02}}{K^r}=\frac{(K\delta_0)^{0{,}02r}}{K^r}<\frac{\delta_0^{0{,}02r}}{K^{\frac{r}{3}}K^{0{,}02r}}=\left(\frac{\delta_0}{K}\right)^{0{,}02r}K^{-\frac{r}{3}}<K^{-\frac{r}{3}}.$$

Поэтому (24,3) не превосходит

$$C_{18}\,|F_0|\,K^r K^{-\frac{r}{3}}.$$

При достаточно большом r это выражение будет

$$<\frac{1}{2}\,|F_0|\,K^r. \qquad (24{,}4)$$

Обращаясь к (23,10) и учитывая (24,2) и (24,4), найдем при $u=(K\delta_0)^{-r}$ и всех достаточно больших r

$$|\chi^{(n)}(u)|>\frac{1}{2}\,|F_0|\,K^r.$$

При достаточно большом r это вступает в противоречие с (23,7). Это и доказывает первую часть леммы:

$$\sigma_3\geqslant n \qquad (21{,}2)$$

Для доказательства второй части леммы — о реальных активных нулях мы можем заметить следующее.

Если активный реальный нуль s_j удовлетворяет условию $s_j<n$ и если s_j не есть целое число, то мы можем провести для него же рассуждения, что и для нуля ϱ_0 в § 22—24. Тогда получится противоречие, доказывающее, что $s_j\geqslant n$. Если же s_j — целое число, то построение вообще невозможно вследствие присутствия в $\Phi_1(z)$ множителя $z(z-1)\ldots(z-n+1)$, имеющего простые нули в целых точках. Это отвечает тому, что для целой степени u^{s_j} все производные непрерывны в $[0,1]$. Если же среди точек $s_j<n$ встречается хотя бы один полюс порядка $l_j\geqslant 2$ для функции $u_0^z\dfrac{E(z)}{\sigma(z)}$, то множитель $z(z-1)\ldots(z-n+1)$ понизит его порядок лишь на 1; далее подбором соответствующей функции $\Pi(z)$ его можно сделать полюсом первого порядка и провести для него рассуждения § 22—24.

Этим лемма IX полностью доказана.

§ 25.

Пусть существует непрерывная $\Psi^{(n)}(u)$ при $u\in[0,1]$, и пусть $n>\gamma$, где γ — максимальный реальный нуль $\sigma(z)$ (без требования активности).

Далее, пусть уравнение (5,2) удовлетворяется на всей оси. Тогда имеем: σ_2 — активный нуль $\sigma(z)$, и все активные нули лежат в $[\sigma_1,\sigma_2]$. Так как $n>\sigma_2$ и $\sigma_3\leqslant\sigma_2$, то комплексные активные нули будут отсутствовать, а все реальные активные нули будут целочисленными и простыми полюсами $\dfrac{E(z)}{\sigma(z)}$.

На всей полупрямой $u \geqslant 0$ будем иметь

$$\int_0^u \frac{\Psi(u)}{u}\,du = A_1 u^{n_1} + A_2 u^{n_2} + \ldots + A_p u^{n_p},$$

где n_i — целые числа $A_1 < 0$, $A_p < 0$. Отсюда

$$\Psi(u) = E_1 u^{n_1} + E_2 u^{n_2} + \cdots + E_p u^{n_p},\ E_1 < 0,\ E_p < 0. \tag{25,1}$$

Далее, $\Psi(u) = \ln f(u)$, где $f(u)$ — х. ф. случайной симметрической величины. Таким образом, для $u < 0$ $\Psi(u) = \Psi(|u|)$. Следовательно, для всех значений

$$f(u) = e^{\Psi(u)};\ \Psi(u) = E_1 |u|^{n_1} + E_2 |u|^{n_2} + \cdots + E_p |u|^{n_p}. \tag{25,2}$$

Если мы допустим, что $f^{(n)}(u)$ существует и непрерывна для всех $u \in (-\infty, \infty)$, то $\Psi^{(n)}(u)$ также существует и непрерывна во всех точках, включая $u = 0$. Но ввиду того, что $n > n_p$, все степени n_j в (25,2) должны быть четными, иначе $\Psi^{(n)}(0)$ не существовала бы. Итак, $\Psi(u)$ имеет вид

$$\Psi(u) = E_1 u^{2m_1} + E_2 u^{2m_2} + \cdots + E_p u^{2m_p}, \tag{25,3}$$

где m_j — целые числа, т. е. $\Psi(u)$ есть полином от u с четными степенями.

Известно [2], что если $f(u) = e^{\Psi(u)}$ х. ф. случайной величины, то $\Psi(u)$ — квадратный полином, так что имеет место нормальный закон.

§ 26.

Мы можем теперь доказать теорему II § 2.

Пусть

$$L_1 = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r,$$
$$L_2 = b_1 x_1 + \ldots + b_r x_r$$

две линейные формы, причем

$$\sup\{|a_1|, \ldots, |a_r|\} \neq \sup\{|b_1|, \ldots, |b_r|\}.$$

Пусть $L_1 \cong L_2$ и x_i имеет $2m$-й момент, где $m = \left[\dfrac{\gamma}{2} + 1\right]$, и γ — максимальный реальный корень

$$\sigma(z) = |a_1|^z + \cdots + |a_2|^z - |b_1|^z - \cdots - |b_r|^z.$$

Если $f(u)$ — х. ф. x_i, то имеем

$$|a_1| y_1 + \cdots + |a_2| y_2 \cong |b_1| y_1 + \cdots + |b_r| y_r,$$

где y_i — независимые величины с х. ф. $|f(u)|^2 = f_1(u)$. Если x_i имеют $2m$-й момент, то и величины y_i его имеют. В этом случае, как известно, $f^{(2m)}(u)$ существует и непрерывна. Далее, $2m > \gamma$, и все рассуждения § 25 будут иметь место. Итак, y_i будут распределены по нормальному типу. Но $y_i = x_i - x_i'$, где x_i и x_i' независимы и одинаково распределены. По известной теореме Г. Крамера [8], x_i будут также нормальны. Это доказывает теорему II § 2. В условиях теоремы II′, если σ_2 отсутствует в разложении (20,9), заменим его на верхнюю грань абсцисс комплексных нулей σ_4 и проведем то же рассуждение [1].

---

[1] При этом вместо леммы о $e^{\Psi(u)}$ из [2] надо приложить более сильную лемму XII из § 42, не зависимую от остального.

§ 27.

Вернемся снова к разложению (20,3) и докажем лемму.

Лемма X. Число σ_1 удовлетворяет неравенствам:

$$0 < \sigma_1 \leqslant 2 \tag{27,1}$$

Доказательство. Мы знаем из предыдущего, что $\sigma_1 > 0$. Остается доказать, что предположение

$$\sigma_1 > 2 \tag{27,2}$$

ведет к противоречию.

Для этого положим в (20,9) $n = 1$, $\Psi(uu_0) = \Psi_1(u)$. Из (20,9) выводим: при $u > 0$, $u < u$

$$\int_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u} du = B(\varepsilon) \cdot u^{\sigma_1 - \varepsilon}.$$

Выбирая ε достаточно малым и учитывая (27,2), найдем

$$\int_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u} du = Bu^{2+\eta}; \quad \eta > 0, \quad 0 < u < u_1. \tag{27,3}$$

Ввиду знакопостоянства $\Psi(u)$ и, стало быть, $\Psi_1(u)$ на всей оси, заключаем:

$$\left| \int_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u} du \right| \geqslant \left| \frac{1}{u} \int_0^u \Psi_1(u)\, du \right|,$$

откуда согласно (27,3)

$$\int_0^u \Psi_1(u)\, du = Bu^{3+\eta}. \tag{27,4}$$

Отсюда $\int\limits_{\frac{u}{2}}^{u} \Psi_1(u)\, du = Bu^{3+\eta}$. Ввиду непрерывности $\Psi_1(u)$ по теореме Лагранжа найдется такое $u_k \in \left[\frac{u}{2},\ u\right]$, что $\frac{u}{2}\Psi_1(u_k) = Bu_k^{3+\eta}$, или

$$\Psi_1(u_k) = Bu_k^{2+\eta}. \tag{27,5}$$

Ввиду четности $\Psi_1(u)$ имеем

$$\Psi_1(-u_k) = \Psi_1(u_k) = Bu_k^{2+\eta}. \tag{27,6}$$

Итак, существует последовательность чисел $u_k \to 0$, таких, что выполняются (27,5) и (27,6).

Функция $f(u) = e^{\Psi(u)}$ есть х. ф. для некоторого закона $F(x)$, а потому $f(uu_0) = e^{\Psi_1(u)}$ будет х. ф. для некоторого закона $F_1(x)$.

Обозначим $f(uu_0) = f_1(u) = e^{\Psi_1(u)}$; найдем

$$f_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF_1(x),$$

и

$$-\frac{f_1(u_k)+f_1(-u_k)-2f_1(0)}{u_k^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{u_kx}{2}}{u_k^2}\,dF_1(x). \qquad (27{,}7)$$

Учитывая (27,5) и (27,6), находим, что левая часть представляется в виде

$$\frac{Bu_k^{2+\eta}}{u_k^2}=Bu_k^{\eta}\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2\frac{u_kx}{2}}{u_k^2}\,dF_1(x)=\varepsilon_k\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

В силу неотрицательности подинтегральной функции находим

$$\varepsilon_k\geqslant\int_{-\frac{1}{u_k}}^{\frac{1}{u_k}}\frac{4\sin^2\frac{u_kk}{2}}{u_k^2}\,dF_1(x)\geqslant\frac{8}{\pi^2}\int_{-\frac{1}{u_k}}^{\frac{1}{u_k}}x^2\,dF_1(x).$$

При $k\to\infty$ находим

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF_1(x)=0.$$

Это может быть лишь для несобственного закона $F_1(x)$ постоянной величины, равной 0. Такие законы мы отбросили с самого начала. Этим лемма X доказана.

§ 28.

Все вышеуказанное доказывает первую часть теоремы V § 2.

Вторая часть теоремы V будет доказана в дальнейшем.

На пути к доказательству теоремы 1 нужно доказать еще одну существенную для дальнейшего лемму.

Лемма XI. Пусть $\sigma_1=2$ является простым полюсом функции $\frac{E(z)}{\sigma(z)}$. Пусть существует реальный полюс $s_2>\sigma_1=2$ (активный нуль $\sigma(z)$), который не является целым четным числом и одновременно простым числом.

Тогда

$$\sigma_3\geqslant s_2-2\,[1]. \qquad (28{,}1)$$

Если таких полюсов s_2 нет, то активных комплексных нулей нет, и

$$\psi(u)=Au^2,\ A<0. \qquad (28{,}2)$$

Доказательство этой леммы потребует первоначального обоснования некоторых вспомогательных утверждений.

---

[1] σ_3, как и ранее, — точная нижняя грань абсцисс активных комплексных нулей.

Докажем сперва следующее утверждение: в условиях леммы XI существует $\Psi''(u)$, непрерывная на всей оси, и существует дисперсия соответствующего распределения. Имеет место оценка

$$\Psi(u) = Bu^2 \text{ при } |u| \leqslant 1. \tag{28,3}$$

Утверждение (28,3) в свою очередь мы выведем из следующего, более слабого, утверждения: существует последовательность положительных чисел $u_k \to 0$, такая, что

$$|\Psi(u_k)| \leqslant C_{19} u_k^2. \tag{28,4}$$

Для доказательства обращаемся к (20,9) и (21,1). Если при этом $\sigma_3 > \sigma_1 = 2$, то (28,4) тривиально. Именно, беря $n = 1$, получаем при $0 < u \leqslant 1$

$$\int\limits_0^u \Psi(uu_0)\frac{du}{u} = \int\limits_0^u \Psi_1(u)\frac{du}{u} = S_1(u) + Bu^{2+\eta} = Bu^2$$

ввиду того, что $S_1(u) = Cu^2 + 0(u^{2+\eta})$; $\eta > 0$, C — константа. Отсюда ввиду знакопостоянства $\Psi_1(u)$

$$\left|\int\limits_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u}\, du\right| \geqslant \frac{1}{u}\left|\int\limits_0^u \Psi_1(u)\, du\right|$$

и $\int\limits_0^u \Psi_1(u)\, du = Bu^3$. Отсюда, рассуждая, как в § 27, при выводе из (27,4) следствия (27,6), заключаем, что существует последовательность $u_k' \to 0$, для которых верно

$$\Psi(u_k') = Bu_k'^2.$$

Полагая $u_k = u_k' u_0^{-1}$, приходим к (28,4). Случай, когда $\sigma_3 = \sigma_1 = 2$, требует более сложных рассуждений.

§ 29.

Пусть $\sigma_3 = \sigma_1 = 2$. Обратимся к (20,9), и, устремляя $n \to \infty$ с учетом (21,1), получим

$$\int\limits_0^u \Psi_1(u)\frac{du}{u} = S_1(u) + T(u), \tag{29,1}$$

где

$$T(u) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint\limits_{L_m} (uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\, dz \tag{29,2}$$

и штрих означает, что берутся вычеты лишь в комплексных активных нулях.

Из (29,1) заключаем, что

$$T(u) = \int\limits_0^u \Psi_1(u)\frac{du}{u} - S_1(u)$$

непрерывна и имеет непрерывную производную $T'(u)$ в $[0,1]$. Далее, $T(0)=0$. Ввиду этого, полагая

$$T_1(u) = uT'(u), \tag{29,3}$$

найдем

$$T(u) = \int_0^u T_1(u)\frac{du}{u}.$$

Мы хотим теперь доказать, что существует бесконечная последовательность положительных чисел $u_k \to 0$, таких, что

$$T_1(u_k) > 0. \tag{29,4}$$

Для доказательства вводим замену переменных:

$$u=e^t; \quad u_0=e^{t_0}; \quad T_1(u)=T_1(e^t)=W(t). \tag{29,5}$$

Тогда (29,2) примет вид

$$\int_{-\infty}^{t} W(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_m{}' \oint_{L_m} e^{(t+t_0)z}\frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz \tag{29,6}$$

для $t<0$. Пусть $\beta<0$ — любое число. Полагая

$$W_1(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t)\,dt,$$

найдем

$$W_1(t+\beta) = \frac{1}{2\pi i}\sum_m{}' \oint_{L_m} e^{(t+t_0)z}\cdot e^{\beta z}\cdot\frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz.$$

Ввиду этого, если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ — любые отрицательные числа, а $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ — любые неотрицательные числа, то

$$\sum_{j=1}^{M} A_j W_1(t+\beta_j) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \epsilon^{(t+t_0)z}\cdot \Pi(z)\frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz, \tag{29,7}$$

где через $\Pi(z)$ обозначена функция

$$\sum_{j=1}^{M} A_j e^{\beta_j z}. \tag{29,8}$$

При этом, если для некоторых t левая часть (29,7) оказывается положительной, то это же верно хотя бы для одного из членов $W_1(t+\beta_j)$.

Рассмотрим все комплексные полюсы $\frac{E(z)}{z\sigma(z)}$. Действуя, как в § 13, найдем число $\varLambda<\sigma_1$, такое, что два комплексных полюса ϱ_0 и $\overline{\varrho_0}$ будут ближайшими к числу $\varLambda$, все остальные будут на большем расстоянии.

Полагая $\varDelta=\varrho_0-\varLambda=d_0e^{i\alpha}$, будем иметь $|\varrho_j-\varLambda|\geqslant d_0+\eta$ для прочих полюсов $\frac{E(z)}{z\sigma(z)}$; $\eta>0$.

Докажем теперь, что можно выбрать такую функцию $\Pi(z)$ типа (29,8), что ϱ_0 и $\bar{\varrho}_0$ будут нулями $\Pi(z)$ предписанной кратности ν.

Если $\varrho_0 = b_0 + i\tau_0$, то $b_0 \geqslant 2$; будем считать, что $\tau_0 > 0$.

Положим: $\beta = -\frac{\pi}{\tau_0}$; $A = e^{-\frac{\pi b_0}{\tau_0}}$. Тогда функция $A + e^{\beta z}$ будет иметь $z = \varrho_0$ простым корнем, а функция $\Pi(z) = (A + e^{\beta z})^\nu$ — корнем кратности ν. $\Pi(z)$ после раскрытия скобок будет иметь форму (29,8). Ввиду этого мы можем всегда выбрать $\Pi(z)$ типа (29,8) так, что ϱ_0 будет простым полюсом функции

$$\Phi(z) = e^{t_0 z}\,\Pi(z)\,\frac{E(z)}{z\sigma(z)}. \tag{29,9}$$

Если ϱ_0 был простым полюсом $\frac{E(z)}{z\sigma(z)}$, то полагаем $\Pi(z) \equiv 1$.

Обозначая теперь

$$W_2(t) = \sum_{j=1}^{M} A_j W_1(t + \beta_j),$$

где A_j, β_j отвечают выбранной $\Pi(z)$, получим

$$W_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} e^{tz}\,\Phi(z)\,dz. \tag{29,10}$$

Активные комплексные нули $\varrho_j \neq \varrho_0$ окружим кружочками C_{ϱ_j} столь малыми, что все точки их контуров находятся в полуплоскости $x > \frac{\sigma_3 + \Lambda}{2}$ и на расстоянии $> d_0 + \frac{\eta}{2}$ от Λ. На контурах кружков должно быть кроме того $|\sigma(z)| > \varepsilon_0$ (см. лемму IV). В силу сказанного выше получим

$$W_2(t)\,e^{-\Lambda t} = Z_0 e^{t(\varrho_0 - \Lambda)} + \bar{Z}_0 e^{t(\bar{\varrho}_0 - \Lambda)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\varrho_i}{}' \oint_{C_{\varrho_i}} e^{t(z-\Lambda)}\,\Phi(z)\,dz. \tag{29,11}$$

§ 30.

Введем оператор

$$L_2(f(t)) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} dt \ldots \int_{-\infty}^{t} db}_{r \text{ раз}} \cdot f(t),$$

который будем применять когда последовательные интегралы будут существовать и давать непрерывные функции.

Полагая $f(t) = W_2(t)\,e^{-\Lambda t}$, получим из (29,11) согласно § 19

$$L_2(W_2(t)\,e^{-\Lambda t}) = Z_0 \frac{e^{t(\varrho_0 - \Lambda)}}{(\varrho_0 - \Lambda)^2} +$$

$$+ \bar{Z}_0 \frac{e^{t(\bar{\varrho}_0 - \Lambda)}}{(\bar{\varrho}_0 - \Lambda)^2} + \frac{1}{2\pi i} \sum{}' \oint_{C_{\varrho_i}} e^{t(z-\Lambda)} \frac{\Phi(z)\,dz}{(z - \Lambda)^r}. \tag{30,1}$$

При $r \geqslant 2$ (в силу формы $\Phi(z)$ даже при $r \geqslant 1$) ряд будет абсолютно сходиться, и сумма в (30,1) будет мажорироваться числом

$$C_{20} \frac{\exp\left(t\frac{\sigma_3 - \Lambda}{2}\right)}{\left(d_0 + \frac{\eta}{2}\right)^r} \tag{30,2}$$

при любых $t < 0$ и $r \geqslant 2$. Далее имеем, полагая

$$Z_0 = |Z_0| e^{i\beta}; \quad \varrho_0 - \Lambda = d_0 e^{i\alpha}; \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2},$$

$$2R\left(Z_0 \frac{\exp(t(\varrho_0 - \Lambda))}{(\varrho_0 - \Lambda)^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{d_0^r} R(|Z_0| \exp(td_0 \cos\alpha + td_0 i \sin\alpha - i\alpha r). \tag{30,3}$$

При всяких фиксированных $T < 0$ и r в сегменте $\left[T - \frac{2\pi}{d_0 \cos\alpha},\ T\right]$ найдется такое t, что (30,3) положительно и равно

$$\frac{2}{d_0^{\ r}} |Z_0| \exp(td_0 \cos\alpha) > \frac{2}{d_0^{\ r}} |Z_0| \exp(Td_0 \cos\alpha - 2\pi) \tag{30,4}$$

в силу того, что $\cos\alpha > 0$ по построению Λ.

Пусть задано $T < 0$. Выберем r столь большим, что (30,4)

$$> 2C_{20} \frac{\exp\left(T\frac{\sigma_3 - \Lambda}{2}\right)}{\left(d_0 + \frac{\eta}{2}\right)^r},$$

и зафиксируем его. После этого выберем $t \in \left[T - \frac{2\pi}{\cos\alpha},\ T\right]$ такое, что (30,3) равно левой части (30,4). Тогда правая часть (30,1) будет больше

$$\frac{1}{d_0^{\ r}} |Z_0| \exp(td_0 \cos\alpha) > 0. \tag{30,5}$$

Тогда, очевидно, должно существовать $T_1 \leqslant T$, для которого $W_2(T) > 0$, иначе соотношение $L_r(W_2(t) e^{-\Lambda t}) > 0$ было бы невозможным. В силу формы $W_2(t)$ заключаем, что хоть для одного из наших чисел $\beta_j < 0$ $W_1(t+\beta_j) > 0$. Ввиду того, что $W_1(t+\beta_j) = \int\limits_{-\infty}^{t+\beta_j} W(t)\,dt > 0$, найдется $t_1 \leqslant T_1$, для которого $W(t_1) > 0$. Беря теперь $T = 2t_1 < 0$ и повторяя те же рассуждения, найдем $t_2 \leqslant 2t_1$, для которого $W(t_2) > 0$. Действуя таким образом, построим последовательность $t_k \to -\infty$, для каждого из которых $W(t_k) > 0$.

Полагая $u_k = e^{t_k}$, доказываем (29,4).

Из (29,1) получаем при $u > 0$:

$$\frac{\Psi_1(u)}{u} = S_1'(u) + T'(u) = S_1'(u) + \frac{T_1(u)}{u};$$

$S_1'(u) = 2Cu + 0(u^{1+\eta})$; отсюда

$$\Psi_1(u_k) = 2Cu_k^2 + T_1(u_k) + 0(u_k^{2+\eta}).$$

Но $C < 0$ по лемме VII. Далее, $\Psi_1(u) \leqslant 0$ при $u \geqslant 0$, ввиду чего, в силу того, что $T_1(u_k) > 0$, находим $|\Psi_1(u_k)| \leqslant |2C| u_k^2 + 0(u_k^{2+\eta})$, или $|\Psi_1(u_k)| \leqslant C_{21} u_k^2$. Это доказывает (28,4). Отсюда можно вывести (28,3) для всей оси, пользуясь методом § 27. Если $f(u) = e^{\Psi(u)}$ и $F(x)$ — соответствующий закон распределения, то

$$-\frac{f(u_k) + f(-u_k) - 2f(0)}{u_k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2 \frac{u_k x}{2}}{u_k^2} dF(x). \tag{31,1}$$

Мы видим, что левая часть (31,1) неотрицательна. В силу (28,4) она не превосходит C_{22}. Отсюда

$$C_{22} \geqslant \int_{-\frac{1}{u_k}}^{\frac{1}{u_k}} \frac{4\sin^2 \frac{u_k x}{2}}{u_k^2} dF(x) \geqslant \frac{8}{\pi^2} \int_{-\frac{1}{u_k}}^{\frac{1}{u_k}} x^2 dF(x).$$

При $k \to \infty$, $u_k \to 0$, и мы находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < C_{22}.$$

В этом случае, как известно, $f''(u)$ существует всюду, ограничена и непрерывна на всей оси. То же касается $f'(u)$; при этом $f'(0) = 0$, в силу симметрии закона $F(x)$.

Далее, имеем

$$\Psi(u) = \ln f(u); \quad \Psi'(u) = \frac{f'(u)}{f(u)}; \quad \Psi''(u) = \frac{f''(u)}{f(u)} - \left(\frac{f'(u)}{f(u)}\right)^2.$$

Отсюда находим: $\Psi'(u)$ и $\Psi''(u)$ — непрерывны и, стало быть, ограничены в $[0,1]$; $\Psi'(0) = 0$. Отсюда имеем

$$\Psi(u) = \Psi(0) + u\Psi'(0) + \frac{u^2}{2}\Psi''(\theta_u) = \frac{u^2}{2}\Psi''(\theta_u).$$

При $|u| \leqslant 1$ в силу изложенного выше это приводит к (28,3).

§ 32.

Для доказательства леммы XI нужны дальнейшие рассуждения. Мы получим оценку (28,3) для всех случаев расположения σ_3, включая $\sigma_3 = \sigma_1 = 2$.

В случае, когда $\sigma_3 > \sigma_1 = 2$, обращаясь к равенству (29,1), разобьем $S_1(u)$ — сумму вычетов по реальным активным нулям — на две части:

$$S_1(u) = V_0(u) + V_1(u), \tag{32,1}$$

где $V_0(u) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m}$ — сумма по вычетам в простых полюсах, равных целым четным числам; $V_1(u)$ — сумма по остальным полюсам.

Ввиду (20,9) и (21,1) получаем при $0 \leqslant u \leqslant 1$: если $\sigma_3 \geqslant 2$, то при всяком $\varepsilon > 0$

$$\int_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u}\,du = V_0(u) + V_1(u) + B(\varepsilon)\,u^{\sigma_3 - \varepsilon}; \tag{32,2}$$

$\sigma_3 - \varepsilon > 2$ при малом ε.

Далее, для всех случаев расположения σ_3

$$\Psi(u) = Bu^2 \text{ при } |u| \leqslant 1. \tag{28,3}$$

Исследуем сперва наиболее трудный случай $2 \leqslant \sigma_3 < 4$. Мы имеем: $f(u) = e^{\Psi(|u|)}$ есть х. ф. некоторого закона $F(x)$. При этом $\Psi(|u|) \leqslant 0$ на всей оси. В таком случае функция $f(u)e^{-u^2} = e^{\Psi(|u|) - u^2}$ имеет оценку $|f_1(u)| < e^{-u^2}$ на всей оси. Ввиду этого $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} f_1(u)\,du = y(x)$ абсолютно сходится и изображает целую функцию x, ограниченную на всей оси. Поэтому $f_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} y(x)\,dx$, где $y(x)$ — непрерывная плотность вероятности. Положим при $u > 0$ $\Psi_2(u) = \Psi_1(u) - u^2$,

$$\int_0^u \frac{\Psi_2(u)}{u}\,du = \int_0^u \frac{\Psi_1(u)}{u}\,du - \frac{u^2}{2}. \tag{32,3}$$

Имеем теперь, при $0 < u \leqslant 1$,

$$f_1(u) = e^{\Psi_2(u)} = 1 + \Psi_2(u) + \xi(u), \tag{32,4}$$

где

$$\xi(u) = e^{\Psi_2(u)} - 1 - \Psi_2(u). \tag{32,5}$$

Пусть далее $K(\alpha)$ — функция параметра α под условиями $K(\alpha) \geqslant 0$; $\frac{K(\alpha)}{\alpha}$ — непрерывная функция; $\int_0^L K(\alpha)\,d\alpha = 1$. Такую функцию будем называть ядром.

Функция $f_2(u) = \int_0^L K(\alpha) f_1(\alpha u)\,d\alpha$ от ядра и х. ф. f_1 будет также характеристической функцией, отвечающей плотности вероятности

$\int\limits_0^L \frac{K(\alpha)}{\alpha} y\left(\frac{x}{\alpha}\right) d\alpha$ (заметим, что $y(x)$ ограничено на всей оси). Над функцией $f_2(u)$ можно провести подобную же операцию, и получить новую х. ф. $f_3(u)$ и т. д. На этом и будет основано доказательство леммы XI.

(Окончание в следующем номере журнала).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник, Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла, ДАН, т. 85, № 6, 1952.

2. J. Marçinkiewicz, Sur une propriété de la loi de Gauss. Math. Zeitschrift, Bd. 44, H. 4—5, 1938.

3. А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, ГТТИ, 1951.

4. А. О. Гельфонд, Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций, Тр. МИАН, т. XXXVIII, 1951.

5. А. О. Гельфонд, О целочисленных аналитических функциях, ДАН, т. 81, 1951.

6. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace, Transformation, 1937.

7. Е. Титчмарш, Теория функций, ГТТИ, 1951.

8. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ГИИЛ, 1947.

Получена 27 декабря 1952 г.
Ленинград.