Линейные формы и статистические критерии. II

(Окончание)

Ю. В. Линник

§ 33

Возвращаясь к представлению (20,9) и учитывая (21,1), перепишем формулу с учетом (32,3) так:

$$\int_0^u \frac{\Psi_2(u)}{u}\,du = -\frac{u^2}{2} + S_1(u) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} (uu_0)^z \frac{E(z)\,dz}{z\sigma(z)}. \tag{33,1}$$

Ряд сходится равномерно в [0,1], и если $K(\alpha)$ ядро указанного в § 32 типа, то

$$\int_0^L K(\alpha)\,d\alpha \int_0^{\alpha u} \frac{\Psi_2(u)}{u}\,du = \int_0^L K(\alpha)\,d\alpha \int_0^u \frac{\Psi_2(\alpha z)}{z}\,dz = \int_0^u \frac{du}{u}\int_0^L K(\alpha)\,\Psi_2(\alpha u)\,d\alpha.$$

При этом, при $Lu < 1$ мы можем использовать (33,1). Аналогичным образом, если $K_1(\alpha_1), \ldots, K_q(\alpha_q)$ ядра того же типа и $L_1, L_2, \ldots, L_q$ соответствующие верхние пределы интегралов, получим

$$\int_0^{L_q} K_q(\alpha_q)\,d\alpha_q \int_0^{L_{q-1}} K_{q-1}(\alpha_{q-1})\,d\alpha_{q-1}\ldots\int_0^{L_1} K_1(\alpha_1)\,d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q u} \frac{\Psi_2(u)}{u}\,du =$$

$$= \int_0^u \frac{du}{u}\int_0^{L_q} K_q(\alpha_q)\,d\alpha_q \int_0^{L_{q-1}} K_{q-1}(\alpha_{q-1})\,d\alpha_{q-1}\ldots\int_0^{L_1} K_1(\alpha_1)\,d\alpha_1\,\Psi_2(\alpha_1\ldots\alpha_q u), \tag{33,2}$$

причем при $L_1, L_2, \ldots, L_q u < 1$ можно использовать формулу (33,1).

Пусть $\eta_0 < 0{,}01$ фиксированное положительное число. Положим $\nu = \nu(r) = 4r^{1+\eta_0}$ $r = 1, 2, 3, \ldots)$ и введем числа

$$L_r = 1 + \frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{4r^{1+\eta_0}} \tag{33,3}$$

и ядра

$$K_r(\alpha) = \frac{\alpha^\nu}{\int_0^{L_r} \alpha^\nu\,d\alpha} = \frac{\nu+1}{L_r^{\nu+1}}\alpha^\nu. \tag{33,4}$$

Рассмотрим операцию (33,2) при каком-либо u под условием $L_1, L_2, \ldots, L_q u < 1$.

Для всякого комплексного z из прямоугольника $\sigma_1 - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sigma_2 + \frac{1}{2}$, $m \leqslant y \leqslant m+1$ получим

$$\int_0^{L_r} K_r(\beta)\beta^z\,d\beta = \frac{L_r^{z+\nu}}{z+\nu}\cdot\frac{\nu+1}{L_r^{\nu+1}} = \frac{L_r^{z-1}}{1+\frac{z-1}{\nu+1}}. \tag{33,5}$$

Положив $z = x + iy$, находим

$$1+\frac{z-1}{\nu+1} = 1+\frac{x-1}{\nu+1}+\frac{iy}{\nu+1},$$

откуда

$$\left|1+\frac{z-1}{\nu+1}\right|^2 = \left(1+\frac{x-1}{\nu+1}\right)^2 + \frac{y^2}{(\nu+1)^2} > 1+\frac{m^2}{2\nu^2}$$

ввиду того, что $x - 1 > \sigma_1 - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$.

Далее, $\nu = 4r^{1+\eta_0}$. Если $q \geqslant 2|m|$, то получим

$$\prod_{r=m}^{2m}\left|1+\frac{z-1}{\nu+1}\right| > \left(1+\frac{a_0}{m^{2\eta_0}}\right)^{\frac{|m|}{2}} > e^{a_1|m|^{1-2\eta_0}}, \tag{33,6}$$

где a_0, a_1 положительные константы.

Далее,

$$|L_r^{z-1}| = |L_r^{x-1}| \leqslant \left(1+\frac{1}{4r^{1+\eta_0}}\right)^{\sigma_2-1}.$$

Ввиду сходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{1+\eta_0}}$, имеем для любого $q \geqslant 1$ и любого z указанной полосы

$$\prod_{r=1}^{q}|L_r^{z-1}| < a_2(\eta_0), \tag{33,7}$$

где $a_2(\eta_0)$ положительная константа, зависящая только от η_0.

Далее,

$$\prod_{r=1}^{q} L_r < a_3(\eta_0). \tag{33,8}$$

Ввиду (33,1), (33,2), (33,6), (33,7) и (33,8) при всяком $q \geqslant 1$ и $u \leqslant \frac{1}{a_3(\eta_0)}$ имеем

$$\int_0^u \frac{du}{u}\int_0^{L_q} K(\alpha_q)\,d\alpha_q \int_0^{L_{q-1}} K(\alpha_{q-1})\,d\alpha_{q-1}\ldots\int_0^{L_1} K(\alpha_1)\,d\alpha_1\,\Psi_2(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q u) =$$

$$= -A^{(q)}u^2 + S_1^{(q)}(u) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} A_m^{(q)}(z)(uu_0)^z\frac{E(z)\,dz}{z\sigma(z)}, \tag{33,9}$$

где при любом q, $A^{(q)}$ и все коэффициенты $S_1^{(q)}(u)$, а также все функции $A_m^{(q)}(z)$ ограничены по абсолютной величине абсолютной константой $A^{(\infty)}$, и притом для $|m| \leqslant \frac{q}{2}$, имеет место оценка

$$|A_m^{(q)}(z)| \leqslant \exp(-a_1 |m|^{1-2\eta_0}). \tag{33,10}$$

Кроме того, из (33,5) можем заключить, что при данном r и $y \to \pm\infty$ имеем

$$\left| \int_0^{L_r} K_r(\beta) \beta^z \, d\beta \right| = B(r) \frac{1}{|y|}, \tag{33,11}$$

где $B(r)$, как и ранее, ограниченное число, зависящее от r и не одно и то же для всех y.

Отсюда заключаем: при $q \geqslant 2$ ряд (33,9) будет абсолютно сходиться, и при $u \leqslant \frac{1}{a_3(\eta_0)}$ его можно дифференцировать по u. Выполняя это, получим из (33,9)

$$\int_0^{L_q} K(\alpha_q) \, d\alpha_q \int_0^{L_{q-1}} K(\alpha_{q-1}) \, d\alpha_{q-1} \ldots \int_0^{L_1} K(\alpha_1) \, d\alpha_1 \Psi_2(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q u) =$$

$$= -2A^{(q)} u^2 + T_1^{(q)}(u) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} A_m^{(q)}(z) (uu_0)^z \frac{E(z) \, dz}{\sigma(z)}, \tag{33,12}$$

где

$$T_1^{(q)}(u) = u \frac{d}{du} S_1^{(q)}(u). \tag{33,13}$$

§ 34

Обозначим оператор

$$\int_0^{L_q} K(\alpha_q) \, d\alpha_q \ldots \int_0^{L_1} K(\alpha_1) \, d\alpha_1 \varphi(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q u) \text{ через } L_q(\varphi).$$

Обращаясь к (32,4) и (32,5), находим

$$L_q(f_1) = 1 + L_q(\Psi_2) + L_q(\xi), \tag{34,1}$$

где $L_q(f_1)$ новая х. ф. случайной величины, также четная.

При условии

$$0 \leqslant u < \frac{1}{a_3(\eta_0)} \tag{34,2}$$

$L_q(\Psi_2)$ выражается разложением (33,12).

Далее, при условии (34,2), ввиду (32,4) и (32,5), находим с учетом (28,3) $\xi(u) = Bu^4$; при любом $q \geqslant 2$

$\xi(a_1 a_2 \ldots a_q u) = B(a_1, \ldots, a_q u)^4 = Bu^4$ при $0 < a_i < L$, откуда равномерно по q

$$L_q(\xi) = Bu^4. \tag{34,3}$$

Рассмотрим последовательность функций $L_q(f_1)$.

Ввиду того, что $a_1 a_2 \cdots a_q < a_3(\eta_0)$ при всех q, мы видим, что $L_q(f_1)$ равностепенно непрерывны и ограничены в $(-\infty, \infty)$. Ввиду этого возможно выбрать подпоследовательность $L_{qj}(f_1)$, равномерно сходящуюся в каждом сегменте к непрерывной функции $g(u)$, которая будет характеристической (см. Г. Крамер [8]).

Возьмем последовательность $L_{qj}(f_1)$, сходящуюся к $g(u)$. Для каждого члена последовательности при $0 < u < u_1$ будет иметь место формула (33,12). Соответствующие функции $A_m^{(q_j)}(z)$ регулярны и ограничены на контурах L_m равномерно по m. По теореме, доказанной в книге П. Монтеля ([9], стр. 28), мы можем для $m = 0, 1, 2, \ldots$ выбрать подпоследовательности, сходящиеся к регулярным $A_m^{(\infty)}(z)$ — одну из другой. В результате для предельной функции при $0 \leqslant u < u_2 = U_0$ получим формулу типа (33,12). При $|u| \leqslant u_0$ предельная функция будет положительной и $\ln g(u)$ непрерывным и реальным.

§ 35

Обозначим получившиеся предельные функции через $g(u)$, $h(u)$, $e(u)$, так что

$$g(u) = 1 + h(u) + e(u); \quad |u| < U_0. \tag{35,1}$$

Ввиду вышесказанного, при $0 < u < U_0$ получим

$$h(u) = -2E_0 u^2 + T_1^{(\infty)}(u) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} A_m^{(\infty)}(z) \frac{(uu_0)^z E(z)}{\sigma(z)} dz, \tag{35,1'}$$

где E_0, коэффициенты $T_1^{(\infty)}$ и $|A_m^{(\infty)}(z)|$ ограничены по модулю абсолютной константой.

Далее,

$$e(u) = Bu^4 \tag{35,2}$$

$$|A_m^{(\infty)}(z)| \leqslant \exp(-a_1 |m|^{1-2\eta_0}) \text{ на } L_m. \tag{35,3}$$

Если $P_1, P_2, \ldots, P_N$ неотрицательные числа, в сумме равные 1, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ неотрицательные числа, то $\sum_{j=1}^{N} P_j g(\beta_j u)$ будет х. ф., причем при $0 < \beta_j u < U_0$ будет верна формула

$$\sum_{j=1}^{N} P_j h(\beta_j u) = -2E_0 \left(\sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^2 \right) u^2 + \sum_{j=1}^{N} P_j T_1^{(\infty)}(\beta_j u) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint A_m^{(\infty)}(z) (uu_0)^z P_N(z) \frac{E(z)}{\sigma(z)} dz, \tag{35,4}$$

где

$$P_N(z) = \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^z.$$

Пусть задано целое число $M \geqslant 2$. Рассмотрим все полюсы функции

$$\Phi_N(z) = (uu_0)^z P_N(z) \frac{E(z)}{\sigma(z)} \tag{35,5}$$

и поставим себе задачей построить такую функцию $P_N(z)$, чтобы $\Phi_N(z)$ не имело полюсов в контурах L_m при $|m| \leqslant M$ и чтобы при этом числа β_j не получались слишком большими.

Возьмем какой-либо полюс (активный нуль $\sigma(z)$) в контуре $L_m(|m| \leqslant M)$; пусть это будет $\varrho = a + i\tau$; здесь $\sigma_1 \leqslant a \leqslant \sigma_2$; $m - 1 \leqslant \tau \leqslant m + 2$. Введем число $\beta_\varrho = 1 + \Delta_\varrho$, где $\Delta_\varrho > 0$ под условием: $\beta_\varrho^\varrho = -\beta_\varrho^a$, т. е. $\beta_\varrho^{i\tau} = (1 + \Delta_\varrho)^{i\tau} = -1$. Очевидно, можно выбрать Δ^∂ под условием

$$0 < \Delta_\varrho < \frac{a_4}{m}, \tag{35,6}$$

Полагая теперь $A_\varrho = \beta_\varrho^a$, получим, что функция $A_\varrho + \beta_\varrho^z$ имеет ϱ простым нулем. Составим произведение $\Pi(A_\varrho + \beta_\varrho^z)$ по всем полюсам в L_m при $|m| \leqslant M$, считая кратности.

Согласно лемме III число полюсов в контуре L_m не превосходит константы a_5 при всех m. Ввиду этого наше произведение развернется в сумму вида $\sum\limits_{j=1}^{N} A'_j \beta_j^z$, где числа β_j получаются как произведения чисел β_ϱ в количестве, не превосходящем $2a_5M$. Отсюда имеем для всякого $j \leqslant N$

$$1 < \beta_j < C_{23} \prod_{m=1}^{M} \left(1 + \frac{a_4}{m}\right)^{2a_5} < M^{a_6}. \tag{35,7}$$

Деля составленную ранее сумму на $\sum\limits_{j=1}^{N} A'_j$, получим сумму

$$P_N(z) = \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^z, \tag{35,8}$$

где

$$\sum_{j=1}^{N} P_j = 1; \quad 1 < \beta_j < M^{a_6}. \tag{35,9}$$

§ 36

Обратимся к (35,1) и по заданному $M \geqslant 2$ построим функцию $g_M(u)$ указанного выше типа. Получим

$$g_M(u) = 1 + \sum_{j=1}^{N} P_j h(\beta_j u) + \sum_{j=1}^{N} P_j e(\beta_j u) \tag{36,1}$$

$$g_M(u) = 1 + h_M(u) + e_M(u). \tag{36,2}$$

Разумеется, P_j, β_j и N зависят от M. Согласно сказанному выше, при

$$0 < u \leqslant \frac{1}{a_3(\eta_0) M^{a_6}} \tag{36,3}$$

имеет место (35,4).

Пусть дана какая-либо четная х. ф. $f(u)$ и соответствующий ей закон распределения $V(x)$. Тогда имеем $f(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos ux \, dV(x)$.

Теперь будем считать, что

$$2 \leqslant \sigma_3 < 4. \tag{36,4}$$

Используем равенство

$$\sin^4 ux = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2ux + \cos 4ux),$$

из которого выводим

$$3f(0) - 4f(2u) + f(4u) = 8 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^4 ux \, dV(x). \tag{36,5}$$

Полагая $f(u) = g_M(u)$, найдем

$$-4h_M(2u) + h_M(4u) - 4e_M(2u) + e_M(4u) = 8 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^4 ux \, dV(x). \tag{36,6}$$

Положим теперь

$$u = e^{-\sqrt{M}}. \tag{36,7}$$

Тогда при достаточно большом M (36,3) будет иметь место для $4u$, так что будет верно и равенство (35,4). Разделим равенство (36,6) при u, равном (36,7), почленно на u^4 и оценим сверху выражение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^4 ux \, dV(x) \tag{36,8}$$

при помощи левой части.

Имеем прежде всего

$$e_M(u) = \sum_{j=1}^{N} P_j e(\beta_j u). \tag{36,9}$$

Согласно (35,2) получим

$$|e_M(u)| = Bu^4 \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4, \tag{36,10}$$

откуда

$$\left| \frac{-4e_M(2u) + e_M(4u)}{u^4} \right| < C_{24} \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4. \tag{36,11}$$

Далее, оценим

$$\left| \frac{-4h_M(2u) + h_M(4u)}{u^4} \right|. \tag{36,12}$$

Для этого используем (35,4). По построению $P_N(z)$, соответствующего числу M, все контурные интегралы исчезают при $|m| \leqslant M$. Далее, из (35,8) на всех L_m

$$|P_N(z)| \leqslant M^{a_6 \cdot \sigma_2}. \tag{36,13}$$

Ввиду этого согласно (35,4) при $m > M$ и $\eta_0 < 0{,}01$

$$\left| \oint\limits_{L_m} A_m^{(\infty)}(z)(uu_0)^z P_N(z) \frac{E(z)}{\sigma(z)}\, dz \right| =$$

$$= B(\varepsilon)\, u^{\sigma_1-\varepsilon} \exp\left(-a_1 |m|^{0,95}\right) M^{a_0 \cdot \sigma_2} = Bu^{\sigma_3} \exp\left(-|m|^{0,9}\right). \qquad (36,14)$$

Сумма контурных интегралов с $|m| > M$ имеет в виду (36,14) оценку

$$B(\varepsilon)\, u^{\sigma_3-\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} M^{0,9}\right). \qquad (36,15)$$

§ 37

Возвращаясь к формулировке леммы XI, мы видим, что если лемма неверна, то $s_2 > \sigma_3 + 2 > 4$, так что сумма $-2E_0u^2 + T_1^{(\infty)}(u) = T(u)$ имеет вид

$$T(u) = Eu^2 + Bu^4. \qquad (37,1)$$

Отсюда находим

$$-2T(2u) + T(4u) = Bu^4.$$

Ввиду этого в выражении типа (35,4) для $-4h_M(2u) + h_M(4u)$ внеинтегральные члены имеют оценку $Bu^4 \sum\limits_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4$.

Ввиду (36,15) находим

$$\left| \frac{-4h_M(2u) + h_M(4u)}{u^4} \right| = \frac{B(\varepsilon)\, u^{2-\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} M^{0,9}\right)}{u^4} + B \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4. \qquad (37,2)$$

Из (36,6), (37,2) и (36,11) заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 ux}{u^4}\, dV(x) < C_{25} \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4 \qquad (37,3)$$

для всех больших M.

Здесь $V(x)$ — закон распределения для х. ф. $g_M(u)$. Далее, имеем при $|ux| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2u}$, $\sin^4 ux \geqslant \left(\frac{2}{\pi} ux\right)^4$, ввиду чего

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 ux}{u^4}\, dV(x) \geqslant \frac{16}{\pi^4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} x^4\, dV(x),$$

так что (37,3) даст

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} x^4\, dV(x) < C_{26} \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^4. \qquad (37,4)$$

Далее, из (36,2) $g_M(u) = \sum\limits_{j=1}^{N} P_j g(\beta_j u)$. Если обозначим через $W(x)$ закон распределения для х. ф. $g(u)$, то $g(\beta_j u)$ будет отвечать закон распределения $W\left(\frac{x}{\beta_j}\right)$, а х. ф. $g_M(u)$ будет отвечать закон распределения

$$V(x)=\sum_{j=1}^{N} P_j W\left(\frac{x}{\beta_j}\right). \tag{37,5}$$

Отсюда

$$\int_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} x^4\,dV(x)=\sum_{j=1}^{N} P_j \int_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} x^4\,dW\left(\frac{x}{\beta_j}\right)=\sum_{j=1}^{N} P_j\beta_j^4 \int_{-\frac{\pi}{2u\beta_j}}^{\frac{\pi}{2u\beta_j}} x^4\,dW(x). \tag{37,6}$$

Ввиду того, что $\beta_j\leqslant M^{a_6}$, $u=e^{-\sqrt{M}}$, находим

$$\frac{\pi}{2u\beta_j}\geqslant\frac{\pi}{2}e^{\sqrt{M}}\,M^{-a_6}>e^{\frac{1}{2}\sqrt{M}}=M_1$$

для $M>\mathrm{const}$. Тогда (37,6) дает

$$\int_{-\frac{\pi}{2u}}^{\frac{\pi}{2u}} x^4\,dV(x)\geqslant\int_{-M_1}^{M_1} x^4\,dW(x)\ \sum_{j=1}^{N} P_j\beta_j^4. \tag{37,7}$$

Сравнивая с (37,4) и сокращая на $\sum_{j=1}^{N} P_j\beta_j^4$, получаем

$$\int_{-M_1}^{M_1} x^4\,dW(x)<C_{26}. \tag{37,8}$$

Здесь $M_1=e^{\frac{1}{2}\sqrt{M}}$ может быть сделано сколь угодно большим, а $W(x)$ есть закон распределения для х. ф. $g(u)$, не зависящий от M_1. Ввиду этого заключаем из (37,8), что $\int_{-\infty}^{\infty} x^4\,dW(x)\leqslant C_{26}$, т. е. распределение $W(x)$ имеет четвертый момент $\alpha_4(W)$.

§ 38

Функция $g(u)$ получилась с помощью определенного предельного перехода из функций

$$L_q(f_1)=\int_0^{L_q} K_q(\alpha_q)\,d\alpha_q\ldots\int_0^{L_1} K_1(\alpha_1)\,d\alpha_1 f_1(\alpha_1\ldots\alpha_q u),$$

где $f_1(u)=e^{-u^2+\psi_1(u)}$ х. ф., отвечающая плотности вероятности $y(x)$, непрерывной и ограниченной на всей оси. Характеристической функции $L_q(f_1)$ будет отвечать плотность

$$\int_0^{L_q} d\alpha_q\ldots\int_0^{L_1} d\alpha_1\,\frac{K_1(\alpha_1)\ldots K_q(\alpha_q)}{\alpha_1\ldots\alpha_q}\,y\left(\frac{x}{\alpha_1\ldots\alpha_q}\right)=y(x,q). \tag{38,1}$$

Заметим, что в силу (33,1)

$$\frac{K_r(\alpha_r)}{\alpha_r} = \frac{r+1}{M_r^{r+1}}\alpha_r^{r-1} \quad \text{непрерывны при } 0 \leqslant \alpha_r \leqslant L_r.$$

Мы докажем теперь, что для плотности $y(x)$ должен существовать четвертый момент

$$\alpha_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 y(x)\,dx < \infty. \tag{38,2}$$

Пусть это не так. Тогда при достаточно большом M интеграл

$$\int_{-M}^{M} x^4 y(x)\,dx \tag{38,3}$$

может быть сделан сколь угодно большим.

Из (38,1) получаем

$$\int_{-M}^{M} x^4 y(x, q)\,dx = \int_0^{L_q} d\alpha_q \ldots \int_0^{L_1} d\alpha_1 K_1(\alpha_1)\ldots K_q(\alpha_q)\,\alpha_1^4\ldots\alpha_q^4 \int_{-\frac{M}{\alpha_1\ldots\alpha_q}}^{\frac{M}{\alpha_1\ldots\alpha_q}} x^4 y(x)\,dx >$$

$$> \int_{-\frac{M}{L_1\ldots L_q}}^{\frac{M}{L_1\ldots L_q}} x^4 y(x)\,dx \int_0^{L_q} d\alpha_q \ldots \int_0^{L_1} d\alpha_1 K(\alpha_1)\ldots K(\alpha_q)\,\alpha_1^4\ldots\alpha_q^4. \tag{38,4}$$

Далее, $\int_0^{L_r} \alpha_r^4 K(\alpha_r)\,d\alpha_r < L_r^4$, и по (33,8) $L_1, L_2 \ldots, L_q < a_3(\eta_0)$. Отсюда

$$\int_{-M}^{M} x^4 y(x, q)\,dx > C_{27} \int_{-\frac{M}{a}}^{\frac{M}{a}} x^4 y(x)\,dx,$$

где через a обозначено число $a_3(\eta_0)$.

Обозначим $Y(x, q) = \int_{-\infty}^{x} y(x, q)\,dx$. Тогда имеем при достаточно большом M интеграл $\int_{-M}^{M} x^4\,dY(x, q) > A$, где A какая угодно предписанная константа. Предельная х. ф. $g(u)$ имеет соответствующий ей закон распределения $W(x)$, и, по известным теоремам Хелли, получим $\int_{-M}^{M} x^4\,dW(x) > A$ при любом A и подходящем M. Значит, четвертый момент $\alpha_4(W)$ не существует, что противоречит выводам § 37.

Итак,

$$\alpha_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 y(x)\, dx < \infty. \tag{38,5}$$

Плотности вероятности $y(x)$ согласно § 32 отвечала при $u \geqslant 0$ х. ф. $f_1(u) = e^{\Psi_1(u) - u^2}$. Согласно известным теоремам [8] существование α_4 влечет существование четвертой производной $f_1^{(4)}(u)$, непрерывной и ограниченной на всей оси. В частности, должен существовать $\lim\limits_{u \to +0} f_1^{(4)}(u)$.

Далее, в сегменте $[0,1]$, $f_1(u) \neq 0$ по построению числа u_0. Ввиду этого в сегменте $[0,1]$ существует $\Psi_1^{(4)}(u)$, а в сегменте $[0, u_0]$ существует непрерывная $\Psi^{(4)}(u)$ и, в частности, $\lim\limits_{u \to +0} \Psi^{(4)}(u)$ $\left(\text{это следует из того, что } \Psi(u) = \Psi_1\left(\frac{u}{u_0}\right)\right)$.

Но согласно лемме IX в этом случае должно быть

$$\sigma_3 \geqslant 4,$$

это противоречит предположению $2 \leqslant \sigma_3 < 4$, и, стало быть, лемма XI доказана при таком ограничении на σ_3. Теперь будем продолжать ее доказательство, считая, что $\sigma_3 \geqslant 4$.

§ 39

Будем считать $\sigma_3 \geqslant 4$. Если лемма XI неверна, то полюс s_2, о котором говорится в ее формулировке, должен удовлетворять условию

$$s_2 > \sigma_3 + 2 \tag{39,1}$$

или вообще не существовать.

Введем четное число $2p$ под условием: $2p$ — наименьшее четное число, которое больше σ_3, т. е.

$$2p - 2 \leqslant \sigma_3 < 2p. \tag{39,2}$$

Возвращаясь к § 32 и 33, соотношение (33,1) напишем:

$$\int_0^u \frac{\Psi_2(u)}{u}\, du = -\frac{u^2}{2} + S_1(u) + I_1(u), \tag{39,3}$$

где

$$I_1(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} (uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\, dz; \tag{39,4}$$

$$-\frac{u^2}{2} + S_1(u) = V_0(u) + V_1(u); \quad V_0(u) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m}, \text{ и ввиду (39,1)}$$

$$V_1(u) = Bu^{\sigma_3 + 2 + \zeta}, \tag{39,5}$$

где $\zeta > 0$ положительная константа.

Левая часть (39,3) дифференцируема при $u > 0$, то же касается $S_1(u)$. Значит, $I_1'(u)$ существует при $u > 0$. Все эти производные непрерывны при $u > 0$.

Полагая $-u^2 + uS_1'(u) = S_2(u)$, $uI_1'(u) = I_2(u)$, найдем

$$\Psi_2(u) = S_2(u) + I_2(u). \tag{39,6}$$

Мы нашли в § 31, что $\Psi'(u)$ и $\Psi''(u)$ существуют и непрерывны в $[0,1]$; то же касается $\Psi_2'(u)$ и $\Psi_2''(u)$. Имеем: $\Psi_2'(0) = 0$; $\Psi_2''(u) = B$ при $u \in [0,1]$. Отсюда:

$$\Psi_2'(u) = Bu. \tag{39,7}$$

Теперь докажем оценку:

$$I_2(u) = B(\varepsilon)\, u^{\frac{5}{8}(\sigma_3+1)-\varepsilon}. \tag{39,8}$$

Из (39,1) выводим, что $s_2 > 4$. Ввиду этого $S_2^{(n)}(u)$ существуют и ограничены в $[0,1]$ при $n \leqslant 4$; $S_2'(0) = 0$. Тогда из (39,6) получается, что $I_2'(u)$ и $I_2''(u)$ тоже существуют и ограничены, и

$$I_2'(u) = Bu; \quad I_2(u) = Bu^2. \tag{39,9}$$

Имеем далее, используя (21,1),

$$\int_0^u \frac{I_2(u)}{u}\, du = I_1(u) = B(\varepsilon)\, u^{\sigma_3-\varepsilon}. \tag{39,10}$$

Если ξ число < 1, то из (39,10) находим

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{I_2(u)}{u}\, du = B(\varepsilon)\, \xi^{\sigma_3-\varepsilon}. \tag{39,11}$$

Пусть $\sup |I_2(u)| = \xi^\beta$ при $u \in \left[\frac{\xi}{2}, \xi\right]$; $\infty \geqslant \beta > 1$ при достаточно малом ξ. Множество точек u, для которых $|I_2(u)| = \frac{1}{2}\xi^\beta$ при $u \in \left[\frac{\xi}{2}, \xi\right]$ замкнуто в силу непрерывности $I_2(u)$.

Если указанное множество пустое, то $I_2(u)$ сохраняет знак (или $\equiv 0$) в нашем сегменте, и $|I_2(u)| > \frac{1}{2}\xi^\beta$, откуда

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} \frac{\frac{1}{2}\xi^\beta}{u}\, du = C_{23}\xi^\beta = B(\varepsilon)\, \xi^{\sigma_3-\varepsilon},$$

откуда

$$I_2(u) = B(\varepsilon)\, u^{\sigma_3-\varepsilon} \quad \text{при} \quad u \in \left[\frac{\xi}{2}, \xi\right]. \tag{39,12}$$

Если оно непустое, то в нашем сегменте найдется точка ξ_2, ближайшая слева к точке ξ_1, где достигается supremum (где $I_2(\xi) = \pm \xi^\beta$), либо такая же точка ξ_3 справа, причем $I_2(\xi_2) = I_2(\xi_3) = \pm\frac{1}{2}\xi^\beta$, и знак $I_2(u)$ сохраняется на сегментах $[\xi_2, \xi_1]$ и $[\xi_1, \xi_3]$.

Пусть для определенности этот знак положителен, и существует сегмент $[\xi_1, \xi_3]$. Тогда имеем:

$$|I_2(\xi_3) - I_2(\xi_1)| = |I_2'(\vartheta)|\,(\xi_3 - \xi_1); \quad \vartheta \in [\xi_1, \xi_3].$$

Но $I_2'(\vartheta) = B\xi$ согласно (39,9) и $|I_2(\xi_3) - I_2(\xi_1)| = \frac{1}{2}\xi^\beta$, откуда

$$\xi_3 - \xi_1 = \frac{|I_2(\xi_3) - I_2(\xi_1)|}{|I_2'(\vartheta)|} > C_{29}\xi^{\beta-1}. \tag{39,13}$$

Далее,

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_3} \frac{I_2(u)}{u}\,du\right| = \int_{\xi_1}^{\xi_3} \frac{|I_2(u)|}{u}\,du > \frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{2}\xi^\beta(\xi_3 - \xi_1) > \frac{1}{2}C_{29}\xi^{2\beta-1}.$$

Сравнивая с (39,11), находим

$$\xi^{2\beta-1} = B(\varepsilon)\xi^{\sigma_3-\varepsilon}; \quad \beta > \frac{\sigma_3 + 1 - \varepsilon}{2};$$

Отсюда: при $u \in \left[\frac{\xi}{2}, \xi\right]$

$$I_2(u) = B(\varepsilon')\,u^{\frac{\sigma_3+1+\varepsilon'}{2}} \quad (\xi < \xi_0(\varepsilon')). \tag{39,14}$$

Сравнивая с (39,12), видим, что оценка (39,14) верна во всех случаях. Однако она недостаточна для дальнейших целей. Чтобы ее улучшить, достаточно улучшить оценку $I_2'(u)$. Имеем согласно (39,14)

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} I_2'(u)\,du = I_2(\xi) - I_2\left(\frac{\xi}{2}\right) = B(\varepsilon)\,\xi^{\frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{2}}.$$

Далее, $I_2''(u) = B$. Обозначая $\sup|I_2'(u)| = \xi^\beta$ и рассуждая, как мы рассуждали выше относительно $I_2(u)$, получим $\xi_3 - \xi_1 > C_{30}\xi^\beta$, и

$$\frac{1}{2}\xi^\beta \cdot C_{30}\xi^\beta = \frac{1}{2}C_{30}\xi^{2\beta} = B(\varepsilon)\,\xi^{\frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{2}}$$

$$\beta > \frac{\sigma_3 + 1 - \varepsilon'}{4} \quad (\xi < \xi_0(\varepsilon')).$$

Отсюда, наконец,

$$I_2'(u) = B(\varepsilon)\,u^{\frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{4}}. \tag{39,15}$$

Подставив эту оценку в (39,13), находим

$$\xi_3 - \xi_1 = \frac{|I_2(\xi_3) - I_2(\xi_1)|}{|I_2'(\vartheta)|} > C_{29}(\varepsilon)\,\xi^{\beta - \frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{4}}$$

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_3} \frac{I_2(u)}{u}\,du\right| > \frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{2}\xi^\beta \cdot C_{29}(\varepsilon)\,\xi^{\beta - \frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{4}}.$$

Отсюда

$$\frac{C_{29}(\varepsilon)}{2}\,\xi^{2\beta - 1 - \frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{4}} = B(\varepsilon)\,\xi^{\sigma_3-\varepsilon}$$

согласно (39,11).

Это дает

$$\beta > \frac{\alpha_3+1-\varepsilon}{2} + \frac{\sigma_3+1-\varepsilon}{8} \quad (\xi < \xi_0(\varepsilon))$$

и

$$I_2(u) = B(\varepsilon)\, u^{\frac{5}{8}(\sigma_3+1)-\varepsilon}. \qquad (39{,}16)$$

Это и есть желаемая оценка.

§ 40

Далее действуем, как в § 32: рассматриваем

$$f_1(u) = e^{\Psi_2(u)} = e^{S_2(u)} e^{I_2(u)} \quad \text{при} \quad u \in [0{,}1].$$

Учитывая оценку $S_2(u) = Bu^2$ и (39,8), находим

$$f_1(u) = e^{S_2(u)} \quad (1 + I_2(u) + B\,|I_2(u)|^2). \qquad (40{,}1)$$

Но

$$|I_2(u)|^2 = B(\varepsilon)\, u^{\frac{5}{4}(\sigma_3+1)-\varepsilon}.$$

Ввиду $\sigma_3 \geqslant 4$ находим: $\frac{5}{4}(\sigma_3+1) \geqslant \sigma_3 + 2 + \frac{1}{4} > 2p + \frac{1}{4}$.

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{8}$, получим

$$|I_2(u)|^2 = Bu^{2p+\frac{1}{8}}$$

[$2p$ число из (39,2)]. Далее, согласно (39,5)

$$e^{S_2(u)} = e^{V_2(u)} + Bu^{2p+\zeta}; \quad \zeta > 0,$$

$$V_2(u) = \sum_{m=1}^{p} \Gamma_m u^{2m}, \qquad (40{,}2)$$

так что (40,1) перепишется так:

$$f_1(u) = e^{V_2(u)}(1 + I_2(u)) + Bu^{2p+\zeta}. \qquad (40{,}3)$$

Заметим еще, что

$$e^{V_2(u)} = \sum_{m=0}^{2p} \frac{1}{m!}(V_2(u))^m + Bu^{2p+2}. \qquad (40{,}4)$$

Ввиду этого, (40,3) можно переписать

$$f_1(u) = 1 + V_2(u) + \sum_{n=1}^{2p} \sigma_n u^n I_2(u) + Bu^{2p+\zeta}. \qquad (40{,}5)$$

Мы имели в (39,4) выражение для $I_1(u)$:

$$I_1(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} (uu_0)^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\, dz, \qquad (39{,}4)$$

при этом $I_2(u) = uI_1'(u)$. Однако ряд (39,4), вообще говоря, нельзя дифференцировать почленно, так как получится расходящийся ряд.

Мы докажем, однако, что при целых положительных n имеем.

$$\int_0^u \frac{u^n I_2(u)}{u}\,du = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} u^{z+n} u_0^z \frac{E(z)}{(z+n)\sigma(z)}\,dz. \tag{40,6}$$

В самом деле,

$$\int_0^u \frac{u^n I_2(u)}{u}\,du = \int_0^u u^n I_1{}'(u)\,du = u^n I_1(u) - \int_0^u n u^{n-1} I_1(u)\,du.$$

Ряд (39,4) можно умножить на nu^{n-1} и интегрировать почленно. Отдельный член его даст

$$\oint_{L_m} u^{z+n}\left(1-\frac{n}{n+z}\right) u_0^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz = \oint_{L_m} u^{z+n} u_0^z \frac{E(z)\,dz}{(z+n)\sigma(z)},$$

что и приводит к (40,6). Заметим, что ввиду того, что стенки контуров L_m лежат правее $\sigma_3 - \varepsilon \geqslant 4 - \varepsilon$, $\dfrac{1}{z+n}$ регулярно внутри их и на них.

Обозначая, далее,

$$H(z) = \frac{u_0^z E(z)}{\sigma(z)} \sum_{n=1}^{2p} \sigma_n \frac{u^n}{z+n} \tag{40,7}$$

и

$$I_3(u) = \sum_{n=1}^{2p} \sigma_n u^n I_2(u),$$

найдем

$$\int_0^u \frac{I_3(u)}{u}\,du = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} u^z H(z)\,dz, \tag{40,8}$$

$$f_1(u) = 1 + V_2(u) + I_3(u) + \xi(u), \tag{40,9}$$

причем ряд (40,8) сходится равномерно по $u \in [0,1]$, и

$$\xi(u) = Bu^{2p+\zeta}. \tag{40,10}$$

§ 41

Теперь в (40,9) применяем рассуждение § 33 и 34. Имеем в обозначениях § 34

$$L_q(f_1) = 1 + L_q(V_1) + L_q(I_3) + L_q(\xi) \tag{41,1}$$

при условии

$$0 \leqslant u < \frac{1}{a_3(\gamma_0)}. \tag{41,2}$$

Совершив предельный переход, указанный в § 34, получаем новую х. ф. $g(u)$, причем

$$g(u) = 1 + h(u) + e(u);\ |u| \leqslant U_0.$$

При $0 \leqslant u \leqslant U_0$

$$h(u) = V_2^{(\infty)}(u) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} A_m^{(\infty)}(z)\, u^z H(z)\,dz, \tag{41,3}$$

где $V_2^{(\infty)}(u)$ четный полином степени $2p$, и $A_m^{(\infty)}(z)$ удовлетворяют условию:

$$|A_m^{(\infty)}(z)| \leqslant \exp(-a_1 |m|^{1-2\eta_0}), \tag{41,4}$$

так что ряд в (41,3) сходится абсолютно и равномерно. Далее,

$$e(u) = Bu^{2p+\zeta}. \tag{41,5}$$

Далее, по заданному числу $M \geqslant 2$, действуя методами § 35, строим функцию

$$g_M(u) = \sum_{j=1}^{N} P_j g(\beta_j u) = 1 + \sum_{j=1}^{N} P_j h(\beta_j u) + \sum_{j=1}^{N} P_j e(\beta_j u) =$$
$$= 1 + h_M(u) + e_M(u). \tag{41,6}$$

Здесь

$$e_M(u) = Bu^{2p+\zeta} \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p+\zeta}, \tag{41,7}$$

$$h_M(u) = \sum_{j=1}^{N} P_j V_2^{(\infty)}(\beta_j u) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{|m| > M} \oint A_m^{(\infty)}(z) u^z P_N(z) H(z)\, dz, \tag{41,8}$$

при этом

$$\sum_{j=1}^{N} P_j = 1, \quad 1 < \beta_j < M^{a_6}, \tag{35,9}$$

$$|A_m^{(\infty)}(z)| \leqslant \exp(-a_1 |m|^{1-2\eta_0}) \tag{35,3}$$

на контурах L_m (41,8) будет иметь место при

$$0 < u \leqslant \frac{1}{a_3(\eta_0) M^{a_6}}. \tag{36,3}$$

Теперь действуем, как в § 36, оперируя с числом $2p$ вместо числа 4.

Используем равенство

$$\sin^{2p}(ux) = \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p}^k \frac{\cos\,(2p-2k)\,ux}{2^{\left[\frac{k}{p}\right]}} = \sum_{k=0}^{p} C_{kp} \cos(2p-2k)\,ux$$

(см. [10], стр. 268).

Полагая $x = 0$, находим: $\sum\limits_{k=0}^{p} C_{kp} = 0.$

Пусть х. ф. $g_M(u)$ отвечает закону распределения $V(x)$, тогда наше равенство даст

$$\sum_{k=0}^{p} C_{kp} g_M[(2p-2k)\,u] = \sum_{k=0}^{p} C_{kp} h_M((2p-2k)\,u) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{p} C_{kp} e_M((2p-2k)\,u) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^{2p} ux\, dV(x). \tag{41,9}$$

Полагаем

$$u = e^{-\sqrt{M}}. \tag{36,7}$$

При достаточно большом M (36,3) будет верно для $2pu$ и будет иметь место (41,8). Докажем теперь, что если $m < p$ целое число, то

$$\sum_{k=0}^{p} C_{kp}(2p-2k)^{2m} = 0 \tag{41,10}$$

$\left(\text{при } m=0 \text{ получаем, в частности, } \sum\limits_{k=0}^{p} C_{kp} = 0\right)$. Возьмем равенство

$$\sin^{2p} z = \sum_{k=0}^{p} C_{kp} \cos(2p-2k) z.$$

Дифференцируя его $2m$ раз по z и полагая $z=0$, получим 0 при $2m < 2p$, ибо величина слева разлагается в ряд Маклорена, начинающийся с z^{2p}. Отсюда

$$(-1)^m \sum_{k=0}^{p} C_{kp}(2p-2k)^{2m} = 0,$$

и получаем (41,10). Так как $V_2^{(\infty)}(u)$ четный полином степени $2p$, то

$$\sum_{k=0}^{p} C_{kp} V_2^{(\infty)}[(2p-2k)u] = Bu^{2p}. \tag{41,11}$$

Далее, оценивая $P_N(z)$ согласно § 36, найдем, что сумма контурных интегралов в (41,8) будет

$$B(\varepsilon)\, u^{\sigma_3 - \varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} M^{0,9}\right). \tag{36,15}$$

Ввиду этого и (41,11) получаем

$$\left| \frac{\sum C_{kp} h_M[(2p-2k)u]}{u^{2p}} \right| = \frac{B(\varepsilon)\, u^{\sigma_3-\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} M^{0,9}\right)}{u^{2p}} + B \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p}. \tag{41,12}$$

Учитывая, что $u = e^{-\sqrt{M}}$, найдем для (41,12) оценку

$$B \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p}. \tag{41,13}$$

Далее, из (41,7)

$$\left| \frac{\sum C_{kp} e_M[(2p-2k)u]}{u^{2p}} \right| = Bu^{\zeta} (\sup \beta_j^{\zeta}) \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p}.$$

Ввиду (35,9)

$$\sup \beta_j^{\zeta} < M^{a_6 \zeta}, \quad u^{\zeta} < e^{-\zeta \sqrt{M}}$$

и получается оценка

$$B \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p}. \tag{41,14}$$

Ввиду этого, (41,9) даст

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2p} ux}{u^{2p}} dV(x) = B \sum_{j=1}^{N} P_j \beta_j^{2p}. \tag{41,15}$$

Рассуждая, далее, как в § 37 и 38, где велись рассуждения с числом $2p = 4$, получаем, что в $[0, u_0]$ существует непрерывная производная $\Psi^{2p}(u)$ и, в частности, $\lim_{u \to 0} \Psi^{2p}(u)$. По лемме IX, в этом случае должно быть $\sigma_3 \geqslant 2p$. Это противоречит (39,2). Тем самым лемма XI, в части утверждения (28,1), относящегося к полюсу s_2, наконец, доказана.

§ 42

Остается доказать вторую часть леммы XI — именно, соотношение (28,2).

Если s_2 отсутствует, то, как явствует из предыдущих рассуждений, существование σ_3 противоречиво, и потому комплексных нулей нет.

Ввиду этого, при $0 \leqslant u \leqslant u_0$ имеем

$$\Psi(u) = P(u^2),$$

где $P(u^2)$ полином четной степени, не большей σ_2. Ввиду четности $\Psi(u)$, находим

$$\Psi(u) = P(u^2) \quad \text{при} \quad |u| \leqslant u_0. \tag{42,1}$$

Если бы равенство (42,1) соблюдалось на всей оси, то согласно уже применявшейся нами теореме [2] было бы $\Psi(u) = Au^2$ и $A \leqslant 0$. Но мы располагаем равенством (42,1) только при $|u| \leqslant u_0$. Докажем теперь лемму, представляющую и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма XII. Пусть характеристическая функция некоторой случайной величины в некоторой окрестности нуля, $-\delta \leqslant u \leqslant \delta$ имеет вид

$$f(u) = e^{P(u)}, \tag{42,2}$$

где $P(u)$ полином. Тогда

$$P(u) = Au^2 + Ciu,$$

где $A \leqslant 0$ и C реальные константы, и равенство (42,2) верно на всей оси.

Доказательство. $f(u)$ имеет все производные при $u = 0$. Так как $f(u)$ есть х. ф.

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x),$$

где $F(x)$ соответствующий закон распределения, то отсюда, как известно, следует существование всех моментов α_n для $F(x)$. При этом $|\alpha_n| = |f^{(n)}(0)|$. Оценим рост $|\alpha_n|$ вместе с n. Имеем: $f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{du^n} e^{P(u)}$ при $u = 0$. $e^{P(u)}$ целая функция и $|P(u)| < K|u|^p$ при $|u| > 1$. Ввиду этого имеем

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{e^{P(u)}}{u^{n+1}} du,$$

где C_R окружность $|u| = R$.

Стало быть, при любом $R > 0$

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^n} e^{KR^p}. \tag{42,3}$$

Выберем здесь $R = n^{\frac{1}{p}}$, тогда при $n \geqslant n_0$, получим

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n! \exp\left(K_n - \frac{n}{2} \ln n^{\frac{1}{p}}\right)}{R^{\frac{n}{2}}} < \frac{n!}{n^{\frac{n}{2p}}}. \tag{42,4}$$

Ввиду этого получим при $m > n_0$

$$\alpha_{2m} < \frac{(2m)!}{(2m)^{\frac{2m}{2p}}} \quad \text{и} \quad \gamma_{2m-1} < \alpha_{2m},$$

где γ_{2m-1} абсолютный $(2m-1)$-й момент. Ввиду этого при любом $r > 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\, dF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, dF(x) = B(r) + B \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{r}{n^{\frac{1}{2p}}}\right) < \infty.$$

Отсюда явствует, что $f(u)$ целая функция, и, поскольку она совпадает при $-\delta \leqslant u \leqslant \delta$ с целой функцией $e^{P(u)}$, то $f(u) = e^{P(u)}$ всюду и, в частности, на всей реальной оси.

По теореме Марцинкевича [2], $f(u)$ в этом случае есть х. ф. нормального закона, так что $P(u) = Au^2 + Ciu$; $A \leqslant 0$, C реально. Если $f(u)$ четна, то $C = 0$. Это дает доказательство второй части леммы XI: если s_2 отсутствует, то имеет место (28,2). Тем самым лемма XI доказана полностью.

§ 43

Мы будем теперь изучать х. ф. вида

$$f(u) = \exp \sum_{\gamma} A_\gamma |u|^\gamma P_\gamma(\ln|u|), \tag{43,1}$$

где γ пробегает конечную систему различных реальных чисел, $A_\gamma \neq 0$ реальные константы, $P_\gamma(\ln|u|)$ полиномы степеней d_γ со старшими коэффициентами $= 1$.

Закон, отвечающий х. ф. (43,1), обозначим $F(x)$. Ввиду того, что $f(u)$ непрерывна и $f(0) = 1$, должно быть $\gamma > 0$. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма XIII. Для всякой х. ф. вида (43,1) можно построить две линейные формы

$$L_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r$$
$$L_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_rx_r$$

с неотрицательными коэффициентами, такие, что

$$\sigma(z) = a_1^z + \ldots + a_r^z - b_1^z - \cdots - b_r^z \not\equiv 0 \tag{43,2}$$

и что $L_1(x) \cong L_2(x)$, когда независимые наблюдения x_i распределены по закону $F(x)$.

Доказательство. По заданной конечной системе чисел γ и d_γ, построим новые числа $e_\gamma = \exp\left(\frac{\ln 3}{\gamma}\right)$ и составим функцию

$$\sigma(z) = \prod_\gamma (e_\gamma^z - 3)^{d_\gamma + 1}. \tag{43,3}$$

Эта функция, очевидно, будет иметь числа γ нулями кратности $d_\gamma + 1$ (остальные ее нули будут комплексными). Раскрывая скобки в выражении (43,2) и разбивая члены с целочисленными коэффициентами на суммы одинаковых членов, получим выражение типа (43,2).

После этого можем составить линейные формы

$L_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r$; $L_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_rx_r$

с неотрицательными коэффициентами.

Х. ф. этих форм будут

$$\prod_{i=1}^{r} f(a_i u) \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{r} f(b_i u). \quad \text{Они} \neq 0.$$

Для доказательства того, что $L_1(x) \cong L_2(x)$, достаточно показать, что частное наших произведений равно 1. Это частное будет иметь вид

$$\exp \sum_\gamma A_\gamma \left(\sum_{i=1}^{r} |u|^\gamma a_i^\gamma \cdot P_\gamma(\ln a_i |u|) \right) - \sum_{i=1}^{r} |u|^\gamma b_i^\gamma \cdot P_\gamma(\ln b_i |u|). \tag{43,4}$$

Далее, $P_\gamma(\ln a_i |u|) = \sum_{m=0}^{d_\gamma} C_m(u) (\ln a_i)^m$. Число γ есть нуль $\sigma(z)$ кратности $d_\gamma + 1$. Ввиду этого при $m \leqslant d_\gamma$ имеем

$$\sigma_m(\gamma) = \sum_{i=1}^{r} a_i^\gamma (\ln a_i)^m - \sum_{i=1}^{r} b_i^\gamma (\ln b_i)^m = 0.$$

Ввиду этого (43,4) равно 1, и $L_1(x) \cong L_2(x)$ ч. т. д.

§ 44

В силу леммы XIII и замечания о единственности разложения в [0,1] в ряды вида, указанного в § 20, к функциям (43,1) будут приложимы все предыдущие результаты. В частности, если σ_1 и σ_2 наименьшее и наибольшее из чисел γ, то $A_{\sigma_1}(-1)^{d_{\sigma_1}+1} > 0$ (впрочем, это очевидно непосредственно). Из леммы X заключаем, что

$$0 < \sigma_1 < 2. \tag{27,1}$$

Мы должны теперь исследовать, при каких условиях функция

$$\exp \sum_{(\gamma)} A_\gamma |u|^\gamma P_\gamma(\ln |u|) \tag{44,1}$$

может быть характеристической функцией. В случае $\sigma_1 < 2$ мы для простоты (и только из этих соображений) разберем только такие выражения (44,1), где $P_\gamma(\ln |u|) \equiv 1$, случай же $\sigma_1 = 2$ придется разобрать полностью.

Перенумеруем числа γ в порядке возрастания

$$\sigma_1=\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_l=\sigma_2. \tag{44,2}$$

Мы докажем теперь теорему IV. Она равносильна утверждению: пусть $\sigma_1<2$, и заданы произвольные реальные числа $\gamma_2, \ldots, \gamma_{(l-1)}, \sigma_2$ под условием (44,2), произвольные реальные числа $A_{\gamma_2}, \ldots, A_{\gamma_{l-1}}$ и произвольное отрицательное число $A_{\sigma_2}<0$; тогда можно подыскать константу $A_0>0$, такую, что при всяком $A_{\sigma_1}<-A_0$

$$\exp\left(A_{\sigma_1}|u|^{\sigma_1}+\sum_{i=2}^{l-1}A_{\gamma_i}|u|^{\gamma_i}+A_{\sigma_2}|u|^{\sigma_2}\right) \tag{44,3}$$

будет характеристической функцией случайной величины.

Доказательство. Обозначим выражение (44,3) через $f(u)$ и составим преобразование Фурье

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}f(u)\,du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}f(u)\,du \tag{44,4}$$

в силу четности $f(u)$. Интеграл абсолютно сходится ввиду

$$A_{\sigma_2}<0.$$

Нам нужно доказать, что $y(x)\geqslant 0$ при всех x, если $|A_{\sigma_1}|$ достаточно велико.

Ввиду четности $f(u)$ интеграл (44,4) можно записать так:

$$y(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{iux}f(u)\,du. \tag{44,5}$$

Ввиду того, что $u\geqslant 0$, в (44,5) можно написать

$$f(u)=\exp\left(-Au^{\sigma_1}+\sum_{j=2}^{l-1}A_{\gamma_j}u^{\gamma_j}-Cu^{\sigma_2}\right), \tag{44,6}$$

где введены обозначения: $-A=A_{\sigma_1}<0$; $-C=A_{\sigma_2}<0$. Считая $f(u)$ положительной при $u\geqslant 0$, замечаем, что ее можно продолжить на комплексную плоскость чисел $w=\varrho e^{i\varphi}$ с разрезом вдоль всей положительной полуоси. Она будет регулярной внутри указанной области и непрерывной вплоть до контура области.

Ввиду этого мы можем доказать, что при $w=u+iv$

$$\int_{0}^{\infty}e^{iux}f(u)\,du=\int_{L_1}e^{iwx}f(w)\,dw+\int_{L_2}e^{iwx}f(w)\,dw, \tag{44,7}$$

где L_1 есть отрезок мнимой оси $u=0$, $0\leqslant v\leqslant \varDelta$; $\varDelta$ любое положительное число, а L_2 — полупрямая $v=\varDelta$, $0\leqslant u<\infty$.

Для доказательства применим теорему Коши к прямоугольному контуру, имеющему две стороны на осях координат и вырез

$$w=\varrho e^{i\varphi},\quad \varrho\to 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Для доказательства (44,7) достаточно обнаружить, что при $u \to \infty$,

$$\int_{v=0}^{\Lambda} e^{i(u+iv)} f(u+iv)\, i\, dv \to 0. \tag{44,8}$$

Полагая $u+iv = Re^{i\varphi}$, видим, что при $0 < v < \Lambda$ и $v \to \infty$, $\varphi \to 0$. Ввиду этого $(u+iv)^{\sigma_2} = R^{\sigma_2} e^{i\varphi\cdot\sigma_2}$ имеет бесконечно малый аргумент, и $\boldsymbol{R}\{(u+iv)^{\sigma_2}\} > \frac{1}{2} R^{\sigma_2}$. Отсюда явствует, что $f(u+iv) \to 0$ равномерно по v и (44,8) имеет оценку

$$\int_{v=0}^{\Lambda} e^{-v} |f(u+iv)|\, dv \to 0.$$

§ 45

Мы доказали (44,7) и будем продолжать доказательство теоремы IV. Для этого с помощью выбора подходящего $\Lambda = \Lambda(x)$ мы сперва найдем асимптотическое выражение для $y(x)$ и докажем, что $y(x) > 0$ при $x \geqslant x_0(A)$. Затем мы покажем, что при достаточно больших A $y(x) > 0$ также при $0 \leqslant x < x_0(A)$. Ввиду четности $y(x)$ теорема будет доказана.

Пусть

$$x > K_0 A^{\frac{1}{\sigma_1} + \eta_0} = K_0 A^{\nu_1 + \eta_0}; \quad A \geqslant 1, \tag{45,1}$$

где через ν_1 обозначено $\frac{1}{\sigma_1}$, а K_0 положительная константа, значение которой будет фиксировано в дальнейшем. Пусть

$$\Lambda(x) = x^{-1} \ln^2 x. \tag{45,2}$$

Имеем

$$I_2 = \int_{L_2} e^{iwx} f(w)\, dw = \int_{u=0}^{\infty} e^{i(u+i\Lambda(x))x} f(u+i\Lambda(x))\, du,$$

откуда

$$|I_2| \leqslant e^{-x\Lambda(x)} \int_0^{\infty} |f(u+i\Lambda(x))|\, du. \tag{45,3}$$

Далее, при $0 \leqslant u \leqslant K_1 \Lambda(x)$ имеем $|f(u+i\Lambda(x))| = \exp BA(\Lambda(x))^{\sigma_1}$, а при $u \geqslant K_1\Lambda(x)$, полагая $u + i\Lambda(x) = Re^{i\varphi}$, видим, что φ сколь угодно мало при достаточно большом K_1, и

$$|f(u+i\Lambda(x))| = \exp\left(-AR^{\sigma_1}\cos\varphi\sigma_1 + \sum_{j=2}^{l-1} A_{\gamma_j} R^{\gamma_j} \cos\varphi\cdot\gamma_j - CR^{\sigma_2}\cos\varphi\cdot\sigma_2\right).$$

При достаточно большом K_1 получится

$$\frac{1}{2} CR^{\sigma_2}\cos\varphi\sigma_2 > \sum_{j=2}^{l-1} A_{\gamma_j} R^{\gamma_j} \cos\varphi\cdot\gamma_j,$$

и

$$|f(u+i\Lambda(x))|\, du = B\Lambda(x) \exp\left(-\frac{1}{2} AR^{\sigma_1} - \frac{1}{4} CR^{\sigma_2}\right).$$

Ввиду этих оценок находим:

$$\int_0^\infty |f(u+i\Lambda(x))|\,du = B\Lambda(x)\exp\left(B A(\Lambda(x))^{\sigma_1}\right). \tag{45,4}$$

Теперь сосчитаем

$$I=\int_{L_1} e^{iwx} f(w)\,dw.$$

При

$$w=iv=ve^{\frac{\pi i}{2}} \tag{45,5}$$

найдем:

$$I_1=\int_{v=0}^{\Lambda(x)} e^{-vx}\exp\left(-Ae^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}v^{\sigma_1}+\sum_{j=2}^{l-1}A_{\gamma_j}e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_j}v^{\gamma_j}-Ce^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}\right)i\,dv. \tag{45,6}$$

В силу условия (45,2) для $\Lambda(x)$ имеем

$$Av^{\sigma_1}\leqslant A(\Lambda(x))^{\sigma_1}=A\frac{\ln^{2\sigma_1}x}{x^{\sigma_1}}\leqslant\frac{\ln^2(K_0A^{\nu_1+\eta_0})}{K_0^{\sigma_1}A^{\eta_0\sigma_1}}. \tag{45,7}$$

Это число сколь угодно мало при достаточно большом (независимо от A) K_0.

Будем считать K_0 столь большим, что сумма абсолютных величин членов в экспоненте (45,6) меньше 1. Тогда получим

$$\exp\left(-Ae^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}v^{\sigma_1}+\sum_{j=2}^{l-1}A_{\gamma_j}e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_j}v^{\gamma_j}-Ce^{\frac{\pi i}{2}\sigma_2}v^{\sigma_2}\right)=$$

$$=1-Ae^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}v^{\sigma_1}+\sum_{j=2}^{l-1}A_{\gamma_j}e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_j}v^{\gamma_j}-Ce^{\frac{\pi i}{2}\sigma_2}v_i^{\sigma_2}+BA^2v^{2\sigma_1}, \tag{45,8}$$

$$I_1=i\int_0^{\Lambda(x)} e^{-vx}(-A)e^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}v^{\sigma_1}\,dv+$$

$$+\sum_{j=2}^{l-1}A_{\gamma_j}ie^{\frac{\pi i}{2}\gamma_j}\int_0^{\Lambda(x)}e^{-vx}\cdot v^{\gamma_j}\,dv-Cie^{\frac{\pi i}{2}\sigma_2}\int_0^{\Lambda(x)}e^{-vx}v^{\sigma_2}\,dv+i\int_0^{\Lambda(x)}e^{-vx}\,dv.$$

При $v\geqslant\Lambda(x)$ $vx\geqslant\ln^2 x$ и

$$\int_{\Lambda(x)}^\infty e^{-vx}v^c\,dv=Be^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}, \tag{45,9}$$

если $c>0$ константа.

Ввиду этого получим

$$I_1=-iAe^{\frac{\pi i}{2}\sigma_1}\int_0^\infty e^{-vx}v^{\sigma_1}\,dv+\sum_{j=2}^{l-1}iA_{\gamma_j}e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_j}\int_0^\infty e^{-vx}v^{\gamma_j}\,dv-$$

$$-i\cdot Ce^{\frac{\pi i}{2}\sigma_2}\int_0^\infty e^{-vx}v^{\sigma_2}\,dv+BA^2\int_0^\infty e^{-vx}v^{2\sigma_1}\,dv+i\int_0^\infty e^{-vx}\,dv+BA^2e^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}. \tag{45,10}$$

Имеем, далее, при $c > 0$

$$\int_0^\infty e^{-vx} v^c\, dv = \frac{1}{x^{c+1}} \Gamma(c+1).$$

Отсюда получим

$$\Re(I_1) = A \sin\frac{\pi}{2}\sigma_1 \frac{\Gamma(\sigma_1+1)}{x^{\sigma_1+1}} - \sum_{j=2}^{l-1} A_{\gamma_j} \sin\frac{\pi}{2}\gamma_j \frac{\Gamma(\gamma_j+1)}{x^{\gamma_j+1}} +$$

$$+ C \sin\frac{\pi}{2}\sigma_2 \frac{\Gamma(\sigma_2+1)}{x^{\sigma_2+1}} + BA^2 \frac{\Gamma(2\sigma_1+1)}{x^{2\sigma_1+1}} + BA^2 e^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}. \qquad (45,11)$$

Остаточный член в (45,2) в силу (45,1) будет иметь вид

$$Be^{-\frac{1}{4}\ln^2 x}, \qquad (45,12)$$

откуда найдем

$$\Re(I_1) > \frac{A}{2} \sin\frac{\pi}{2}\sigma_1 \frac{\Gamma(\sigma_1+1)}{x^{\sigma_1+1}}, \qquad (45,13)$$

если K_0 было фиксировано достаточно большим (независимо от A).

Далее, из (45,3) и (45,4) находим

$$|I_2| \leqslant e^{-\ln^2 x} \cdot BA(x) e^{BA(A(x))\sigma_1} = Be^{-\ln^2 x}. \qquad (45,14)$$

Тогда (45,13), (44,5) и (44,7) дают

$$y(x) > \frac{A}{4\pi} \sin\frac{\pi}{2}\sigma_1 \frac{\Gamma(\sigma_1+1)}{x^{\sigma_1+1}} \qquad (45,15)$$

при $x \geqslant K_0 A^{\nu_1+\gamma_0}$; $A \geqslant 1$; K_0 константа (разумеется, независимая от A).

§ 46

Теперь рассмотрим случай, когда $0 \leqslant x \leqslant K_0 A^{\nu_1+\gamma_0}$. Положим $\xi = xA^{-\nu_1}$, и в (44,5) положим $u = tA^{-\nu_1}$.

Тогда (44,5) превратится в

$$y(x) = \frac{1}{\pi A^{\nu_1}} \Re \int_0^\infty \exp(i\xi t) \cdot \exp\Bigg(-t^{\sigma_1} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{l-1} A_{\gamma_j} \left(\frac{t}{A^{\nu_1}}\right)^{\gamma_j} - C\left(\frac{t}{A^{\nu_1}}\right)^{\sigma_2}\Bigg) dt. \qquad (46,1)$$

Положим $t_1 = \ln^{2\nu_1} A$; тогда

$$y(x) = \frac{1}{\pi A^{\nu_1}} \Re \int_0^{t_1} \exp(i\xi t) \cdot \exp(-t^{\sigma_1}) \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{j=2}^{l-1} A_{\gamma_j} \left(\frac{t}{A^{\nu_1}}\right)^{\gamma_j} - C\left(\frac{t}{A^{\nu_1}}\right)^{\sigma_2}\right) dt + Be^{-\ln^2 A}. \qquad (46,2)$$

Будем считать A столь большим, что при $t \leqslant t_1$ сумма модулей членов третьего экспонента в (46,2) меньше 1. Тогда, разлагая третий экспонент в ряд Маклорена, легко находим

$$y(x) = \frac{1}{\pi A^{\nu_1}} \Re \int_0^{t_1} e^{i\xi t} e^{-t^{\sigma_1}} dt + B \cdot \frac{1}{A^{\nu_1}} A^{-\nu_1\gamma_2}. \qquad (46,3)$$

Или ввиду определения t_1 при достаточно большом A

$$y(x) = \frac{1}{\pi A^{\nu_1}} \Re \int_0^\infty e^{i\xi t} e^{-t^{\sigma_1}} dt + B \cdot \frac{1}{A^{\nu_1}} A^{-\nu_1\gamma_2}. \tag{46,4}$$

§ 47

Остается исследовать интеграл

$$z(\xi) = \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty e^{i\xi t} e^{-t^{\sigma_1}} dt. \tag{47,1}$$

На основании § 44 и 45, полагая $A=1$, видим, что при $\xi \geqslant K_0$ будет

$$z(\xi) > \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2} \sigma_1 \cdot \frac{\Gamma(\sigma_1+1)}{\xi^{\sigma_1+1}}. \tag{47,2}$$

Неотрицательность интеграла (47,1) при всех ξ известна из теории устойчивых законов (Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров [11]), а также может быть изящно обоснована с помощью теории положительно определенных функций на полуметрических пространствах (Ки Фан [12]), но для полноты изложения мы приведем новое доказательство положительности $z(\xi)$ при $\xi \geqslant 0$, а значит, и при всех реальных ξ.

Сперва заметим, что из неотрицательности интеграла $z(\xi)$ при всех реальных ξ следует его положительность на всей реальной оси. Для доказательства сперва рассмотрим случай $1 < \sigma_1 < 2$.

В этом случае $z(\xi)$ вероятностная плотность с х. ф.

$$e^{-|t|^{\sigma_1}} = \varphi(t).$$

Функция $\varphi\left(\frac{t}{2^{\nu_1}}\right) = \exp\left(-\frac{|t|^{\sigma_1}}{2}\right)$ будет также х. ф. с плотностью $2^{\nu_1} \cdot z(2^{\nu_1}\xi) = z_1(\xi)$, причем ввиду равенства $\varphi\left(\frac{t}{2^{\nu_1}}\right)\varphi\left(\frac{t}{2^{\nu_1}}\right) = \varphi(t)$ будет

$$z(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} z_1(\xi-\eta) z_1(\eta)\, d\eta;$$

$z_1(\eta) \geqslant 0$ всюду.

Ввиду непрерывности $z_1(\eta)$ заключаем, что для всех η $z_1(\xi-\eta) z_1(\eta) = 0$, если $z(\xi) = 0$ в какой-либо точке ξ.

Далее, очевидно $z_1(\eta) > \frac{1}{2}$ при $|\eta| < \eta_0$, так что $z_1(\xi-\eta) = 0$ при $|\eta| \leqslant \eta_0$.

Ввиду того, что $\sigma_1 > 1$, из выражения (47,1) явствует, что $z(\xi)$ и $z_1(\xi)$ целые функции, и из такого равенства следовало бы, что $z_1(\xi) \equiv 0$, что невозможно, так как $\int_{-\infty}^{\infty} z_1(\xi)\, d\xi = 1$. Это и доказывает наше утверждение для случая $1 < \sigma_1 < 2$.

В случае $0 < \sigma_1 \leqslant 1$ мы можем применить теорему Г. Полиа [13] о выпуклых функциях. Функция $f(u) = e^{-|u|^{\sigma_1}}$ при $0 < \sigma_1 \leqslant 1$ является четной и при $u > 0$ выпуклой книзу.

В самом деле, имеем при $u > 0$

$$f''(u) = e^{-u^{\sigma_1}}[(\sigma_1 u^{\sigma_1-1})^2 + \sigma_1(1-\sigma_1)u^{\sigma_1-2}] > 0,$$

что доказывает требуемое.

§ 48

Неотрицательность (47,1) при $0 < \sigma_1 \leqslant 2$ выводится из следующей леммы, имеющей и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма XIV. При всяком σ под условиями

$$0 < \sigma \leqslant 2 \tag{48,1}$$

функция

$$f(u) = \frac{1}{1+|u|^\sigma} \tag{48,2}$$

будет характеристической функцией некоторого распределения.

Доказательство. При $\sigma = 2$ получается известная х. ф. для распределения типа χ_2^2. При $0 < \sigma \leqslant 1$ можно применить цитированную выше теорему Г. Полиа [13], ибо при $u > 0$, как легко проверить, $f''(u) > 0$. Остается случай $1 < \sigma < 2$. Для данного случая при любом реальном ξ функция

$$v(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} f(u)\,du$$

четна, и при $\xi \geqslant 0$

$$v(\xi) = \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{i\xi u} f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\Re(M(\xi)), \tag{48,3}$$

где

$$M(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{i\xi u}}{1+u^\sigma}\,du. \tag{48,4}$$

Рассмотрим плоскость комплексного переменного u с разрезом вдоль всей положительной оси. Внутри такой области функция u^σ регулярна и непрерывна вплоть до контура. Далее, функция $\dfrac{1}{1+u^\sigma}$ не имеет особенностей в первом квадранте области, ибо из $u^\sigma = -1$ следует $|u| = 1$; $\arg u = \dfrac{(2k+1)\pi}{\sigma}$, и ввиду того, что $1 < \sigma < 2$, все значения $\arg u$ лежат вне квадранта.

Ввиду того, что $\sigma > 1$, легко заключаем, что контур интегрирования в (48,2) можно повернуть на 90° против часовой стрелки так, что он попадет на мнимую ось.

Тогда получим

$$M(\xi) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi u}\,i\,du}{1+i^\sigma u^\sigma} = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi u}\,i\left(1+e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right)}{\left|1+e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right|^2}\,du,$$

откуда

$$v(\xi)=\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\sigma\cdot\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\xi u}u^\sigma\,du}{\left|1+e^{\frac{\pi i}{2}\sigma}u^\sigma\right|^2}>0.$$

Этим лемма доказана.

§ 49

Из леммы легко следует неотрицательность (47,1). Именно, наряду с $f(u)=\frac{1}{1+|u|^\sigma}$, при любом $N>0$ функция

$$f\left(\frac{u}{N}\right)=\frac{1}{1+|uN^{-1}|^\sigma}$$

также будет х. ф.

Пусть N^σ пробегает натуральные числа n. Тогда функция

$$\left\{f\left(\frac{u}{N}\right)\right\}^n=\left(\frac{1}{1+u^\sigma n^{-1}}\right)^n$$

будет также х. ф. При этом она будет стремиться при всех u к непрерывной функции $e^{-|u|^\sigma}$, которая тоже должна быть характеристической [8].

Этим доказано, что $z(\xi)>0$ во всех исследуемых случаях. В силу очевидной непрерывности $z(\xi)$ имеем $z(\xi)>a_0(K_0)>0$ при $|\xi|\leqslant K_0$.

Тогда (47,2) дает $z(\xi)>\frac{a_1}{(\xi+1)^{\sigma_1+1}}$ при всех $\xi\geqslant 0$.

Возвращаясь к (46,3), находим

$$y(x)>\frac{a_2}{A^{\nu_1}}\frac{1}{(\xi+1)^{\sigma_1+1}}+B\cdot\frac{1}{A^{\nu_1}}A^{-\nu_1\gamma_2}. \tag{49,1}$$

Подставляя значение $\xi=xA^{-\nu_1}$, видим, что при $A>A_0$ $y(x)>\frac{1}{2}\frac{a_2}{A^{\nu_1}}$, если $0<x\leqslant A^{\nu_1}$, и

$$y(x)>\frac{1}{2}a_2\frac{A}{x^{\sigma_1+1}}+\frac{B}{A^{\nu_1}}A^{-\nu_1\gamma_2},$$

если $x>A^{\nu_1}$.

Пусть

$$A^{\nu_1}\leqslant x<K_0A^{\nu_1+\eta_0}.$$

Если η_0 было достаточно мало, что мы будем предполагать, то

$$y(x)>\frac{1}{2}a_2\frac{1}{K_2A^{\nu_1+\eta_0(\sigma_1+1)}}+B\frac{1}{A^{\nu_1}}A^{-\nu_1\gamma_2}>\frac{1}{4}\frac{1}{A^{\nu_1+\eta_0(\sigma_1+1)}}>0. \tag{49,2}$$

В сочетании с (45,15) это доказывает теорему.

§ 50

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы I.

Пусть даны две линейные формы

$$\left.\begin{aligned}L_1(x)&=a_1x_1+\cdots+a_rx_r\\L_2(x)&=b_1x_1+\cdots+b_rx_r\end{aligned}\right\} \tag{1,1}$$

с определяющей функцией

$$\sigma(z)=|a_1|^z+\cdots+|a_r|^z-|b_1|^z-\cdots-|b_r|^z. \qquad (50{,}1)$$

Составим вспомогательные формы

$$\left.\begin{aligned} L_1'(x) &= |a_1|x_1+\cdots+|a_r|x_r \\ L_2'(x) &= |b_1|x_1+\cdots+|b_r|x_r \end{aligned}\right\}. \qquad (50{,}2)$$

Мы знаем, что всякий симметрический закон $\Phi(x)$ распределения x_i, для которого

$$L_1(x) \cong L_2(x), \qquad (50{,}3)$$

будет также удовлетворять условию

$$L_1'(x) \cong L_2'(x). \qquad (50{,}4)$$

Разберем сперва тривиальные случаи „вырождения“ определяющей функции.

Пусть $\sigma(z)\equiv 0$. Тогда формы $L_1'(x)$ и $L_2'(x)$ совпадают для всех законов $\Phi(x)$. Если теперь $\Phi(x)$ любой симметрический закон, то

$$L_1(x)\cong L_1'(x)\equiv L_2'(x)\cong L_2(x)$$

и, таким образом, для любого такого $\Phi(x)$ имеем (50,3).

Другой случай вырождения будет, когда

$$\sigma(z)=c^z;\ c>0. \qquad (50{,}5)$$

В этом случае, если для закона $F(x)$ имеем (50,3), то для симметрического закона $\Phi(x)=F(x)*(1-F(-x))$ имеем $L_1'(x)\cong L_2'(x)$.

Но в силу (50,5) для х. ф. $f(u)$ закона $\Phi(x)$ будем иметь в окрестности 0

$$f(u)=1 \quad (|u|\leqslant u_0).$$

Но тогда она должна быть периодической с периодом u_0, т. е. равной 1 для всех u. Итак, $\Phi(x)=\varepsilon(x)$ — вырожденный закон и таков же $F(x)$.

После исключения тривиальных случаев найдем, что $\sigma(z)$ примет вид

$$\sigma(z)=m_1e^{\lambda_1 z}+m_2e^{\lambda_2 z}+\cdots+m_ne^{\lambda_n z}, \qquad (50{,}6)$$

где m_i целые числа $\neq 0$, положительные и отрицательные, и $\lambda_1<\lambda_2<$ $<\ldots<\lambda_n$ реальные числа.

По известным теоремам теории функций комплексного переменного $\sigma(z)$ будет целой функцией и будет иметь бесконечно много комплексных нулей, распределение которых изучено в § 8 и 9. Что касается реальных нулей $\sigma(z)$, то некоторые сведения о них дает известная теорема Лагерра ([14], стр. 3), представляющая обобщение правила знаков Декарта. Если обозначить через W число перемен знака в последовательности $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и через N число реальных нулей $\sigma(z)$, то $W-N=2k\geqslant 0$, где $2k$ четное число. Если для какого-либо закона $F(x)$ имеем (50,3), то для $\Phi(x)=F(x)*(1-F(-x))$ имеем (50,4). Если $f(u)$ х. ф. $\Phi(x)$, то $f(u)$ четна и при $0\leqslant u\leqslant u_0$ $f(u)\neq 0$, и $\Psi(u)=\ln f(u)$ удовлетворяет соотношениям (20,3) и (20,4) § 20, так что

$$\int^{u}\frac{\Psi(uu_0)}{u}\,du=\sum_{|m|<n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_m}(uu_0)^z\,\frac{E(z)}{z\sigma(z)}\,dz+R_n(u) \qquad (20{,}3)$$

$$R_n(u)=\frac{B(\varepsilon)\,u^{\sigma_1-\varepsilon}}{n\ln|u|};\quad 0<u\leqslant 1. \qquad (20{,}4)$$

Согласно лемме VI абсцисса σ_1 должна быть активным реальным нулем $\sigma(z)$. Стало быть, если реальных нулей у $\sigma(z)$ вообще нет, то нет никаких активных нулей, и $\int\limits_0^u \frac{\Psi(uu_0)}{u}\,du = 0$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Отсюда $\Psi(u) = 0$ при $|u| \leqslant u_0$, $f(u) = 1$, так же, как $\Phi(x)$ и $F(x)$. — несобственные законы.

Ввиду этого будем допускать, что $\sigma(z)$ имеет хоть один реальный нуль; тогда σ_1 будет таковым. По лемме X

$$0 < \sigma_1 \leqslant 2. \tag{27,1}$$

Для доказательства теоремы I нужно тщательно исследовать случай $\sigma_1 = 2$. Мы докажем несколько лемм, аналогичных теореме IV.

§ 51

Лемма XV. Пусть заданы два числа под условием

$$\gamma_2 > \gamma_1 \geqslant 2$$

и полином с реальными коэффициентами степени $n \geqslant 0$

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n;\ a_0 < 0,$$

причем соблюдено следующее условие: если γ_1 есть целое четное число, то $n \geqslant 1$. Тогда при достаточно большом $A > 0$

1) либо можно построить характеристическую функцию вида

$$f_1(u) = \exp\left(-Au^2 - A_1 |u|^{\gamma_1} \ln^m |u|\right), \tag{51,1}$$

где $0 \leqslant m \leqslant n$ целое число и $A_1 > 0$ положительное число,

2) либо

$$f_2(u) = \exp\left(-Au^2 - |u|^{\gamma_1} P(\ln|u|) - u^{\gamma_2}\right), \tag{51,2}$$

будет характеристической функцией.

Доказательство. Составим сперва функцию $f_1(u)$, считая A_1 и m числами любыми, удовлетворяющими указанным выше условиям, и вначале будем действовать, как в § 44.

Положим

$$y_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1(u)\,du;$$

ясно видно, что интеграл абсолютно сходится и что

$$y_1(x) = \frac{1}{\pi}\Re\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_1(u)\,du. \tag{51,3}$$

Записывая при $u > 0$

$$f_1(u) = \exp\left(-Au^2 - A_1 u^{\gamma_1} \ln^m u\right) \tag{51,4}$$

замечаем, что $f_1(u)$ регулярна в плоскости $w = u + iv$ с разрезом вдоль всей положительной оси и непрерывна вплоть до разреза. Учитывая, что $\ln w = \ln|w| + i\arg\frac{v}{u}$, докажем, как в § 44, что при любом $\Lambda = \Lambda(x) > 0$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{iux} f_1(u)\,du = \int\limits_{L_1} e^{iwx} f_1(w)\,dw + \int\limits_{L_2} e^{iwx} f_1(w)\,dw,$$

где L_1 и L_2 те же контуры, что и в § 44.

Полагая $\sigma_1 = 2$; $\nu_1 = \frac{1}{2}$; $x \geqslant K_0 A^{\frac{1}{2}+\eta_0}$; $\varDelta(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, найдем соответственно (45,3) и (45,14)

$$|I_2| = Be^{-\ln^2 x}. \tag{51,5}$$

Будем, далее, вычислять

$$I_1 = \int_{L_1} e^{iwx} f_1(w)\, dw =$$

$$= \int_{v=0}^{\varDelta(x)} e^{-vx} \exp\left(Av^2 - A_1 e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m\right) dv. \tag{51,6}$$

При K_0 достаточно большом, независимо от A, будет

$$Av^2 < A\frac{\ln^4 x}{x^2} < \frac{\ln^4\left(K_0 A^{\frac{1}{2}+\eta_0}\right)}{K_0^2 A^{2\eta_0}} < \frac{1}{4}$$

$\left| v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m \right| < v^{\frac{\gamma_1}{2}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ при наших значениях x. Ввиду этого подинтегральную функцию в (51,6) можно переписать

$$ie^{-vx} e^{Av^2}\left(1 - A_1 e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m + Bv^{2\gamma_1}\ln^{2m} v\right).$$

Реальная часть этой функции будет

$$\Re e^{-vx} i\left(-A_1 e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m -\right.$$

$$\left. - A_1 A e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} v^{\gamma_1+2}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m + BA^2 v^{2\gamma_1+2}\ln^{2m} v\right). \tag{51,7}$$

Имеем, далее, при $c > 0$, $\mu > 0$ целом

$$\int_0^\infty e^{-vx} v^c \ln^\mu v\, dv = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{x}\right)^c (\ln t - \ln x)^\mu \frac{dt}{x} =$$

$$= \frac{1}{x^{c+1}}(-\ln x)^\mu \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^c\, dt + \frac{B(\ln x)^{\mu-1}}{x^{c+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(c+1)}{x^{c+1}}(-\ln x)^\mu + B\frac{(\ln x)^{\mu-1}}{x^{c+1}}. \tag{51,8}$$

Подставляя это в (51,7) и учитывая, что интегрирование (51,7) от $\varDelta(x)$ до ∞ дает член $Be^{-\ln^2 x}$, найдем

$$\Re(I_1) = \Re\left(-iA_1 e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1}\int_0^\infty e^{-vx} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m dv +\right.$$

$$\left. + BA\frac{(\ln x)^m}{x^{\gamma_1+3}} + BA^2\frac{(\ln x)^{2m}}{x^{2\gamma_1+3}}\right). \tag{51,9}$$

При указанных значениях x последние два члена дают

$$B\frac{A}{x^2}\frac{(\ln x)^m}{x^{\gamma_1+3}}, \tag{51,10}$$

где $\frac{A}{x^2}<1$.

Займемся первым членом (51,9)

$$\Re\left(-iA_1e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1}\cdot\int_0^\infty e^{-vx}\cdot v^{\gamma_1}\cdot\left(\ln v+\frac{\pi i}{2}\right)^m dv\right)=T(x). \tag{51,11}$$

Пусть имеем сперва: γ_1 не есть целое четное число и $\left[\frac{\gamma_1}{2}\right]$ четно. Тогда в выражении (51,1) для $f_1(u)$ положим $m=0$ и получим $\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1>0$.

$$T(x)=A_1\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1\cdot\frac{\Gamma(\gamma_1+1)}{x^{\gamma_1+1}},$$

и в силу вышеизложенных оценок

$$y_1(x)>\frac{A_1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1\frac{1}{x^{\gamma_1+1}} \tag{51,12}$$

при

$$x\geqslant K_0A^{\frac{1}{2}+\eta_0}. \tag{51,13}$$

Далее мы сможем показать, как это было сделано в § 46, что $y_1(x)>0$ и при $0\leqslant x<K_0A^{\frac{1}{2}+\eta_0}$, если A достаточно велико.

Пусть теперь γ_1 не есть целое четное число и $\left[\frac{\gamma_1}{2}\right]$ нечетно. Если при этом степень полинома $P(z)$ n была $\geqslant 1$, то полагаем $m=1$, $A_1=1$, тогда (51,11) дает ввиду (51,8)

$$T(x)=\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1\left(-\frac{\Gamma(\gamma_1+1)}{x^{\gamma_1+1}}\ln x\right)+\frac{B}{x^{\gamma_1+1}},$$

причем

$$-\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1=\left|\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1\right|>0.$$

В условиях (51,13) получим $y_1(x)>0$. Если при тех же условиях степень $n=0$, то $P(z)=a_0<0$, и в этом случае мы будем составлять функцию (51,2), которая примет вид

$$f_2(u)=\exp\left(-Au^2-a_0|u|^{\gamma_1}-u^{\gamma_2}\right).$$

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, покажем, что при

$$x\geqslant K_0A^{\frac{1}{2}+\eta_0} \tag{51,13}$$

$$y_2(x)=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{iux}f_2(u)\,du>\frac{\left|a_0\sin\frac{\pi}{2}\gamma_1\right|}{2}\frac{1}{x^{\gamma_1+1}}. \tag{51,14}$$

§ 52

Перейдем теперь к случаю, когда γ_1 целое четное число. По условию должно быть $n \geqslant 1$.

Будем различать случаи: $\gamma_1 \equiv 0 \pmod 4$ и $\gamma_1 \equiv 2 \pmod 4$. В случае $\gamma_1 \equiv 0 \pmod 4$, обращаясь к (51,9) и (51,10), получим $e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} = 1$ при $A_1 = 1$ и с учетом (51,8)

$$T(x) = \Re\left(-i\int_0^\infty e^{-vx} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m dv = \right.$$

$$= \frac{\pi m}{2}\,\frac{\Gamma(\gamma_1 + 1)\,(-\ln x)^{m-1}}{x^{\gamma_1+1}} + \frac{B(\ln x)^{m-2}}{x^{\gamma_1+1}}. \tag{52,1}$$

При m нечетном $T(x)$ будет положительным и будет

$$y_2(x) > \frac{\pi m}{4}\,\frac{\Gamma(\gamma_1+1)\,(\ln x)^{m-1}}{x^{\gamma_1+1}}. \tag{52,2}$$

Мы можем взять $m = 1$.

Пусть, наконец, $\gamma_1 \equiv 2 \pmod 4$. Тогда $e^{\frac{\pi i}{2}\gamma_1} = -1$ и

$$T(x) = \Re\left(i\int_0^\infty e^{-vx} v^{\gamma_1}\left(\ln v + \frac{\pi i}{2}\right)^m dv\right) =$$

$$= -\frac{\pi m}{2}\,\frac{\Gamma(\gamma_1+1)}{x^{\gamma_1+1}}(-\ln x)^{m-1} + \frac{B(\ln x)^{m-2}}{x^{\gamma_1+1}}. \tag{52,3}$$

Если целое число $m = 2$, то

$$y_2(x) > \frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma(\gamma_1+1)}{x^{\gamma_1+1}}\ln x. \tag{52,4}$$

Если же $n = 1$ и нельзя положить $m = 2$, то

$$P(\ln|u|) = a_0 \ln|u| + a_1; \quad a_0 < 0.$$

В этом случае составим функцию (51,2) в виде

$$f_2(u) = \exp\left(-Au^2 - |u|^{\gamma_1}(a_0\ln|u| + a_1) - |u|^{\gamma_2}\right). \tag{52,5}$$

Ввиду (52,3) получим

$$y_2(x) > \frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma(\gamma_1+1)}{x^{\gamma_1+1}}.$$

Для доказательства леммы XV теперь остается показать, что во всех тех случаях, когда мы показали, что $y_j(x) > 0$ $(j = 1,\ 2)$ при $0 \leqslant x < K_0 A^{\frac{1}{2}+\eta_0}$, будем иметь $y_j(x) > 0$ при

$$0 \leqslant x < K_0 A^{\frac{1}{2}+\eta_0}. \tag{52,6}$$

Для этого рассмотрим

$$y_j(x) = \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{iux} f_j(u)\,du \tag{52,7}$$

в условиях (52,6). При этом $f_j(u)$ выбрано соответственно предыдущему, так что

$$f_j(u)=\exp\left(-Au^2\pm|u|^{\gamma_1}Q(\ln|u|)-b|u|^{\gamma_2}\right), \tag{52,8}$$

где $Q(\ln|u|)$ — полином степени $\leqslant n$ и $b=0$ или 1. Рассмотрим

$$y_j(x)=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{iux}f(u)\,du$$

и положим

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{A}};\quad u=\frac{t}{\sqrt{A}}.$$

Тогда

$$y_j(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{A}}\Re\int_0^\infty e^{i\xi t}\exp\left(-t^2+\left(\frac{t}{\sqrt{A}}\right)^{\gamma_1}P\left(\ln\left|\frac{t}{\sqrt{A}}\right|\right)-b\left|\frac{t}{\sqrt{A}}\right|^{\gamma_2}\right)dt.$$

В силу предыдущего такая подстановка дает нам (роль A играет 1)

$$y_j(x)>0 \text{ при } \xi>K_0. \tag{52,9}$$

Полагая, как и в § 46, $t_1=\ln^{2\nu_1}A=\ln A$, находим

$$y_j(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{A}}\Re\int_0^{t_1}e^{i\xi t}e^{-t^2}dt+\frac{B}{\sqrt{A}}A^{-\frac{\gamma_1}{2}}\ln^n A$$

или

$$y_j(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{A}}\Re\int_0^\infty e^{i\xi t}e^{-t^2}dt+\frac{B}{\sqrt{A}}A^{-\frac{\gamma_1}{2}}\ln^n A=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi A}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}+\frac{B}{\sqrt{A}}A^{-\frac{\gamma_1}{2}}\ln^n A. \tag{52,10}$$

При $\xi<K_0$ и достаточно большом A $y_j(x)>0$. Этим лемма XV полностью доказана.

§ 53

Будем продолжать доказательство теоремы I. Если наблюдения x_i принадлежат к нормальному типу, то ввиду условий

1) $a_1+a_2+\cdots+a_r=b_1+b_2+\cdots+b_r$,
2) $\sigma(2)=0$

ясно, что $L_1(x)$ и $L_2(x)$ нормальны и $L_1(x)\simeq L_2(x)$. Обратно, пусть выполнены условия 1) — 5). Пусть для какого-либо собственного закона $F(x)$ распределения x_i имеем $L_1(x)\simeq L_2(x)$. Ввиду условия

$$\sup(|a_1|,\ldots,|a_r|)\neq\sup(|b_1|,\ldots,|b_r|)$$

получим: если $f_1(u)$ х. ф. распределения $F(x)$, и

$$f(u)=f_1(u)f_1(-u)=|f_1(u)|^2 \text{ х. ф. для } F(x)*(1-F(-x)),$$

и если $\Psi(u) = \ln f(u)$, то для любых $u > 0$

$$\int_0^u \frac{\Psi(u)}{u} du = S_1(u) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{L_m} u^z \frac{E(z)\,dz}{z\sigma(z)}, \tag{53,1}$$

где $S_1(u)$ сумма вычетов в реальных активных нулях $\sigma(z)$, и ряд сходится равномерно в любом сегменте оси $[0, \infty)$. Если 1) — 5) выполнены, то мы должны показать, что

$$\Psi(u) = -A_0 u^2; \quad A_0 > 0.$$

Разберем сперва случай, когда все реальные полюсы $\dfrac{E(z)}{\sigma(z)}$ суть простые полюсы в целых четных точках $2k > 0$. Тогда лемма XI сразу дает: активных комплексных нулей нет, и

$$\Psi(u) = Au^2; \; A < 0.$$

Стало быть, $f(u)$ х. ф. нормального закона и по известной теореме Г. Крамера [8] $F(x)$ тоже нормален. Имеем $\sigma_1 = 2$; по лемме VII должно существовать $\sigma_2 \geqslant \sigma_1 = 2$, и в сумме $S_1(u)$ в (53,1) член $u^{\sigma_2} P(\ln|u|)$ должен иметь отрицательный старший коэффициент.

Докажем, что в формуле (53,1) отсутствуют активные комплексные нули, т. е. исчезают все интегральные члены. Ввиду доказанного выше, можно считать, что есть полюс, который не будет одновременно простым и целым четным числом. Пусть сперва все реальные полюсы простые. Тогда этот полюс не есть целое четное число. По условиям 1) — 5) это есть $\gamma = \sigma_2$ и $\left[\dfrac{\gamma}{2}\right]$ нечетно. Тогда получим из (53,1)

$$\int_0^u \frac{\Psi(u)}{u} du = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m} - a_0 u^\gamma + \frac{1}{2\pi i} \sum_m{}' \oint_{L_m} u^z \frac{E(z)\,dz}{z\sigma(z)}. \tag{53,2}$$

Докажем, что интегральные члены исчезают. Пусть $2r$ какое-либо четное число $> \gamma$. Из доказательства леммы XV явствует, что функция вида $\exp(-Au^2 - A_1|u|^\gamma)$; $A_1 > 0$ не может быть х. ф. и что функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 + a_0\gamma|u|^\gamma - u^{2r}) \tag{53,3}$$

при достаточно большом A, и $a_0 > 0$ (что соблюдено) будет характеристической. Ввиду этого $\exp(\Psi(u) + \ln\varphi(u))$ тоже х. ф., и

$$\int_0^u \frac{\Psi(u) + \ln\varphi(u)}{u} du = -Au^2 + \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m} - a_0 u^\gamma + a_0 u^\gamma - u^{2r} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_m{}' \oint_{L_m} u^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)} dz = -Au^2 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m} - u^{2r} + \frac{1}{2\pi i} \sum_m{}' \oint_{L_m} \frac{E(z)}{z\sigma(z)} dz.$$

По лемме XI тотчас же заключаем: интегральные члены должны исчезать, и $\ln\varphi(u) + \Psi(u) = -A_0 u^2$, так что по теореме Г. Крамера [8] $F(x)$ нормален.

Допустим, что не все реальные полюсы простые. Тогда в силу условий 1) — 5) полюс, о котором шла речь выше, есть четное число $\equiv 2 \pmod 4$ и имеет кратность 2. Он расположен в точке σ_2 и в $S_1(u)$ вносит член $-u^{4k+2}(a_0 \ln u + a_1)$; $a_0 > 0$. Из доказательства леммы XV явствует, что функция

$$\exp(-Au^2 - u^{4k+2}(b_0 \ln|u| + b_1))$$

при $b_0 > 0$ не может быть х. ф. и что функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 + u^{4k+2}(a_0 \ln|u| + a_0 + (4k+2)) - u^{4k+4})$$

будет х. ф. при большом A. Тогда и $\exp(\psi(u) + \ln\varphi(u))$ будет х. ф., и в разложении $\int\limits_0^u \frac{\Psi(u) + \ln\varphi(u)}{u} du$ отсутствует член с u^{4k+2}, так что

$$\int\limits_0^u \frac{\Psi(u) + \ln\varphi(u)}{u} du = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m u^{2m} - u^{4k+4} + \sum_m{}' \oint\limits_{L_m} u^z \frac{E(z)}{z\sigma(z)} dz. \quad (54,1)$$

По лемме XI интегральные члены исчезают

$$\ln\varphi(u) + \Psi(u) = -Au^2$$

и по теореме Г. Крамера [8] $F(x)$ нормальный закон. Таким образом, мы доказали, что условия 1) — 5) достаточны, чтобы утверждения (A) и (B) были эквивалентными.

Докажем, что они и необходимы, т. е. что при нарушении хотя бы одного из них (A) и (B) становятся неэквивалентными.

Если нарушено одно из условий, 1) или 2), то, очевидно, из (A) не следует (B). Итак, 1) и 2) необходимы для эквивалентности (A) и (B), так что 2 — корень $\sigma(z)$.

Условие 3) также необходимо. В самом деле, пусть 3) нарушено. Тогда есть двукратный корень $\sigma(z)$ вида $s = 4k$; k целое. Для него имеем

$$\sigma(s) = |a_1|^s + \cdots + |a_r|^s - |b_1|^s - \cdots - |b_r|^s = 0$$

$$\sigma'(s) = |a_1|^s \ln|a_1| + \cdots + |a_r|^s \ln|a_r| - |b_1|^s \ln|b_1| - \cdots - |b_r|^s \ln|b_r| = 0.$$

Из доказательства леммы XV явствует, что при $A > A_0 > 0$ функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 - u^{4k} \ln|u|)$$

будет х. ф. некоторого симметрического закона $\Phi(x)$. Для этого закона распределения x_i имеем

$$L_1(x) \simeq L_1'(x) \simeq L_2'(x) \simeq L_2(x).$$

Значит, из (B) не следует (A). Пусть теперь нарушается 4). Тогда либо $\sigma(z)$ имеет трехкратный корень $s = 4k + 2 \geqslant 2$ (k целое), либо есть двукратный корень $s = 4k + 2$, который не является максимальным из положительных корней, так что есть корень

$$\sigma > s = 4k + 2.$$

Рассмотрим первый случай. Как явствует из доказательства леммы XV, функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 - |u|^{4k+2} \ln^2 |u|) \text{ при } A > A_0$$

будет х. ф. симметрического закона $\Phi(x)$, для которого будем иметь $L_1(x) \cong L_2(x)$, так что из (B) не следует (A). Возьмем теперь второй случай: $s = 4k + 2$ двукратный корень, и $\sigma > s; \sigma(\sigma) = 0$. Из доказательства леммы XV явствует, что функция $\exp(-Au^2 - u^{4k+2} \ln |u|)$ не может быть х. ф. и что функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 + u^{4k+2} \ln |u| - u^\sigma)$$

будет х. ф. для симметрического закона $\Phi(x)$, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$. Значит, 4) необходимо.

Пусть нарушено 5). Имеются четыре возможности:

I) $\sigma(z)$ имеет положительный корень γ, не равный целому четному числу, и $\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ четно. Из доказательства леммы XV усматриваем, что функция

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 - |u|^\gamma)$$

при $A > A_0$ будет х. ф. симметрического закона $\Phi(x)$, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$, так что из (B) не следует (A).

II) $\left\{\frac{\gamma}{2}\right\} \neq 0$ ($\{\}$ знак дробной части), $\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ нечетна, но γ не единственный такой корень, так что есть $\gamma_1 > \gamma$ с $\left\{\frac{\gamma_1}{2}\right\} \neq 0$; $\left[\frac{\gamma_1}{2}\right]$ нечетно. Тогда из доказательства леммы XV усматриваем, что $\exp(-Au^2 - A_1 |u|^\gamma)$ при $A_1 > 0$ не может быть х. ф. и что $\varphi(u) = \exp(-Au^2 + |u|^\gamma - |u|^{\gamma_1})$ при $A > A_0$ будет х. ф. симметрического закона $\Phi(x)$, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$ и из (B) не следует (A).

III) Корень γ со свойствами, указанными в II), единственный, но не простой.

Из доказательства леммы XV видим, что

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 - |u|^\gamma \ln |u|)$$

при $A > A_0$ будет х. ф. симметрического закона $\Phi(x)$, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$, и из (B) не следует (A).

IV) Указанный корень γ единственный, простой, но не максимальный из положительных корней, так что есть корень $\sigma > \gamma$. В этом случае действуем, как в II): из доказательства леммы XV следует, что

$$\varphi(u) = \exp(-Au^2 + |u|^\gamma - |u|^\sigma)$$

при $A > A_0$ есть х. ф. симметрического закона $\Phi(x)$, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$, и из (B) не следует (A). Этим доказана необходимость условий 1) — 5) и тем самым теорема I.

§ 55

Займемся здесь дополнением к теореме II′ § 2. Пусть задано целое число $2m > 0$. Покажем, что можно построить такие линейные статистики $L_1(x)$ и $L_2(x)$, для которых определяющая функция $\sigma(z) \neq 0$ и существует симметрический закон $\Phi(x)$, имеющий $2m$ моментов, но не имеющий $(2m + 4)$-го момента, для которого $L_1(x) \cong L_2(x)$. Разумеется, $\Phi(x)$ не совпадает с нормальным законом (который имеет все моменты).

Для такого построения, соответственно доказательству леммы XV, § 51—52, замечаем, что функция

$$\varphi(u) = \exp\left(-Au^2 - u^4 - u^6 - \cdots - u^{2m} - |u|^\gamma\right) \tag{55,1}$$

будет характеристической, если $\gamma > 2m$ не есть целое четное число, $\left[\frac{\gamma}{2}\right]$ четно и $A > 0$ достаточно велико. В качестве такого числа γ выберем

$$\gamma = 2m + \frac{1}{2}, \quad \text{если } m \text{ четно},$$

$$\gamma = 2m + 2 + \frac{1}{2}, \quad \text{если } m \text{ нечетно}.$$

Тогда, при $A > A_0$, $\varphi(u)$ будет х. ф. для некоторого симметрического закона $\Phi(x)$

Далее, очевидно, существует $\varphi^{(2m)}(0)$, и не существует $\varphi^{(2m+4)}(0)$, ибо $\gamma < 2m + 4$. Ввиду этого имеем $\alpha_{2m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2m} d\Phi(x) < \infty$; $\alpha_{2m+4} = \infty$.

Разумеется, $\Phi(x)$ не нормальный закон (что сразу видно из (55,1)).

По лемме XIII § 43, для нашей х. ф. (55,1) можно построить две линейные статистики

$$L_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r; \quad L_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_rx_r$$

с неотрицательными коэффициентами и определяющей функцией $\sigma(z) \neq 0$, такие, что $L_1(x) \cong L_2(x)$, если наблюдения распределены по закону $\Phi(x)$.

Это и доставляет желаемое дополнение к теореме II′.

§ 56

Займемся здесь доказательством теоремы III § 2.

Пусть нам заданы числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ под условием

$$0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_l \leqslant 2. \tag{56,1}$$

Мы будем строить четверку линейных статистик $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, $L_4(x)$, таких, что если для симметрического закона $\Phi(x)$ распределения наблюдений x_i $L_1(x) \cong L_2(x)$ и $L_3(x) \cong L_4(x)$, то х. ф. закона $\Phi(x)$ имеет вид

$$f(u) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{l} A_{\gamma_j} |u|^{\gamma_j}\right). \tag{56,2}$$

Мы будем строить линейные статистики по образцу доказательства леммы XIII § 43.

Возьмем два целых взаимно простых положительных числа g_1 и $g_2 \geqslant 3$ и составим две целые функции

$$\sigma_\nu(z) = \prod_{j=1}^{l} \left[\exp\left(\frac{\ln g_\nu}{\gamma_j} z\right) - g_\nu\right]; \quad \nu = 1, 2. \tag{56,3}$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ будут, очевидно, общими простыми нулями $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$. Иных общих нулей не существует. В самом деле, остальные нули $\sigma_\nu(z)$ имеют вид $\varrho = \gamma_j + \frac{2\pi i m}{\ln g_\nu}\gamma_j$, где $m \neq 0$ целое. Если бы два такие нуля у $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ совпали, то получилось бы

$$\gamma_j + \frac{2\pi i m}{\ln g_1}\gamma_j = \gamma_k + \frac{2\pi i n}{\ln g_2}\gamma_k,$$

откуда

$$\gamma_j = \gamma_k \text{ и } \frac{\ln g_2}{\ln g_1} = \frac{n}{m}, \text{ или } g_1^{\frac{n}{m}} = g_2; \ g_1^n = g_2^m,$$

что невозможно, так как g_1 и g_2 взаимно простые. Итак, совместными нулями $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ являются лишь реальные нули $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$.

Подобно тому как в доказательстве леммы XIII § 43 замечаем, что, разворачивая скобки в (56,3) и разбивая члены с целочисленными коэффициентами на суммы одинаковых членов, получим

$$\sigma_1(z) = a_1^z + \cdots + a_r^z - b_1^z - \cdots - b_r^z$$
$$\sigma_2(z) = c_1^z + \cdots + c_r^z - d_1^z - \cdots - d_r^z,$$

где числа a_i, b_i, c_i, d_i положительны.

Условимся, что в этих равенствах уже произведены все возможные попарные сокращения чисел a_i и b_i; c_i и d_i. Полного сокращения быть не может, ибо $\sigma_\nu(z) \not\equiv 0$. Тогда получим

$$\sup(a_1, \ldots, a_r) \neq \sup(b_1, \ldots, b_r), \tag{56,4}$$
$$\sup(c_1, \ldots, c_r) \neq \sup(d_1, \ldots, d_r). \tag{56,5}$$

Введем линейные статистики:

$$L_1(x) = a_1x_1 + \cdots + a_rx_r,$$
$$L_2(x) = b_1x_1 + \cdots + b_rx_r,$$
$$L_3(x) = c_1x_1 + \cdots + c_rx_r,$$
$$L_4(x) = d_1x_1 + \cdots + d_rx_r.$$

Мы видим, следуя доказательству леммы XIII § 43, что для всякого симметрического закона $\Phi(x)$ с х. ф. вида (56,2) и, в частности, для композиции соответствующих γ_i симметрических устойчивых законов, получим

$$L_1(x) \cong L_2(x); \quad L_3(x) \cong L_4(x).$$

Обратно, пусть для какого-либо симметрического закона с х. ф. $f(u)$ имеем

$$L_1(x) \cong L_2(x); \quad L_3(x) \cong L_4(x).$$

Применяя теорему V, имеем, полагая $\Psi(u) = \ln|f(u)|^2 = 2\ln f(u)$, при $u \geqslant 0$

$$\int_0^u \frac{\Psi(u)}{u}\,du = \sum_{j=1}^{l} A_{\gamma_j}^{(\nu)} u^{\gamma_j} + \sum_{m=0}^{\infty} S_m^{(\nu)}(u), \tag{56,6}$$

где $\nu = 1, 2$, и вторые суммы идут по комплексным нулям $\sigma_\nu(z)$ с положительной мнимой частью. Но такие нули у $\sigma_\nu(z)$ не совпадают, и потому, в силу единственности разложений (56,6) (см. § 20), вторые суммы пустые, и

$$A_{\gamma_j}^{(1)} = A_{\gamma_j}^{(2)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Отсюда $\Psi(u) = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j A_{\gamma_j}^{(1)} u^{\gamma_j}$ при $u \geqslant 0$, и ввиду четности $f(u) = e^{\frac{1}{2}\Psi(u)}$

$$f(u) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{l} A_{\gamma_j} |u|^{\gamma_j}\right), \quad \text{где} \quad -A_{\gamma_j} = \frac{1}{2}\gamma_j A_{\gamma_j}^{(1)}.$$

Это и доказывает теорему III.

Практическое построение четверок линейных статистик для применения к критериям согласия (см. разд. II) выгоднее производить иным способом, так как при описанном способе число r, имеющее порядок 2^l, слишком быстро растет с числом параметров l.

§ 57

Обратимся к теореме V′. Представление (2,2) при $0 \leqslant u \leqslant u_0$ обосновывается в § 1—20. Приведем пример, показывающий, что при $u > u_0$ и $u < u_0$, в условиях теоремы V′, х. ф. $f(u)$ может быть любой невогнутой книзу функцией.

Пусть γ число с условием

$$0 < \gamma < 1. \tag{57,1}$$

Согласно доказательству теоремы III (§ 55) можно построить две линейные статистики

$$L_1(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r \text{ и } L_2(x) = b_1 x_1 + \cdots + b_r x_r$$

с условием $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ и $\sigma(z) = a_1^z + \cdots + a_r^z - b_1^z - \cdots - b_r^z$ имеет один, и только один, реальный корень γ.

Для устойчивого симметрического закона $\Phi(x)$ с х. ф. $f(u) = e^{-|u|^\gamma}$ будем иметь $L_1(x) \cong L_2(x)$. В $u_0 = 1$, имеем $f(u_0) = f(1) = e^{-1} = v_0$;

$$f'(u_0) = -\gamma e^{-1} = v_0'.$$

Проведем касательную к кривой $y = f(u)$ в точке (u_0, v_0): $y - v_0 = v_0'(u-1)$. Ввиду того, что $v_0' < 0$, она пересечет ось абсцисс в точке u_1. Далее, при $0 \leqslant u < 1$ имеем в силу условия (57,1) $f''(u) > 0$. Составим теперь четную функцию $f_1(u)$, которая при $u \geqslant 0$ определяется так:

$$\begin{aligned} &f_1(u) = f(u) \text{ при } u_0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ &f_1(u) = v_0 + v_0'(u-1) \text{ при } u_0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ &f_1(u) = 0 \text{ при } u \geqslant u_1. \end{aligned}$$

Мы получим кусочно гладкую симметричную кривую, не вогнутую книзу и с ординатой в 0, равной 1. По теореме Г. Полиа [13], она будет х. ф. для некоторого распределения $\Phi_1(x)$.

Мы ввели формы $L_1(x)$ и $L_2(x)$. Положим теперь sup $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r) = a$, и

$$L_3(x) = \frac{L_1(x)}{au_1} + x_{r+1}; \quad L_4(x) = \frac{L_2(x)}{au_1} + x_{r+1}.$$

Покажем, что для закона $\Phi_1(x)$ с х. ф. $f_1(u)$ будет $L_3(x) \cong L_4(x)$, чем будет закончен пример, нужный для теоремы V′ (заметим, что для форм $L_3(x)$ и $L_4(x)$ точные верхние грани коэффициентов совпадают).

Имеем: х. ф. $L_3(x)$ имеет вид

$$f_1(u)\prod_{j=1}^{r} f_1\left(\frac{a_j u}{a u_1}\right) = \varphi(u)$$

и х. ф. для $L_4(x)$ имеет вид:

$$f_1(u)\prod_{j=1}^{r} f_1\left(\frac{b_j u}{a u_1}\right) = \psi(u).$$

При $u \geqslant u_1$ имеем $\psi(u) = \varphi(u) = 0$. При $0 \leqslant u < u_1$ имеем $\frac{a_j u}{a u_1} < 1 = u_0$; $\frac{b_j u}{a u_1} < 1 = u_0$, и

$$\varphi(u) = f_1(u)\prod_{j=1}^{r} f\left(\frac{a_j u}{a u_1}\right) = f_1(u)\exp\left(-\frac{a_1{}^{\gamma} + \ldots + a_r{}^{\gamma}}{a^{\gamma} u_1{}^{\gamma}}\, u^{\gamma}\right) =$$

$$= f_1(u)\cdot\exp\left(-\frac{b_1{}^{\gamma} + \ldots + b_r{}^{\gamma}}{a^{\gamma} u_1{}^{\gamma}}\, u^{\gamma}\right) = \psi(u).$$

Отсюда $L_3(x) \simeq L_4(x)$ при x_i, распределенных по закону $\Phi_1(x)$.

При этом вместо касательной к кривой $y = f(u)$ можно было взять кусок любой выпуклой книзу кривой до ее пересечения с осью абсцисс.

II

Статистические критерии

§ 58

Теоремы I—III раздела I могут служить для построения новых статистических критериев. Мы начнем с вопроса о критерии нормальности типа.

Пусть дана повторная выборка объема N

$$x_1, x_2, \ldots, x_N. \tag{58,1}$$

Мы хотим испытать гипотезу H_0 о том, что это — выборка из нормальной генеральной совокупности с параметрами a, σ, которую мы будем обозначать $N(a, \sigma)$.

Если параметры a и σ известны, так что гипотеза H_0 простая, то можно применить известный критерий А. Н. Колмогорова или χ^2 — критерий для выяснения согласия H_0 с выборкой (58,1). При этом надо иметь в виду, что оба эти критерия имеют асимптотический характер и что применение χ^2 всегда вносит некоторую неопределенность в связи с возможностью различных группировок наблюдений.

Если же, как и бывает в подавляющем большинстве случаев, параметры a и σ неизвестны и их заменяют статистиками с помощью выборки (58,1) (обычно a и σ заменяют статистиками x и s), то действие χ^2 и асимптотический характер расчета соответствующего распределения, вообще говоря, ухудшаются.

Некоторые авторы (В. И. Романовский [15], А. М. Длин, А. К. Кутай [16] и др.) применяют для испытания H_0 следующее видоизменение критерия А. Н. Колмогорова.

Рассматривается

$$\lambda = \sqrt{N} \sup_x | S_n(x) - \sigma(x, \bar{x}, s) |, \tag{58,2}$$

где

$$\sigma(x, \bar{x}, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}} \cdot dx$$

и $S_n(x)$ кумулятивная кривая выборки (58,1), и критическая зона для H_0 выбирается исходя из предположения, что при больших n для λ имеет место распределение А. Н. Колмогорова

$$P(\lambda < z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Это предположение при ближайшем рассмотрении оказывается необоснованным, и эксперименты с таблицей случайных чисел указывают на возможность значительных расхождений [17].

Асимптотическое распределение статистики типа (58,2) зависит от типа закона распределения генеральной совокупности и для случая (58,2) должно быть специально рассчитано.

Теоремы I, II и III раздела I могут быть употреблены для построения критерия согласия H_0 с выборкой (58,1), который не носит асимптотического характера и где „объемы“ критических зон могут быть точно рассчитаны.

Построение такого критерия нормальности типа описано в моей заметке [19].

Согласно теореме I, подбираем две формы $L_1(x)$ и $L_2(x)$ от r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, такие, что условие $L_1(x) \cong L_2(x)$ эквивалентно нормальности типа наблюдений x_i.

Из выборки (58,1) берем первые r элементов $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и составляем из них форму $L_1(x)$, затем из следующих r элементов составляем форму $L_2(x)$, из последующих r элементов — форму $L_1(x)$ и т. д. Отделяем полученные формы $L_1(x)$ от равного им количества форм $L_2(x)$. В силу теоремы I числа $L_1(x)$ и числа $L_2(x)$ составляют однородную выборку тогда, и только тогда, если тип наблюдений нормальный.

Однородность наших двух выборок, состоящих из чисел $L_1(x)$ и $L_2(x)$ и имеющих одинаковый объем, можно проверить с помощью нового критерия согласия Б. В. Гнеденко и В. С. Королюка [18], не носящего асимптотического характера.

В моей заметке [19] указано построение линейных форм от четырех переменных $L_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, отвечающих в совокупности условиям теоремы I. Теоретически такие формы отвечают должным требованиям, но практически могут слабо реагировать на замену нормального закона каким-либо „близлежащим“ и имеющим дисперсию (например, равномерным в $[a - 2\sigma, a + 2\sigma]$), так как теорема Ляпунова, как показывает экспериментальный материал, иногда действует весьма точно уже при четырех независимых слагаемых, и построенные формы $L_1(x)$ и $L_2(x)$ могут в этом случае оказаться близкими к нормальному распределению.

Практически гораздо лучше действуют следующие формы, найденные А. П. Хусу:

$$\left.\begin{aligned} L_1(x) &= x_1 \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{aligned}\right\}. \tag{58,3}$$

Здесь определяющая функция

$$\sigma(z) = 1 - 4 \cdot 2^{-z}$$

имеет единственный реальный простой корень 2 и удовлетворяет условиям теоремы I.

Соотношение $L_1(x) \cong L_2(x)$ эквивалентно нормальности типа распределения наблюдений.

Далее, оказывается, что для закона, равномерного в $[-2, 2]$, „близкого“ к интегральному нормальному закону с параметрами 0; 1, $L_1(x)$ и $L_2(x)$ имеют разности четвертых моментов больше, чем для других пар форм с четырьмя переменными и условиями теоремы I.

Экспериментальный материал также говорит в пользу применения форм (58,3).

Разбор практически удобных критериев нормальности, основанных на линейных формах, будет сделан в другом месте.

§ 59

Теорема III дает возможность построить критерий согласия выборки

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

с гипотезой H_0 о том, что тип наблюдений является композицией симметрических устойчивых законов с х. ф.

$$f(u) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{l} A_j |u|^{\gamma_j}\right), \tag{59,1}$$

где числа γ_j с условием

$$0 < \gamma_j \leqslant 2$$

должны быть заданы, а числа A_j могут быть неизвестными. Для построения критерия строим две пары линейных статистик:

$$L_1(x),\ L_2(x);\ L_3(x),\ L_4(x), \tag{59,2}$$

таких, что если для симметрического закона $\Phi(x)$ имеем

$$L_1(x) \cong L_2(x); \quad L_3(x) \cong L_4(x), \tag{59,3}$$

то х. ф. закона $\Phi(x)$ имеет вид (59,1) и обратно.

Здесь надо, однако, отметить, что согласно теореме IV, к сожалению, так будут допущены и х. ф. вида (59,1), где некоторые коэффициенты A_j отрицательны, так что они не будут х. ф. композиций устойчивых законов. Но это — единственный вид альтернативных гипотез, совместных с соотношениями (59,3).

Отметим также, что выбор статистики (59,2) не всегда выгодно делать по правилам § 56, так как при большом числе неизвестных параметров A_j получится чрезмерно большое число переменных r.

Отметим еще статистическое толкование соотношений (59,3).

Можно выборку (58,1) разбить на четыре части и составить четыре новых независимых выборки из значений форм $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, $L_4(x)$. Тогда придется применять критерий однородности четырех независимых выборок.

Можно также составить из (58,1) две независимых выборки из форм $L_1(x)$ и $L_2(x)$ и затем из той же выборки две независимых выборки из форм $L_3(x)$ и $L_4(x)$. Эти последние выборки будут, однако, зависеть от первых.

Мы можем трактовать вопрос об однородности выборок из $L_1(x)$ и $L_2(x)$ при помощи критерия Б. В. Гнеденко и В. С. Королюка [18].

Пусть мы назначим при этом критическую зону Z_1 объема α_1.

Для выборок из форм $L_3(x)$ и $L_4(x)$ мы можем также назначить критическую зону Z_2 объема α_2. Попадания соответствующих выборочных точек в зоны Z_1 и Z_2 будут событиями зависимыми. Пусть это будут события $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Тогда мы будем отвергать гипотезу H_0, если произойдет событие $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$. При этом имеем

$$P(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) \leqslant P(\mathfrak{A}) + P(\mathfrak{B}) = \alpha_1 + \alpha_2,$$

что дает возможность оценить объем критической зоны для H_0 и применять критерий однородности для двух выборок.

§ 60

Замечание в конце § 2 позволяет строить также критерии, основанные на одинаковой распределенности статистики

$$\sup\,(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_rx_r) \text{ и } \sup\,(b_1x_1, b_2x_2, \ldots, b_rx_r).$$

Таким образом, можно строить критерии согласия выборки (58,1) с гипотезой H_0 о том, что закон распределения x_i определенным образом связан с предельными законами для членов вариационного ряда и может содержать любое число неизвестных параметров.

Заметим еще, что можно поставить вопрос о построении критериев согласия выборки со сложной гипотезой, основанных на одинаковой распределенности двух соответствующих статистик $g_1(x_1, \ldots, x_r)$ и $g_2(x_1, \ldots, x_r)$ и на сведѐнии, таким образом, вопроса к критерию однородности.

§ 61

В настоящем параграфе мы дадим приложение теорем I, II и III к выводу известного закона Максвелла для распределения скоростей молекул в классической физике (см. по этому поводу заметку автора [1]).

Рассмотрим множество хаотически движущихся частиц.

Пусть имеют место две гипотезы:

I. Существуют три ортогональные оси OX_1, OX_2, OX_3, такие, что проекции скорости наудачу взятой частицы на эти оси, x_1, x_2 и x_3, статистически независимы и одинаково распределены.

II. Существуют еще две оси OL_1 и OL_2 (не обязательно ортогональные) — такие, что проекции скорости той же частицы на оси, l_1 и l_2 одинаково распределены.

Если обозначим a_1, a_2, a_3 и соответственно b_1, b_2, b_3 косинусы углов OL_1 и OL_2 с осями OX_1, OX_2 и OX_3, то получим

$$l_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3; \quad l_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \tag{61,1}$$

Гипотеза II означает, что $l_1 \cong l_2$.

Если линейные формы l_1 и l_2 удовлетворяют условиям теоремы I, то это свойство эквивалентно нормальности распределения x_1, x_2, x_3, что и составляет содержание закона Максвелла.

Однако условия теоремы I несколько громоздки. Мы можем применить теорему II, для чего потребуем выполнения еще одной гипотезы:

III. Средняя четвертая степень скорости частиц конечна.

В теореме II положим $m = 2$. Пусть оси OL_1 и OL_2 таковы, что

$$\sup(|a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|) \neq \sup(|b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|). \tag{61,2}$$

Рассмотрим

$$\sigma(z) = |a_1|^z + |a_2|^z + |a_3|^z - |b_1|^z - |b_2|^z - |b_3|^z. \tag{61,3}$$

Очевидно, $\sigma(2) = 0$. Если оси OL_1 и OL_2 таковы, что максимальный реальный корень $\sigma(z)$, $\gamma < 4$, то имеем $m = \left[\frac{\gamma}{2} + 1\right]$ и, по гипотезе III, случайные величины x_1, x_2, x_3 имеют четвертый момент и $2m = 4$. Ввиду этого величины x_1, x_2, x_3 нормальны, т. е. имеет место закон Максвелла.

Если угол φ между осями OL_1 и OL_2 мал, то a_1, a_2, a_3 близки к b_1, b_2, b_3 и наибольший реальный корень $\sigma(z)$, γ будет больше 4.

Посмотрим, какую гипотезу о скорости молекул нужно сделать, чтобы и в этом случае гипотезы I и II привели к закону Максвелла.

Пусть ось OL_1 с направляющим единичным вектором $a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ расположена в положительном октанте и $a_1 = \sup(a_1, a_2, a_3)$. Допустим, что $a_1 > a_2$ и $a_1 > a_3$. Пусть другая ось OL_2 с направляющим единичным вектором $b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{h}$ составляет с OL_1 малый угол φ. Тогда, если φ достаточно мало, будем иметь: $b_i = \sup(b_1, b_2, b_3)$; $b_i > 0$.

Пусть $|a_1 - b_1| = \zeta$; для определенности пусть $a_1 = b_1 + \zeta$, $\zeta > 0$. Тогда имеем

$$\sigma(z) > |a_1^z| - 3|b_1^z|.$$

Если z положительное число, равное x, получим

$$\sigma(x) > a_1^x - 3b_1^x = b_1^x\left[\left(1 + \frac{\zeta}{b_1}\right)^x - 3\right] > b_1^x\left[\frac{x\zeta}{2b_1} - 2\right]$$

при достаточно малом угле φ. При $x > \frac{4b_1}{\zeta}$, $\sigma(x) \neq 0$. Итак, наибольший положительный корень γ функции $\sigma(z)$ будет $< \frac{4b_1}{\zeta}$ и

$$2m = 2\left[\frac{2b_1}{\zeta} + 2\right].$$

Если средняя $2m$-я степень скорости частицы конечна, то имеет место закон Максвелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник, Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла, ДАН, 1952, т. 85, № 6, 1251—1254.

2. J. Marcinkiewicz, Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Zeitschrift, Bd. 44, H. 4—5, 1938, 612—618.

3. А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, ГТТИ, 1951.

4. А. О. Гельфонд, Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций, Тр. МИАН, т. XXXVIII, 1951, 42—67.

5. А. О. Гельфонд, О целочисленных аналитических функциях, ДАН, т. 81, 1951, 341—344.

6. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, 1937.

7. Е. Титчмарш, Теория функций, ГТТИ, 1951.

8. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ГИИЛ, 1947.

9. П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, 1936.

10. И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГТТИ, 1943.

11. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых величин, ГТТИ, 1949.

12. Ky Fan, Les fonctions définies positives et les fonctions completèment monotones, Memorial de Sc. math., 1950.

13. G. Polya, Remarks on characteristic functions, Proc. of the Berkeley, Symposium of Math. Stat. and Probability, 115—123, 1949.

14. Laguerre, Oeuvres, t. 1. Paris, 1898.

15. В. И. Романовский, Применения математической статистики в опытном деле, ГТТИ, 1947.

16. А. К. Кутай и др., Статистические методы анализа и контроля качества машиностроительной продукции, Машгиз, 1949.

17. В. С. Паскевич, О некоторых вопросах математической статистики, имеющих отношение к статистическому анализу и контролю, 1952.

18. Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк, О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, ДАН, т. 80, № 4, 525—528.

19. Ю. В. Линник, Линейные статистики и нормальный закон распределения, ДАН, т. 83, № 3, 1952, 353—355.

Получена 16 января 1953 г.
Ленинград