О роли максимального слагаемого при суммировании независимых случайных величин

Б. В. Гнеденко

§ 1. Пусть дана последовательность взаимно независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots, \tag{1}$$

имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x) = P\{\xi_n < x\}$.

Мы будем рассматривать далее суммы

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Максимальным слагаемым в этой сумме мы назовем функцию

$$\eta_n = \eta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

от первых величин последовательности (1), которая для каждой системы возможных значений $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ..., $\xi_n = x_n$ равна наибольшему из них. Легко видеть, что функция распределения величин η_n равна

$$F_n(x) = P\{\eta_n < x\} = P\{\xi_1 < x, \ \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x\} = F^n(x).$$

Очевидно, что подобным же способом мы можем определить минимальное слагаемое суммы, второе по величине, третье и т. д. Максимальное слагаемое будет n-ым по величине.

Известно, что если при надлежащем подборе постоянных $B_n > 0$ и A_n функции распределения нормированных сумм

$$\frac{s_n - A_n}{B_n} \tag{2}$$

при $n \to \infty$ сходятся к собственной функции распределения $\Phi(x)$ и при этом

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

то предельное распределение будет нормальным (см. [7], § 11 и [4], теорема 1, § 26).

В настоящей статье будет изучено влияние максимального слагаемого на суммы s_n в случае сходимости функций распределения (2) при $n \to \infty$ к одному из устойчивых законов, отличных от нормального. Кроме того, мы рассмотрим вопрос о порядке роста максимального слагаемого для случая сходимости функций распределения сумм (2) к нормальному закону.

Мы будем при этом существенно опираться на результаты работ [1] и [5], изложенные в ([4], § 35), а также на статьи [2] и [3]. В последних указанных работах были изучены асимптотические закономерности, которым подчинена функция распределения величины η_n при неограниченном возрастании n. Задачи ставились так:

1) к каким предельным распределениям могут сходиться при $n \to \infty$ функции распределения величин $\dfrac{\eta_n}{B_n} - A_n$;

2) каким условиям должна удовлетворять функция $F(x)$, чтобы эта сходимость имела место?

Обе только что сформулированные задачи в работах [2] и [3] получили исчерпывающее решение. Позднее в большой работе Н. В. Смирнова [6] эти результаты были перенесены на произвольные „крайние" члены вариационного ряда и получены глубокие новые закономерности для „центральных" членов.

В § 2 мы приводим формулировки необходимых нам для дальнейшего ранее доказанных теорем; в § 3 доказываем новые результаты, касающиеся асимптотических свойств η_n; в § 4 даются формулировки и доказательства теорем о влиянии максимального слагаемого на предельное распределение.

§ 2. Мы скажем, что функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Phi(x)$, если функции распределения нормированных сумм (2) при надлежащем подборе постоянных $B_n > 0$ и A_n сходятся при $n \to \infty$ к $\Phi(x)$. Класс предельных в этом смысле распределений совпадает с классом устойчивых распределений (см. [4], гл. 7), для которых логарифм характеристической функции представим в виде

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha}\left\{1 + i\beta\frac{t}{|t|}\,\omega(t, \alpha)\right\},$$

где γ, c, α, β — вещественные постоянные $(0 < \alpha \leqslant 2,\ c > 0,\ -1 \leqslant \beta \leqslant 1)$, а

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема А. Для того чтобы функция распределения $F(x)$ принадлежала области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α $(0 < \alpha < 2)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$\frac{F(-x)}{1-F(x)} \to c \quad (c \text{ — постоянное, } 0 \leqslant c \leqslant \infty) \tag{3}$$

и при каждом постоянном $k > 0$

$$\frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(-kx)} \to k^{\alpha}. \tag{4}$$

Теорема Б. Функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения собственного нормального закона тогда, и только тогда, когда при $x \to \infty$

$$\frac{x^2(1-F(x)+F(-x))}{\int\limits_{|z|<x} z^2\,dF(z)} \to 0. \tag{5}$$

Нормирующие множители B_n для сходимости к устойчивому закону $(\alpha \neq 2)$ определяются как наименьшие корни неравенств

$$1-F(x+0)+F(-x) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1-F(x)+F(-x+0). \tag{6}$$

Для предельного же нормального закона величины B_n определяются как корни уравнений

$$B_n^2 = n\int\limits_{|z|<B_n} z^2\,dF(z). \tag{7}$$

В работах [2] и [3] доказано, что предельными законами для функций распределения величин

$$\frac{\eta_n}{B_n} - A_n$$

при надлежащем подборе постоянных $B_n > 0$ и A_n могут быть только распределения

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

где α — положительная постоянная и

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}.$$

В настоящей работе нас будут интересовать только распределения $\Phi_\alpha(x)$ и $\Lambda(x)$.

Теорема В. Для того чтобы при надлежащем подборе постоянных B_n (постоянные A_n можно выбрать равными 0) функции распределения величин $\frac{\eta_n}{B_n} - A_n$ сходились к распределению $\Phi_\alpha(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $k > 0$ выполнялось соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)}{1-F(kx)} = k^\alpha. \tag{8}$$

Постоянные B_n определяются как наименьшие корни неравенств

$$1-F(x(1+0)) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1-F(x(1-0)). \tag{9}$$

Теорема Г. Если функция распределения $F(x)$ такова, что $F(x) < 1$ при всех значениях x, то для сходимости функций распределения величин $\frac{\eta_n}{B_n} - A_n$ к распределению $\Lambda(x)$ необходимо выполнение условия

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(kx)}{1-F(x)} = 0 \tag{10}$$

при любом $k > 1$.

Можно доказать, что постоянные B_n при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяют соотношению

$$B_n = 0(n^\varepsilon).$$

§ 3. Цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующих двух теорем:

Теорема 1. Если функции распределения величин $\frac{\eta_n}{B_n} - A_n$ при надлежаще подобранных постоянных B_n и A_n сходятся к распределению $\Phi_\alpha(x)$, то при любом $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \alpha)$

$$\int_0^\infty |x|^{\alpha-\varepsilon} dF(x) < +\infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |x|^{\alpha+\varepsilon} dF(x) = +\infty.$$

Теорема 2. Если при надлежаще выбранных B_n и A_n функции распределения величин $\frac{\eta_n}{B_n} - A_n$ сходятся к распределению $\Lambda(x)$, то при любом $\delta > 0$

$$\int_0^\infty |x|^\delta dF(x) < \infty.$$

Доказательство теоремы 1. В силу теоремы В, каковы бы ни были $\eta > 0$ и $k > 1$, можно найти такое x_0, что

$$\frac{1-F(k^s x_0)}{1-F(k^{s+1} x_0)} = (1+\varepsilon_s)\, k^\alpha,$$

причем $|\varepsilon_s| \leqslant \eta$ при всех $s\,(s = 0, 1, 2, \ldots)$. Мы предположим, что $(1-\eta)k^\varepsilon > 1$. Очевидно, что

$$\int_{x_0}^\infty |x|^{\alpha-\varepsilon} dF(x) = \sum_{s=1}^\infty \int\limits_{k^{s-1}x_0 < x < k^s x_0} x^{\alpha-\varepsilon} dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^\infty k^{s(\alpha-\varepsilon)} x_0^{\alpha-\varepsilon} [F(k^s x_0) - F(k^{s-1} x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant x_0^{\alpha-\varepsilon}[1-F(x_0)] \sum_{s=1}^\infty k^{s(\alpha-\varepsilon)} \frac{1-F(k^{s-1} x_0)}{1-F(x_0)} \leqslant k^\alpha x_0^{\alpha-\varepsilon} \sum_{s=1}^\infty \left(\frac{1}{(1-\eta)\, k^\varepsilon}\right)^{s-1}.$$

В силу выбора η и k ряд в правой части неравенства сходится; первая часть теоремы таким образом доказана.

Так как

$$\int_{x_0}^\infty |x|^{\alpha+\varepsilon} dF(x) \geqslant \sum_{s=1}^\infty k^{(s-1)(\alpha+\varepsilon)} x_0^{\alpha+\varepsilon} [1-F(k^{s+1}x_0)] \left[\frac{1-F(k^s x_0)}{1-F(k^{s+1} x_0)} - 1\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{x_0^{\alpha+1}}{k^{\alpha+\varepsilon}} \sum_{s=1}^\infty \frac{k^{s\varepsilon}}{(1+\eta)^\varepsilon} \left[\frac{k^\alpha}{1+\eta} - 1\right]$$

и $\frac{1}{1+\eta} > 1-\eta$, то $\frac{k^\varepsilon}{1+\eta} > (1-\eta)\, k^\varepsilon > 1$ и, следовательно, ряд в правой части неравенства расходится. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что следует рассмотреть только случай, когда $F(x) < 1$ при всех x. Мы находимся в условиях теоремы Г. Согласно этой теореме можно считать, что для любого $\alpha > 0$ (мы возьмем $\alpha > \delta$), произвольного $k > 1$, и достаточно большого x_0 можно написать равенства

$$\frac{1-F(k^s x_0)}{1-F(k^{s-1} x_0)} = \frac{\alpha_s}{k^\alpha},$$

где при всех s $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ $\alpha_s < \frac{1}{2}$.

Имеем

$$\int_{x_0}^{\infty} x^\delta dF(x) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} k^{r\delta} x_0^\delta [F(k^r x_0) - F(k^{r-1} x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant x_0^\delta \sum_{r=1}^{\infty} k^{r\delta} [1 - F(k^{r-1} x_0)] \leqslant \frac{x_0^\delta}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{k^{r\delta}}{(2k)^{(r-1)\alpha}} < +\infty.$$

Подобным же путем могут быть доказаны аналогичные теоремы относительно минимального и других „крайних“ слагаемых.

§ 4. Наряду с величинами η_n введем в рассмотрение случайные величины ζ_n, определяемые посредством равенства

$$\zeta_n = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|\}.$$

Теорема 3. Если функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения с характеристическим показателем $\alpha \neq 2$, то с теми же самыми нормирующими множителями B_n, как и для сумм (2), сходятся к собственным предельным распределениям типа $\Phi_\alpha(x)$ распределения вероятностей величин $\frac{\zeta_n}{B_n}$ и $\frac{\eta_n}{B_n}$ [1]).

Доказательство. Действительно, необходимое и достаточное условие сходимости к предельному распределению величин $\frac{\zeta_n}{B_n}$ согласно теореме В состоит в выполнении при любом $k > 0$ соотношения

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(-kx)} = k^\alpha.$$

Если $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения с характеристическим показателем $\alpha \neq 2$, то это соотношение выполняется в силу теоремы А.

В силу (9) нормирующие коэффициенты B_n для сходимости распределений величин $\frac{\zeta_n}{B_n}$ к предельному должны быть выбраны как наименьшие корни неравенств

$$1-F(x(1+0)) + F(-x) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 - F(x) + F(-x(1+0)).$$

Согласно (6) точно таким же путем определяются и нормирующие коэффициенты B_n для сходимости функций распределения величин (2).

---

[1]) В последнем случае предполагается, что в (3) $c \neq \infty$.

Если $c \neq \infty$, то в силу (3) соотношение (4) приводится к виду (8), а соотношение (6) к виду

$$(1+c)[1-F(x(1+0))] \leqslant \frac{1}{n} \leqslant (1+c)[1-F(x)]$$

или, что то же самое (асимптотически), к виду

$$1-F((1+c)^{\frac{1}{\alpha}} x(1+0)) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1-F((1+c)^{\frac{1}{\alpha}} x).$$

Мы видим, таким образом, что нормирующие коэффициенты B_n для сходимости функций распределения сумм (2) лишь постоянным множителем отличаются от нормирующих коэффициентов, с которыми функции распределения величин $\frac{\eta_n}{B_n}$ сходятся к предельной.

Таким образом, если функции распределения сумм (2) сходятся к предельному распределению с характеристическим показателем $\alpha \neq 2$, то с теми же нормирующими коэффициентами B_n имеют место предельные соотношения

$$\lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n < xB_n\} = e^{-x^{-\alpha}} \qquad (x>0)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} P\{\eta_n < xB_n\} = e^{-(1+c)\,x^{\alpha}}.$$

Из сказанного можно сделать тот вывод, что если $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона, отличного от нормального, то будет иметь место также следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{s_n-A_n}{\zeta_n} < x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — некоторое собственное распределение.

Теорема 4. Если при некотором выборе постоянных A_n и B_n функции распределения величин $\frac{\zeta_n}{B_n} - A_n$ при $n \to \infty$ сходятся к распределению $\Lambda(x)$ или распределению $\Phi_\alpha(x)$ $(\alpha > 2)$, то функция $F(x)$ принадлежит области притяжения нормального закона. Нормирующие множители B_n в случае сходимости к распределению $\Phi_\alpha(x)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{B_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = 0(n^{\varepsilon}); \quad \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{B_n} = 0(n^{\varepsilon}).$$

Доказательство. При $\alpha > 2$ наше утверждение очевидно в силу теоремы 1. Доказательства требует только случай $\alpha = 2$. Нам нужно показать, что если распределение $F(x)$ удовлетворяет условию: при любом $k > 0$ и $x \to \infty$

$$\frac{1-F(kx)+F(-kx)}{1-F(x)+F(-x)} \to \frac{1}{k^2}, \tag{11}$$

то оно принадлежит области притяжения нормального закона и, следовательно, удовлетворяет соотношению: при $x \to \infty$

$$\frac{x^2[1-F(x)+F(-x)]}{\int\limits_{|z|<x} z^2\,dF(z)} \to 0. \tag{12}$$

Введем для краткости обозначение

$$1-F(x)+F(-x)=\frac{\alpha(x)}{x^2};$$

функция $\alpha(x)$ в силу (11) при любом $k>0$ удовлетворяет условию при $x \to \infty$

$$\frac{\alpha(kx)}{\alpha(x)} \to 1. \tag{13}$$

Так как

$$\int\limits_{|x|<x} x^2\,dF(x)=-\int\limits_0^x x^2 d\frac{\alpha(x)}{x^2}=\Big|_0^x -x^2\frac{\alpha(x)}{x^2}+2\int\limits_0^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx=$$

$$=-\alpha(x)+2\int\limits_0^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx,$$

то (12) эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_0^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx \to \infty. \tag{14}$$

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы обнаружить, что соотношение (11) или, что то же самое, (13) влечет за собой (14). С этой целью заметим, что функция $\frac{\alpha(x)}{x^2}$ является невозрастающей, и запишем следующую очевидную цепочку соотношений, верную при любом целом положительном s:

$$\frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_0^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_{x2^{-s}}^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx=\frac{1}{\alpha(x)}\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{x2^{-j}}^{x2^{-j+1}} \frac{\alpha(x)}{x}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha(x)}\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha(x2^{-j})}{x^2 2^{-2j}}\int\limits_{x2^{-j}}^{x2^{1-j}} x\,dx=\frac{3}{2\alpha(x)}\sum_{j=1}^{s}\alpha(x2^{-j}).$$

Так как для каждого s при достаточно большом x

$$\frac{\alpha(x2^{-j})}{\alpha(x)}>\frac{2}{3},$$

то для любого s

$$\frac{1}{\alpha(x)}\int\limits_0^x \frac{\alpha(x)}{x}\,dx>s.$$

Очевидно, что требуемое доказано.

Только что приведенное доказательство того, что из (13) следует (14), принадлежит моему ученику Ю. П. Студневу.

Основываясь на результатах Н. В. Смирнова, содержащихся во второй части работы [6], можно вывести ряд теорем, подобных тем, которые доказаны в настоящем параграфе. Для иллюстрации мы приведем формулировку одного такого предложения.

Расположим величины

$$|\xi_1|, \quad |\xi_2|, \ldots, \quad |\xi_n|$$

в порядке возрастания. Обозначим k-ую величину справа через $\zeta_n^{(k)}$; ясно, что $\zeta_n^{(1)} = \zeta_n$.

Теорема 5. Если функция распределения $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha \neq 2$, то с теми же самыми нормирующими множителями B_n, как и для сумм (2), сходятся к собственному предельному распределению функции распределения величин $\dfrac{\zeta_n^{(k)}}{B_n}$; предельное распределение определяется равенствами

$$\Phi_\alpha^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{для} \quad x < 0,$$

$$\Phi_\alpha^{(k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{x^\alpha} z^{k-1} e^{-z}\, dz \quad \text{для} \quad x > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, К теории областей притяжения устойчивых законов, Ученые записки Московского университета, вып. 30, 1939, 61—82.

2. Б. В. Гнеденко, Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда, ДАН СССР, 32, 1941.

3. Б. В. Гнеденко, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Annals of mathematics, 44, № 3, 1941, 423—453.

4. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.

5. W. Doeblin, Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, Studia Math., т. IX, 1940, 71—96; Ann. École Norm., 3, v. 63, 1947, 317—350.

6. Н. В. Смирнов, Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова, XXV, 1949.

7. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ГОНТИ, 1938.

Получена 24 февраля 1953 г.
Киев