К обобщению одной теоремы Харди—Литтльвуда

М. П. Щеглов

В 1913 г. Харди и Литтльвудом [1] была установлена следующая теорема [1]):

Пусть последовательность $\{s_n\}(n=0, 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$1) \qquad s_n \geqslant 0,$$

$$2) \quad \varphi(u) \equiv \frac{1}{u} \sum_{v=0}^{\infty} s_v e^{-\frac{v}{u}} \underset{u\to\infty}{\to} S,^{2)}$$

где ряд предполагается заранее сходящимся при $0 < u < \infty$, S — конечное число. Тогда

$$\sigma_n \equiv \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} s_v \underset{n\to\infty}{\to} S.^{3)}$$

Обратное утверждение всегда справедливо, т. е. при $\sigma_n \to S$ следует $\varphi(u) \to S$ [4]). Сформулированная теорема Х.—Л. в общем виде не имеет места при $S=\infty$, так как можно построить последовательность $\{s_n\}$, где $s_n \geqslant 0$ и для которой $\underline{\lim}\, \varphi(u) = \overline{\lim}\, \varphi(u) = \infty\, (u\to\infty)$, $\underline{\lim}\, \sigma_n = 0$, $\overline{\lim}\, \sigma_n = \infty\ (n\to\infty)$ [5]). Настоящая заметка служит некоторым обобщением теоремы Харди—Литтльвуда.

Определение. Скажем, что последовательность $\{s_n\} \in P$, если $s_n \geqslant 0$. Введем числа (конечные или бесконечные)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n = D, \quad \overline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi(u) = D'.$$

Числа D и D' (для множества P) связаны определенной зависимостью.

Итак, пусть последовательность $\{s_n\} \in P$, имеют место следующие теоремы:

I. D и D' — одновременно конечные или бесконечные (∞) числа.

---

[1]) См. также [2], стр. 197, теорема 93.

[2]) Выражение, определяющее $\varphi(u)$, представляет одну из форм метода суммирования Пуассона (говорят также — Абеля).

[3]) σ_n — определяет простейший метод суммирования Чезаро.

[4]) См. [2], стр. 140, теорема 55.

[5]) Использован пример, приведенный в работе [3], стр. 277, случай XIX.

II. Пусть, кроме того, $0 < D' < \infty$, при этих условиях:

а) $\inf\limits_{(P)} (D - D') = 0$, б) $\sup\limits_{(P)} (D - D') = \infty$,

в) $\inf\limits_{(P)} \dfrac{D}{D'} = 1$, г) $\sup\limits_{(P)} \dfrac{D}{D'} = e$,

г′) $\sup\limits_{(P)} \dfrac{D+\alpha}{D'+\alpha} = e$, где $0 < \alpha = \text{const} < \infty$.

III. Если $\overline{\lim}\, s_n = D$, тогда $D' = D$.

IV. Существует последовательность $\{s_n\} \in P$, для которой $D = D' < \overline{\lim}\, s_n$.

Доказательство. Всегда

$$D' \leqslant D \text{ [1]}. \tag{1}$$

Кроме того, легко показать, что для последовательности $\{s_n\} \in P$ имеем

$$\sigma_n \leqslant e\varphi(n+1). \tag{2}$$

Отсюда следует

$$D \leqslant eD'. \tag{2'}$$

Из (1) и (2′), очевидно, вытекает теорема I. Случаи а) и в) теоремы II получаются из соотношения (1), учитывая тот факт, что легко образовать последовательность $\{s_n\} \in P$, для которой $D = D'$.

Рассмотрим случаи б), г) и г′). Возьмем последовательность

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n_{2k} \leqslant n < n_{2k+1} \\ M > 0 & \text{при } n_{2k+1} \leqslant n < n_{2k+2} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2\ldots),$$

где

$$1 < \frac{n_{2k+1}}{n_{2k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \frac{n_{2k+2}}{n_{2k+1}} = \lambda, \ \lambda > 1.$$

Нетрудно показать, что для этой последовательности

$$D = M\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right), \quad D' = M\lambda^{-\frac{1}{\lambda-1}}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Отсюда

$$D - D' = M\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda^{-\frac{1}{\lambda-1}}\right) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{3}$$

и

$$\frac{D}{D'} = \lambda^{\frac{1}{\lambda-1}} \underset{\lambda\to 1}{\longrightarrow} e. \tag{4}$$

Из (3), очевидно, следует б). Из (4), принимая во внимание (2′), вытекает г). Аналогично получается г′). При доказательстве теоремы III введем понятие „плотности".

Возьмем множество

$$N = \{n\}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и последовательность сегментов

где
$$\left.\begin{aligned} &\{[n_k, n_k']\}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ &n_k < n_k' < n_{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad n_k \in N, \ n_k' \in N \end{aligned}\right\} (\sigma)$$

[1] См. [4], стр. 50.

Пусть дано множество $N^{(m)} \subset N$. Обозначим через $N_k{}^{(m)}$ порцию данного множества, принадлежащую „k“-тому сегменту, $n_k{}^{(m)}$ — число элементов в порции „k“. Составим отношение

$$\frac{n_k^{(m)}}{n_k{}' - n_k + 1} = \varrho_k^{(m)}.$$

Число

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \varrho_k^{(m)} = \varrho^m, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \varrho^{(m)} \leqslant 1,$$

будет служить характеристикой „плотности“ данного множества $N^{(m)}$ по заданной последовательности сегментов.

Переходим к доказательству.

Если $D = \infty$, тогда $D' = \infty$ (в силу теоремы I). Если $D = 0$, тогда, очевидно, $D' = 0$. Положим $0 < D < \infty$. Зададим произвольно малое число ε, $0 < \varepsilon < D$ и как угодно большое число $M > 0$. Разобьем множество

$$N = \{n\}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

на три подмножества следующим образом:

$$N^{(1)}\left[s_n \geqslant D + \frac{\varepsilon}{M}\right], \quad N^{(2)}[s_n \leqslant D - \varepsilon]$$

и

$$N^{(3)}\left[D - \varepsilon < s_n < D + \frac{\varepsilon}{M}\right].$$

Очевидно, $N^{(1)}$ — конечное множество, так как $\overline{\lim}\, s_n = D$. Возьмем последовательность (σ) и такую, что

$$\frac{n_k'}{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \sigma_{n_k'} \underset{n_k'\to\infty}{\longrightarrow} D.$$

Образуем порции множеств

$$N_k^{(m)} \ (m = 1, 2, 3)$$

и им соответствующие числовые характеристики:

$$n_k^{(m)}, \ \varrho_k^{(m)}, \ \varrho^{(m)}$$ [1].

Установлено, найдется число k_0 такое, что

$$N_k^{(1)} = 0$$ [2] при $k > k_0$

и, следовательно,

$$n_k^{(1)} = 0, \quad \varrho_k^{(1)} = 0$$

при $k > k_0$.

Покажем, что $\varrho^{(2)} = 0$, $\varrho^{(3)} = 1$.

Положим, $k > k_0$. Имеем

$$\sigma_{n_k'} = \frac{1}{n_k' + 1} \sum_{n=n_k}^{n_k'} s_n + \eta_k^{(1)} = \frac{1}{n_k' - n_k + 1}\left(\sum_{n \in N_k^{(2)}} s_n + \sum_{n \in N_k^{(3)}} s_n\right) +$$
$$+ \eta_k^{(2)} \leqslant (D - \varepsilon)\,\varrho_k^{(2)} + \left(D + \frac{\varepsilon}{M}\right)\varrho_k^{(3)} + \eta_k^{(2)},$$

---

[1] См. вышестоящие формулы (стр. 300).

[2] Пустое множество.

откуда

$$D+\eta_k^{(3)} \leqslant D-\varepsilon\varrho_k^{(2)}+\frac{\varepsilon}{M}\varrho_k^{(3)}+\eta_k^{(2)}\ ^{1)},$$

или

$$\varepsilon\varrho_k^{(2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{M}\varrho_k^{(3)}+\eta_k^{(4)}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, считая

$$\eta_k^{(i)} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

получаем

$$\varrho^{(2)} \leqslant \frac{1}{M}\varrho^{(3)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что M как угодно большое число >0, следует наше утверждение.

На основании этого факта и соотношения (1) нетрудно доказать

$$D-\varepsilon \leqslant D' \leqslant D.$$

Из этого вытекает искомое равенство $D'=D$.

Теорему IV можно оправдать с помощью выше определенной последовательности, принимая $\lambda\equiv\lambda_k\to 1$ $(k\to\infty)$.

В этом случае

$$D=D'=0,\ \overline{\lim}\, s_n=M>0.$$

Определение. Скажем, что последовательность $\{s_n\}\in P_0$, если

$$\{s_n\}\in P, \quad D=D'=0$$

и

$$\{s_n\}\in P_\infty, \quad \text{если} \quad \{s_n\}\in P,\ D=D'=\infty.$$

Теорема V. Имеет место

$$\sup_{(P_0)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\sigma_n}{\varphi(n+1)}=\sup_{(P_\infty)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{\sigma_n}{\varphi(n+1)}=e.$$

Доказательство аналогично теореме II, случай г) (необходимо использовать соотношение (2)).

Определение. Скажем, что последовательность $\{s_n\}\in P_{[x,\,y]}$, если

$$0<x\leqslant s_n\leqslant y<\infty.$$

Введем функцию

$$\mu(x,\ y)=\sup_{(P_{[x,\,y]})}\frac{D}{D'}.$$

Укажем на некоторые свойства этой функции:

а) $\mu(x,\ x)=1$, б) $1\leqslant\mu(x,\ y)\leqslant e$,

в) $\mu(kx,\ ky)=\mu(x,\ y)$, где $0<k<\infty$,

г) $\mu(x,\ y)\leqslant\mu(x',\ y')$, если $\dfrac{y}{x}\leqslant\dfrac{y'}{x'}$.

Представляет интерес глубже изучить функцию $\mu(x,\ y)$.

---

1) $\varrho_k^{(2)}+\varrho_k^{(3)}=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Hardy and I. Littlewood, Tauberian theorems concerhing power series and Dirichlet's series whose coeficients are positive, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 13 (1913), 174—191.

2. Г. Харди, Расходящиеся ряды, 1951.

3. М. П. Щеглов, К обобщению теорем Таубера, Мат. сб., т. 28(70); 2 (1951), 245—282.

4. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

Получена 18 октября 1952 г.

Москва