О некоторых методах приближения суммируемых функций при помощи многочленов

И. М. Ганзбург

§ 1. Введение

В математической литературе подвергался исследованию метод приближения непрерывных периодических функций

$$\omega_n(f, x, \alpha_n) = \frac{1}{2}\{S_n(f, x) + S_n(f, x+\alpha_n)\}. \tag{1}$$

При $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{2n+1}$ метод (1) рассматривался академиком С. Н. Бернштейном [1], доказавшим его сходимость на классе C непрерывных периодических функций. При произвольном α_n исчерпывающее исследование метода (1) было проведено А. Ф. Тиманом [3, 4].

Автор (см. [5]) исследовал метод приближения

$$t_n(f, x; \alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{3}\{S_n(f, x) + S_n(f, x+\alpha_n) + S_n(f, x+\beta_n)\}, \tag{2}$$

зависящий от двух произвольных последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Была получена асимптотическая оценка нормы оператора t_n в пространстве C и установлено, что сходимость метода (2) на классе C равносильна соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{4p\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right); \\ \beta_n &= \frac{4q\pi}{3(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right); \end{aligned} \tag{3}$$

где $p = p(n)$ и $q = q(n)$ целочисленные функции, принимающие конечное число значений вида $3r-1$ и $3s+1$ (r и s — целые числа).

В настоящей работе рассматривается класс L суммируемых периодических функций и с точки зрения сходимости на классе L исследуется метод приближения

$$t_n(f, x) = \frac{1}{3}\left\{S_n(f, x) + S_n\left(f, x + \frac{4\pi}{3(2n+1)}\right) + S_n\left(f, x - \frac{4\pi}{3(2n+1)}\right)\right\}, \tag{4}$$

представляющий собою метод типа (2).

В § 2 работы устанавливается сходимость метода (4) на классе L в любой точке Лебега функции $f(x) \in L$.

В § 3 указаны некоторые приложения введенного метода приближения $t_n(f, x)$ в теории суммируемости рядов Фурье и суммирования числовых рядов.

Известно, что если $f(x) \in L^r$, $r > 1$, то почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - f(x)|^k = 0; \quad k > 0. \tag{5}$$

В 1935 г. было доказано [7] в случае пространства L, что если x есть точка Лебега функции $f(x)$, то этого еще недостаточно для выполнения в ней соотношения (5) для любой функции $f(x) \in L$.

В настоящей работе, используя введенный метод приближения (4), мы доказываем, что для класса $\varLambda(\alpha, 1)$, принадлежащего пространству L, соотношение (5) выполняется почти для всех x.

В § 3 работы приводится также приложение метода $t_n(f, x)$ к суммированию числовых рядов.

§ 2. Сходимость $t_n(f, x)$ на классе L суммируемых функций

Теорема 1. Какова бы ни была суммируемая периода 2π функция $f(x)$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} t_n(f, x) = f(x) \tag{6}$$

в каждой точке Лебега x функции $f(x)$.

Так как метод $t_n(f, x)$ удовлетворяет условиям (3), то для него имеет место сходимость на классе C.

Как известно из работы [2] С. М. Никольского, если мы имеем метод

$$u_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где числа $\lambda_k^{(n)}$ образуют выпуклую последовательность ($k = 0, 1, \ldots, n+1$ $\lambda_0^{(n)} = 1$; $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$), то сходимость $u_n(f, x)$ в каждой точке Лебега x для любой суммируемой функции $f(x)$ равносильна сходимости на классе C.

Однако для метода $t_n(f, x)$ числа $\lambda_k^{(n)}$ представляются в виде

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\frac{4k\pi}{3(2n+1)}\right) \tag{7}$$

и, как легко проверить, не образуют выпуклой последовательности.

В связи с этим для доказательства теоремы 1 требуется непосредственно рассмотреть отклонение $t_n(f, x)$ от $f(x)$.

Полагая $\varepsilon_n = \dfrac{4\pi}{3(2n+1)}$, из (4) легко получим

$$t_n(f, x) = \frac{1}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t+\varepsilon_n)}{2\sin\frac{t+\varepsilon_n}{2}} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-\varepsilon_n)}{2\sin\frac{t-\varepsilon_n}{2}} \right] dt.$$

В силу четности ядра из последнего равенства вытекает

$$t_n(f, x) - f(x) = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du; \tag{8}$$

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

где

$$K_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t} +$$

$$+ \frac{\sin(2n+1)\left(t+\frac{\varepsilon_n}{2}\right)}{2\sin\left(t+\frac{\varepsilon_n}{2}\right)} + \frac{\sin(2n+1)\left(t-\frac{\varepsilon_n}{2}\right)}{2\sin\left(t-\frac{\varepsilon_n}{2}\right)}. \tag{9}$$

Представим интеграл в правой части (8) в виде суммы трех интегралов

$$t_n(f, x) - f(x) = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3, \tag{10}$$

где

$$\dot{I}_1 = \frac{2}{3\pi} \int_0^{\varepsilon_n} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du,$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2}{3\pi} \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi-\varepsilon_n}{2}} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du, \tag{11}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{2}{3\pi} \int_{\frac{\pi-\varepsilon_n}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du.$$

Оценим $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$. В оценках буквы c', c'', c_i $(i = 1, \ldots, 5)$ обозначают константы. Учитывая, что $|\sin kt| \leqslant k |\sin t|$, находим

$$|I_1| \leqslant \frac{2n+1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_n} |\varphi_x(2u)|\, du. \tag{12}$$

Так как x точка Лебега $f(x)$, а $\varepsilon_n = \dfrac{4\pi}{3(2n+1)}$, то очевидно, что

$$\dot{I}_1 = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{13}$$

Оценка интеграла $\dot{I}_2$ требует дополнительных соображений. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, подберем такое малое число $h > 0$, что при $0 \leqslant t \leqslant 2h$ выполняется

$$\Phi_x(t) = \int_0^t |f(u+x) - f(x)|\, du < \varepsilon t.$$

Зафиксировав это h и считая n таким, что выполнено неравенство

$$\varepsilon_n < h, \tag{14}$$

представим $\dot{I}_2$ в виде суммы двух интегралов

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'', \tag{15}$$

где

$$\dot{I}_2' = \frac{2}{3\pi} \int\limits_{\varepsilon_n}^{h} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du,$$

$$\dot{I}_2'' = \frac{2}{3\pi} \int\limits_{h}^{\frac{\pi-\varepsilon_n}{2}} \varphi_x(2u) K_n(u)\, du.$$

Нетрудно убедиться, что из (9) после некоторых преобразований будет следовать неравенство

$$|K_n(u)| \leqslant \frac{c' \left|\sin\frac{\varepsilon_n}{4}\right|}{\sin^2\left(u - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)} + \frac{c'' \sin^2\frac{\varepsilon_n}{2}}{\sin^3\left(u - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)}; \quad \varepsilon_n \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Пользуясь неравенствами

$$|\sin x| \leqslant |x|;$$

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \tag{17}$$

из (16) легко получим

$$|\dot{I}_2'| \leqslant c_1 \varepsilon_n \int\limits_{\varepsilon_n}^{h} |\varphi_x(2u)| \frac{du}{\left(u - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^2} + c_2 \varepsilon_n^2 \int\limits_{\varepsilon_n}^{h} |\varphi_x(2u)| \frac{du}{\left(u - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^3}. \tag{18}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что для $\varepsilon_n \leqslant u \leqslant h$ выполняются неравенства

$$\Phi_x(2u) < 2\varepsilon u; \quad \frac{1}{h - \frac{\varepsilon_n}{2}} < \frac{2}{h},$$

нетрудно из (18) получить

$$|I_2'| \leqslant c_3 \varepsilon + o(1) \quad (n \to \infty).$$

В силу произвольности ε

$$\dot{I}_2' = o(1) \qquad (n \to \infty). \tag{19}$$

При оценке I_2'', применяя неравенства (14), (16) и (17), получим

$$|I_2''| \leqslant \left(\frac{c_4 \varepsilon_n}{h^2} + \frac{c_5 \varepsilon_n^2}{h^3}\right) \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_x(2u)|\, du.$$

и, следовательно,

$$I_2'' = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{20}$$

Из соотношений (15), (19) и (20) следует

$$\dot{I}_2 = o(1) \ (n \to \infty). \tag{21}$$

Оценка $\dot{I}_3$ легко вытекает из неравенства (16)

$$I_3 = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{22}$$

Из соотношений (13), (21) и (22) следует результат теоремы.

§ 3. Некоторые приложения тригонометрических сумм $t_n(f, x)$

1. Известно [8], что если $f(x) \in L^r$, $r > 1$ и

$$\int_0^t |\varphi_x(u)|^r du = o(t); \quad \varphi_x(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \tag{23}$$

то имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - f(x)|^k = 0 \tag{24}$$

для любого $k > 0$.

Во введении уже указывалось, что в 1935 г. Харди и Литтльвуд доказали в [7], что если x — точка Лебега функции $f(x)$, то этого еще недостаточно для выполнения соотношения (24).

В настоящем параграфе показывается, что для одного класса функций из пространства L соотношение (24) имеет место почти для всех x.

Теорема 2. Если $f(x) \in \Lambda(\alpha, 1)$, т. е. если

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|\, dx \leqslant M|h|^\alpha; \quad (0 < \alpha \leqslant 1) \tag{25}$$

и k — произвольное положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - f(x)|^k = 0 \tag{26}$$

почти для всех x.

Доказательство. Заметим прежде всего, что так как

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - f(x)|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

есть неубывающая функция от k, то достаточно доказать (26) только для $k \geqslant 1$.

При $k \geqslant 1$ справедливо неравенство:

$$\left|\frac{S_\nu(f, x) - f(x)}{2}\right|^k \leqslant \frac{1}{2}\{|S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^k + |t_\nu(f, x) - f(x)|^k\},$$

где $t_\nu(f, x)$ — тригонометрические суммы (4). Из последнего неравенства вытекает

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - f(x)|^k \leqslant$$

$$\leqslant 2^{k-1} \left\{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |t_\nu(f, x) - f(x)|^k + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^k\right\}. \tag{27}$$

Учитывая, что в силу теоремы 1 почти для всех x

$$t_n(f, x) \to f(x) \text{ при } n \to \infty,$$

какова бы ни была $f(x) \in L$, получим, что первое слагаемое правой части неравенства (27) стремится к нулю при $n \to \infty$ почти для всех x.

Для доказательства т оремы достаточно установить, что такой же факт имеет место для второго слагаемого правой части (27). Введем в рассмотрение интеграл

$$I_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} |S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^k \, dx. \tag{28}$$

Применяя к нему неравенство Буняковского, получим

$$I_\nu \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^{2k-r} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $0 < r < 1$. В дальнейших оценках буквы c, c_i $(i = 0, 1, 2)$ обозначают константы. Так как

$$S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x) = o(\ln \nu)$$

почти для всех x, то имеем

$$I_\nu \leqslant c_0 \ln^k \nu \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Известно, что если $f(x) \in L$ и $0 < r < 1$, то сопряженная функция $\bar{f}(x) \in L_r$, и имеет место неравенство (см. [8])

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant A_r \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx, \tag{30}$$

где A_r — некоторая константа, зависящая от r. Введем в рассмотрение модифицированную сумму Фурье функции $f(x)$

$$S_\nu^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \frac{\sin \nu t}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt.$$

Преобразуя $S_\nu^*(f, x)$, легко показать, что

$$|S_\nu^*(f, x)| \leqslant |\varphi_\nu(x)| + |\psi_\nu(x)|,$$

где $\varphi_\nu(x)$ и $\psi_\nu(x)$ суть функции, соответственно сопряженные к $f(x) \sin \nu x$ и $f(x) \cos \nu x$.

Если принять во внимание (30), то из последнего неравенства следует

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_\nu^*(f, x)|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant 2A_r \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx$$

или

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|S_\nu(f, x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant c\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx, \tag{31}$$

ибо

$$S_\nu^*(f, x) - S_\nu(f, x) = o(1).$$

Учитывая соотношения (31) и (2), получим

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|S_\nu(f, x)-t_\nu(f, x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant c\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{4\pi}{3(2\nu+1)}\right)+f\left(x-\frac{4\pi}{3(2\nu+1)}\right)-2f(x)\right|dx.$$

И так как $f(x)\in \varLambda(\alpha, 1)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}|S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^r dx \leqslant \frac{c_1}{\nu^{r\alpha}}. \tag{32}$$

Из (29) и (32) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{I_\nu}{\nu} \leqslant c_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln^k \nu}{\nu^{1+\frac{r\alpha}{2}}}.$$

Так как ряд в левой части последнего неравенства сходится, то в силу известной теоремы [8] почти всюду сходится ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}|S_\nu(f, x) - t_\nu(f, x)|^k. \tag{33}$$

Из сходимости ряда (33) легко вытекает, что при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}|S_\nu(f, x)-t_\nu(f, x)|^k\to 0$$

почти всюду, и теорема полностью доказана.

2. В настоящем пункте указывается на приложение метода $t_n(f, x)$ к суммированию числовых рядов. Мы уже упоминали в § 2, что $t_n(f, x)$ представим в виде

$$t_n(f, x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2\cos\frac{4k\pi}{3(2n+1)}}{3}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Пусть $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ — любой числовой ряд. Введем в рассмотрение последовательность

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1+2\cos\frac{4k\pi}{3(2n+1)}}{3}u_k$$

и условимся говорить, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируем к значению S методом $(T, 1)$, если

$$\lim_{n\to\infty} t_n = S.$$

Подобные рассмотрения, но в отношении метода С. Н. Бернштейна, проводил Ф. И. Харшиладзе.

Нетрудно видеть, что метод $(T, 1)$ является линейным и регулярным методом суммирования числовых рядов.

Можно доказать, что метод $(T, 1)$ является более сильным, чем метод $(C, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques, Comptes Rendus, Ac. Sc. I, 191 (1930), 976—979.
2. С. М. Никольский, О линейных методах суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, серия математ., 12(1948), 259—278.
3. А. Ф. Тиман, О константах Лебега для некоторых методов суммирования, ДАН СССР, т. LXI, № 6 (1948), 989—992.
4. А. Ф. Тиман, О некоторых методах суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, серия математ., 14 (1950), 85—94.
5. И. М. Ганзбург, Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими суммами, ДАН СССР, т. LXIV, № 1 (1949).
6. Ф. И. Харшиладзе, О методе суммирования С. Н. Бернштейна; Математич. сборник, т. 11 (53), 1—2 (1942), 121—144.
7. **Hardy and Zittlewood, On strong summability, Fundamenta Mathematicae, 25, 162—189 (1935).**
8. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, М.—Л., 1935.

Получена 6 мая 1952 г.

Днепропетровск