Кривые линейчатого комплекса

Н. И. Кованцов

Линейчатым комплексом называют трехпараметрическое многообразие прямых в четырехмерном линейчатом пространстве. Являясь разделом линейчатой геометрии, начало которой было положено в 1868 г. Плюккером [1], теория комплексов оказалась разработанной несравненно слабее, чем два других из трех естественно выделяющихся разделов линейчатой геометрии — теория линейчатых поверхностей и теория конгруэнций. Вся литература о комплексах ограничивается лишь отдельными главами в общих сочинениях по линейчатой геометрии, а также небольшими мемуарами ряда советских и зарубежных геометров (С. П. Фиников, М. А. Акивис, В. И. Коровин, W. Haak, E. Picard, P. Appel и др.).

Первыми понятиями, которые выделяются в теории комплексов, являются понятия плоской кривой комплекса s и конуса комплекса. С другой стороны, пересекая конус комплекса плоскостью, перпендикулярной к лучу и проходящей через центр этого луча, мы получаем другую плоскую кривую l. Не лишено интереса то обстоятельство, что между кривизнами кривых s и l существует весьма простое соотношение, зависящее лишь от так называемой кривизны комплекса, что я и показываю в настоящей работе.

Следует заметить, что кривизна плоской кривой s была найдена еще Гааком [2], пользовавшимся методом дуальных векторов, однако Гаак оставляет найденную им формулу кривизны почти без применений. В настоящей работе я нахожу эту формулу, как и ряд других, пользуясь методом внешних форм Картана. При этом основное внимание уделяется упомянутому выше соотношению между кривизнами кривых l и s (формула (III)).

В третьем пункте работы описывается пространственная кривая, для которой существует соприкасающаяся линейчатая поверхность второго порядка, причем коэффициентами уравнения поверхности являются инварианты, принадлежащие окрестности второго порядка. Эта поверхность обладает тем свойством, что касательная плоскость к ней в каждой точке образующей симметрична относительно главной нормали луча с плоскостью плоской кривой s.

Методом внешних форм Картана при продолжениях систем уравнений Пфаффа последовательно вводятся в рассмотрение некоторые инвариантные функции луча, для которых затем следует отыскивать геометрическое истолкование. В настоящей работе, пользуясь понятиями, связанными с тремя введенными кривыми, я нахожу геометрический смысл инвариантов, принадлежащих окрестностям первого и второго порядка.

Подвижной репер. В метрической теории комплексов с каждым лучом комплекса связывается определенный нормальный трехгранник, ребра которого совпадают соответственно с лучом комплекса $(\overline{I}_3)$, главной нормалью $(\overline{I}_1)$ и бинормалью $(\overline{I}_2)$ комплекса. Вершина нормального трехгранника $\overline{A}$ совпадает с центром луча [2, 3, 4].

Если инфинитезимальные перемещения нормального трехгранника определить равенствами

$$\begin{aligned} d\overline{A} &= \omega_i \overline{I}_i \\ d\overline{I}_i &= \omega_{ik}\overline{I}_k \end{aligned} \quad (\omega_{ik} = -\omega_{ki}, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

то формы ω_2 и ω_{31} будут связаны соотношением

$$\omega_2 = a\omega_{31}, \tag{2}$$

где a — кривизна комплекса ([4], стр. 417).

Внешнее дифференцирование равенства (2) и последующее развертывание по лемме Картана приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= x_1\omega_1 + x_2\omega_{31} + x_3\omega_{32}, \\ da &= x_2\omega_1 + x_4\omega_{31} + x_5\omega_{32}, \\ \omega_3 &= (ax_1 - x_3)\,\omega_1 + (ax_2 - x_5)\,\omega_{31} + (ax_3 - x_6)\,\omega_{32}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — некоторые функции луча. Окрестность луча, определяемую кривизной a, будем называть окрестностью первого порядка, окрестность, определяемую инвариантами a, $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — окрестностью второго порядка [2]. Все дальнейшие исследования мы будем ограничивать окрестностью второго порядка.

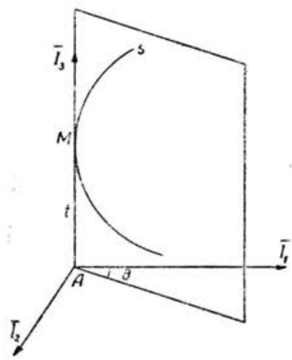

Рис. 1.

1. Кривая s. Известно, что в каждой плоскости располагается некоторая кривая, огибаемая лучами комплекса (в случае линейного комплекса эта кривая вырождается в точку). В частности, пучку плоскостей с осью на луче комплекса соответствует однопараметрическое семейство плоских кривых. Найдем кривизны этих кривых.

Произвольная точка кривой s, огибаемой лучами комплекса, имеет радиус-вектор (рис. 1) $\overline{r} = \overline{A} + t\overline{I}_3$.

Очевидно, $d\overline{r} \parallel \overline{I}_3$, или в силу уравнений (1)

$$\omega_1\overline{I}_1 + \omega_2\overline{I}_2 + \omega_3\overline{I}_3 + dt\overline{I}_3 + t(\omega_{31}\overline{I}_1 + \omega_{32}\overline{I}_2) \parallel \overline{I}_3.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \omega_1 + t\omega_{31} &= 0, \\ \omega_2 + t\omega_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно,

$$d\overline{r} = (\omega_3 + dt)\,\overline{I}_3. \tag{*}$$

Поскольку s — плоская кривая, то должно иметь место равенство

$$(d\bar{r},\ d^2\bar{r},\ d^3\bar{r}) = 0. \tag{**}$$

Дифференцируя равенство (*), получим

$$d^2\bar{r} = d(\omega_3 + dt)\bar{I}_3 + (\omega_3 + dt)(\omega_{31}\bar{I}_1 + \omega_{32}\bar{I}_2),$$

$$d^3\bar{r} = d^2(\omega_3 + dt)\bar{I}_3 + 2d(\omega_3 + dt)(\omega_{31}\bar{I}_1 + \omega_{32}\bar{I}_2) +$$

$$+ (\omega_3 + dt)[d\omega_{31}\bar{I}_1 + d\omega_{32}\bar{I}_2 + \omega_{31}(\omega_{12}\bar{I}_2 + \omega_{13}\bar{I}_3) + \omega_{32}(\omega_{21}\bar{I}_1 + \omega_{23}\bar{I}_3)].$$

Здесь $d\omega_{31}$, $d\omega_{32}$ и т. д. — дифференциалы пфаффовых форм, берущиеся вдоль кривой s. Подставляя значения дифференциалов в равенство (**), получим

$$\omega_{31}(d\omega_{32} + \omega_{31}\omega_{12}) - \omega_{32}(d\omega_{31} + \omega_{32}\omega_{21}) = 0,$$

или

$$\omega_{31}d\omega_{32} - \omega_{32}d\omega_{31} + \omega_{12}(\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2) = 0. \tag{5}$$

Так как проекция вектора $d^2\bar{r}$ на плоскость $\bar{I}_1\bar{I}_2$ есть

$$(\omega_3 + dt)(\omega_{31}\bar{I}_1 + \omega_{32}\bar{I}_2),$$

то, используя равенства (2) и (4), найдем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega_{32}}{\omega_{31}} = a\frac{\omega_{32}}{\omega_2} = -\frac{a}{t}. \tag{6}$$

Так как $\bar{I}_3$ — единичный вектор, то из равенства (*) заключаем, что

$$ds = \omega_3 + dt.$$

Кривизна k кривой s определится, следовательно, из равенства

$$k = \left|\frac{d\bar{I}_3}{ds}\right| = \left|\frac{\omega_{31}\bar{I}_1 + \omega_{32}\bar{I}_2}{\omega_3 + dt}\right| = \frac{\sqrt{\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2}}{\omega_3 + dt} \tag{a}$$

(знак модуля у суммы $\omega_3 + dt$ мы отбрасываем ради простоты дальнейших обозначений). Переписывая второе равенство из системы (4) в виде

$$a\omega_{31} + t\omega_{32} = 0 \tag{b}$$

и дифференцируя его обычным путем, получим

$$da\,\omega_{31} + a\,d\omega_{31} + dt\,\omega_{32} + t\,d\omega_{32} = 0.$$

Заменяя здесь t его значением, найденным из равенства (b), определим дифференциал dt:

$$dt = \frac{a(\omega_{31}d\omega_{32} - \omega_{32}d\omega_{31}) - \omega_{31}\omega_{32}da}{\omega_{32}^2}.$$

Подставляем сюда значение разности $\omega_{31}d\omega_{32} - \omega_{32}d\omega_{31}$, которое найдем из (5):

$$dt = -\frac{a\omega_{12}(\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2) + \omega_{31}\omega_{32}da}{\omega_{32}^2}.$$

Подставляя, наконец, это значение в равенство (a), получим значение кривизны

$$k = \frac{\sqrt{\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2}}{\omega_3 - \dfrac{a\omega_{12}(\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2) + \omega_{31}\omega_{32}da}{\omega_{32}^2}}. \tag{a$'$}$$

Из равенств (4), заменяя ω_2 его значением, найдем

$$\omega_{31} = -\frac{t}{a}\omega_{32}, \quad \omega_1 = \frac{t^2}{a}\omega_{32}. \tag{4'}$$

Внося правые части в равенства (3), получим

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \left(x_1\frac{t^2}{a} - x_2\frac{t}{a} + x_3\right)\omega_{32}, \\ da &= \left(x_2\frac{t^2}{a} - x_4\frac{t}{a} + x_5\right)\omega_{32}, \\ \omega_3 &= \left[(ax_1 - x_3)\frac{t^2}{a} - (ax_2 - x_5)\frac{t}{a} + (ax_3 - x_6)\right]\omega_{32}. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя, наконец, правые части формул (7) и (4′) в формулу (a′), получим окончательное выражение для кривизны кривой s в точке M:

$$k = \frac{a\sqrt{a^2+t^2}}{-x_1t^4 + 2x_2t^3 - (2ax_3 + x_4)t^2 + 2ax_5t - a^2x_6}. \tag{I}$$

Если комплекс линейный, то каждая кривая s вырождается в точку, а потому ее кривизна становится равной бесконечности. Полагая поэтому в формуле (I) знаменатель тождественно равным нулю, получим условия, характеризующие линейный комплекс,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2ax_3 + x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0. \tag{8}$$

Мы исключаем из рассмотрения специальные комплексы $a = 0$.

Формулу (I) можно рассматривать как аналог формулы кривизны нормального сечения поверхности. Экстремальные значения кривизны тогда следует рассматривать как главные кривизны комплекса. Дифференцируя (I) по t и приравнивая нулю результат дифференцирования, получим значения t, соответствующие „главным“ кривизнам,

$$\begin{aligned} &3x_1t^5 - 4x_2t^4 + (4x_1a^2 + 2ax_3 + x_4)t^3 - \\ &- 6x_2a^2t^2 + (4ax_3 + 2x_4 - x_6)a^2t - 2a^3x_5 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, в каждом луче комплекса имеется пять „главных сечений“, т. е. пять линий s, кривизна которых достигает экстремальных значений.

Если кривизна k для каждого значения t остается одной и той же, то равенство (9) будет удовлетворяться любым значением t. Но в таком случае мы будем иметь

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad 2ax_3 + x_4 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_5 = 0.$$

т. е. снова равенства (8). Следовательно, единственным комплексом, все лучи которого — „омбилические“, является линейный комплекс, у которого кривизны всех нормальных „сечений“ становятся равными бесконечности.

2. Кривая l. Известно, что через каждую точку пространства проходит конус прямых комплекса. В частности, прямолинейному ряду точек M, расположенных на луче комплекса, соответствует однопараметрическое семейство таких конусов. Каждый из этих конусов пересекает

плоскость $\overline{I}_1^0\overline{I}_2^0$, соответствующую данному лучу $(\overline{I}_3^0)$, по некоторой плоской кривой l. Найдем кривизну k_1 этой кривой.

Произвольная точка на луче комплекса AM определяется радиусом-вектором (рис. 2)

$$\overline{r} = \overline{A} + \lambda\overline{I}_3.$$

Для точки P пересечения луча AM с плоскостью $\overline{I}_1^0\overline{I}_2^0$ справедливо равенство

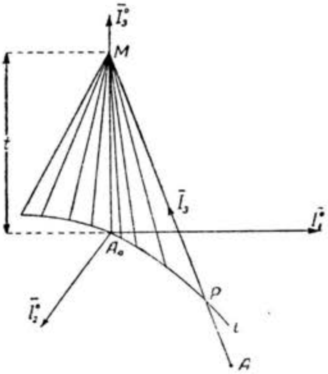

Рис. 2.

$$(\overline{A} + \lambda\overline{I}_3 - \overline{A}_0)\overline{I}_3^0 = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{(\overline{A} - \overline{A}_0)\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0}.$$

Следовательно, радиус-вектор точки P имеет вид

$$\overline{r} = \overline{A} - \frac{(\overline{A} - \overline{A}_0)\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0}\overline{I}_3. \qquad \text{(c)}$$

Кривизну кривой l найдем по формуле

$$k_1 = \frac{|[d\overline{r},\ d^2\overline{r}]|}{|d\overline{r}|^3}. \qquad \text{(d)}$$

Но, дифференцируя (c), будем иметь

$$d\overline{r} = d\overline{A} - d\overline{I}_3\frac{(\overline{A} - \overline{A}_0)\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0} - \overline{I}_3\frac{d\overline{A}\,\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0} + \overline{I}_3\frac{((\overline{A} - \overline{A}_0)\overline{I}_3^0)(d\overline{I}_3\cdot\overline{I}_3^0)}{(\overline{I}_3\overline{I}_3^0)^2},$$

$$d^2\overline{r} = d^2\overline{A} - 2d\overline{I}_3\frac{d\overline{A}\,\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0} - \overline{I}_3\frac{d^2\overline{A}\,\overline{I}_3^0}{\overline{I}_3\overline{I}_3^0} + \cdots$$

(точками обозначены слагаемые, исчезающие при переходе к пределу).

Переходя к пределу при $P \to A_0$, получим:

$$d\overline{r} = d\overline{A} - \overline{I}_3(d\overline{A}\,\overline{I}_3) = \omega_1\overline{I}_1 + \omega_2\overline{I}_2 + \omega_3\overline{I}_3 - \omega_3\overline{I}_3 = \omega_1\overline{I}_1 + \omega_2\overline{I}_2,$$

$$d^2\overline{r} = d^2\overline{A} - 2d\overline{I}_3(d\overline{A}\overline{I}_3) - \overline{I}_3(d^2\overline{A}\overline{I}_3) = d\omega_1\overline{I}_1 + d\omega_2\overline{I}_2 + d\omega_3\overline{I}_3 +$$

$$+\omega_1(\omega_{12}\overline{I}_2 + \omega_{13}\overline{I}_3) + \omega_2(\omega_{21}\overline{I}_1 + \omega_{23}\overline{I}_3) + \omega_3(\omega_{31}\overline{I}_1 + \omega_{32}\overline{I}_2) -$$

$$-2(\omega_{31}\overline{I}_1 + \omega_{32}\overline{I}_2)\omega_3 - \overline{I}_3(d\omega_3 + \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}) =$$

$$= (d\omega_1 + \omega_2\omega_{21} - \omega_3\omega_{31})\overline{I}_1 + (d\omega_2 + \omega_1\omega_{12} - \omega_3\omega_{32})\overline{I}_2.$$

(ради простоты обозначения мы отбросили индекс 0).

Следовательно, равенство (d) будет иметь вид:

$$k_1 = \left[\frac{|\omega_1(d\omega_2 + \omega_1\omega_{12} - \omega_3\omega_{32}) - \omega_2(d\omega_1 + \omega_2\omega_{21} - \omega_3\omega_{31})|}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{P=A_0}. \qquad \text{(d')}$$

Точка M является „ребром возврата" конуса. Для ее отыскания применим известный прием нахождения ребра возврата развертывающейся поверхности ([5], стр. 237). Пусть направляющей линейчатой поверхности является линия, описываемая центром луча A, образующая поверхности параллельна вектору $\overline{I}_3$. Если поверхность является развертывающейся, то должно иметь место равенство $(\bar{I}_3, d\bar{I}_3, d\bar{A}) = 0$, откуда $d\bar{I}_3 = \alpha\bar{I}_3 + \beta d\bar{A}$, где α, β — некоторые коэффициенты, или

$$\omega_{31}\bar{I}_1 + \omega_{32}\bar{I}_2 = \alpha\bar{I}_3 + \beta(\omega_1\bar{I}_1 + \omega_2\bar{I}_2 + \omega_3\bar{I}_3).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\omega_{31} &= \beta\omega_1,\\ \omega_{32} &= \beta\omega_2.\end{aligned} \tag{e}$$

Радиус-вектор точки ребра возврата развертывающейся поверхности определится в соответствии с указанным приемом формулой

$$\bar{R} = \bar{A} - \frac{1}{\beta}\bar{I}_3 = \bar{A} - \frac{\omega_1}{\omega_{31}}\bar{I}_3.$$

У рассматриваемого нами конуса радиус-вектор постоянен и равен

$$\bar{R} = \bar{A}_0 + t\bar{I}_3^0 \quad (\text{где } t = A_0M).$$

Следовательно,

$$\bar{A} - \frac{\omega_1}{\omega_{31}}\bar{I}_3 = \bar{A}_0 + t\bar{I}_3^0. \tag{f}$$

Дифференцируя это равенство, найдем

$$d\bar{A} - \frac{\omega_{31}\,d\omega_1 - \omega_1\,d\omega_{31}}{\omega_{31}^2}\bar{I}_3 - \frac{\omega_1}{\omega_{31}}d\bar{I}_3 = 0,$$

или

$$\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_{31}}\omega_{32}\right)\bar{I}_2 + \left(\omega_3 - \frac{\omega_{31}\,d\omega_1 - \omega_1\,d\omega_{31}}{\omega_{31}^2}\right)\bar{I}_3 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_2 - \frac{\omega_1}{\omega_{31}}\omega_{32} = 0, \quad \omega_3 - \frac{\omega_{31}\,d\omega_1 - \omega_1\,d\omega_{31}}{\omega_{31}^2} = 0. \tag{g}$$

Первое равенство, между прочим, следует также из равенств (e). Второе равенство перепишем в виде

$$\omega_3\omega_{31}^2 - (\omega_{31}\,d\omega_1 - \omega_1\,d\omega_{31}) = 0.$$

Используя его, будем иметь

$$\begin{aligned}\omega_1\,d\omega_2 - \omega_2\,d\omega_1 &= \omega_1(da\,\omega_{31} + a\,d\omega_{31}) - a\omega_{31}\,d\omega_1 = \\ &= \omega_1\omega_{31}\,da + a(\omega_1\,d\omega_{31} - \omega_{31}\,d\omega_1) = \omega_1\omega_{31}\,da - a\omega_3\omega_{31}^2.\end{aligned}$$

Учитывая полученные равенства, мы приведем формулу (d′) к виду:

$$k_1 = \left[\frac{|\omega_1\omega_{31}\,da - a\omega_3\omega_{31}^2 + \omega_{12}(\omega_1^2 + \omega_2^2)|}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{P=A_0}.$$

Из (f) заключаем, что для луча (I_3^0) имеет место равенство

$$t = \left[-\frac{\omega_1}{\omega_{31}}\right]_0.$$

Отсюда и из первого равенства (g) находим

$$\omega_1 = \frac{t^2}{a}\omega_{32}, \quad \omega_{31} = -\frac{t}{a}\omega_{32} \tag{10}$$

(для начального луча $\overline{I}_3^0$). Подставляя эти значения в равенства (3), мы приведем их к виду (7). Отбрасывая индекс 0 и знак модуля, мы получим окончательное выражение для кривизны k_1:

$$k_1 = \frac{-x_1t^4+2x_2t^3-(x_4+2ax_3)t^2+2ax_5t-a^2x_6}{t(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{II}$$

Сравнивая формулы (I) и (II), заключаем, что между кривизнами плоских кривых s и l существует весьма простое соотношение, зависящее лишь от кривизны комплекса a и от положения точки M на луче,

$$kk_1 = \frac{a}{t(a^2+t^2)}. \tag{III}$$

Мы имеем

$$d\overline{A} = \omega_1\overline{I}_1 + \omega_2\overline{I}_2 + \omega_3\overline{I}_3.$$

Проекция $d\overline{A}$ на плоскость $\overline{I}_1\overline{I}_2$ есть

$$\omega_1\overline{I}_1 + \omega_2\overline{I}_2.$$

Для конуса справедливы равенства (см. выше)

$$\omega_1 = \frac{t^2}{a}\omega_{32}, \quad \omega_2 = -t\omega_{32}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{a}{t}, \tag{11}$$

где θ_1 — угол, образуемый касательной плоскостью конуса с вектором $\overline{I}_1$. Сравнивая формулы (II) и (6), заключаем, что

$$\theta = \theta_1,$$

т. е. касательная плоскость конуса, имеющего вершину в точке M, совпадает с плоскостью кривой s, касающейся луча в той же точке. Нормали кривых l и s образуют, следовательно, прямой угол (рис. 3).

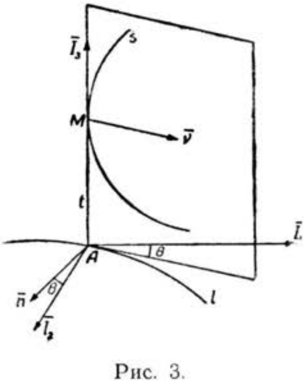

Рис. 3.

До сих пор мы рассматривали плоские кривые s и l, связанные между собой тем условием, что вершина конуса, на котором располагается кривая l, совпадает с точкой, соответствующей плоскости кривой s. Освободимся теперь от этого условия и рассмотрим произвольные кривые l и s. Пусть вершина конуса, на котором лежит кривая l, находится в точке M_1 луча, точкой же, соответствующей плоскости кривой s, пусть будет некоторая точка M. Пусть t_1 и t — расстояния точек M_1 и M от центра луча. В этом случае нормали $\overline{\nu}$ и $\overline{n}$ кривых s и l могут образовывать между собой произвольный угол.

Если нормали $\overline{\nu}$ и $\overline{n}$ параллельны, то $\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$, где попрежнему θ — угол между плоскостью кривой s и главной нормалью комплекса $\overline{I}_1$, θ_1 —

угол между касательной плоскостью конуса (с вершиной в точке M_1) и вектором $\bar{I}_1$. Следовательно,

$$-\frac{a}{t_1} = \operatorname{tg}\theta_1 = -\operatorname{ctg}\theta = \frac{t}{a}.$$

Отсюда

$$tt_1 = -a^2. \tag{12}$$

Это означает, что точки M и M_1 располагаются по разные стороны от центра. Если $t = a$, то $t_1 = -a$, т. е. в этом случае точки M и M_1 оказываются симметричными относительно центра. В этом случае $\operatorname{tg}\theta = -1$, следовательно, нормали кривых s и l оказываются биссектрисами второго координатного угла векторов $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$. Равенство (12) симметрично относительно t и t_1, а это означает, что если точка M переместится в точку M_1, то точка M_1 переместится в точку M. Если же $t = -a$, то векторы $\bar{\nu}$ и $\bar{n}$ оказываются биссектрисами первого координатного угла.

Если взять две произвольные точки M и M_1 на одном и том же расстоянии от центра, то можно показать, что векторы $\bar{\nu}$ и $\bar{n}$ симметричны относительно биссектрис координатных углов.

Из формулы (I) можно заключить, что кривизна плоской кривой s, касающейся луча комплекса в его центре ($t = 0$), равна $\frac{1}{x_6}$. Следовательно, инвариант x_6 — радиус кривизны этой кривой. Мы нашли, таким образом, геометрическое истолкование инварианта x_6. Для бесконечно удаленной точки луча кривизна кривой s становится равной нулю.

Из формулы (II) заключаем, что кривизна кривой l для бесконечно удаленной точки луча (т. е. для цилиндра комплекса) становится равной x_1. Таков геометрический смысл инварианта x_1.

Что же касается кривизны комплекса a, то ее можно истолковать (см. равенство (12)) как среднее пропорциональное между расстояниями от центра точек M и M_1, в которых параллельны нормали плоских кривых s и l.

На конусе комплекса располагается линия центров. Если эту линию спроектировать на плоскость $\bar{I}_1^0\bar{I}_2^0$ параллельно вектору $\bar{I}_3^0$, то кривизна проекции в точке A_0 будет равна кривизне кривой l в той же точке.

3. Возьмем три достаточно близких луча комплекса вдоль некоторой кривой. Эти лучи определят линейчатую поверхность второго порядка, соприкасающуюся с комплексом. Выберем кривую так, чтобы коэффициенты уравнения поверхности относительно нормального трехгранника принадлежали окрестности второго порядка луча комплекса, т. е. определялись инвариантами $a, x_1, x_2, \ldots, x_6$.

Уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + 2c_{10}x + 2c_{20}y + \\ + 2c_{30}z + c_{00} = 0. \tag{h}$$

Произвольная точка на луче комплекса определяется радиусом-вектором $\bar{A} + t\bar{I}_3$. Подставляя координаты этого вектора в уравнение (h) и приравнивая нулю коэффициенты при t^2, t и свободный член, получим

$$\bar{A}\bar{A} = 0, \quad \bar{A}\bar{I}_3 = 0, \quad \bar{I}_3\bar{I}_3 = 0 \tag{i}$$

где через $\overline{A}\overline{A}=0$ обозначено уравнение

$c_{11}x^2+c_{22}y^2+\cdots+c_{00}=0$ (x, y, z — координаты вектора $\overline{A}$),

через $\overline{I}_3\overline{I}_3=0$ — уравнение

$c_{11}x_3^2+c_{22}y_3^2+\cdots+c_{00}=0$ (x_3, y_3, z_3 — координаты вектора $\overline{I}_3$),

через $A\overline{I}_3=0$ — уравнение

$$c_{11}xx_3+c_{22}yy_3+c_{33}zz_3+c_{12}(xy_3+yx_3)+\cdots+c_{00}=0.$$

Дифференцируя уравнения (i) вдоль некоторой кривой, получим

$$\overline{A}(\omega_1\overline{I}_1+\omega_2\overline{I}_2+\omega_3\overline{I}_3)=0,$$
$$\overline{A}(\omega_{31}\overline{I}_1+\omega_{32}\overline{I}_2)+(\omega_1\overline{I}_1+\omega_2\overline{I}_2+\omega_3I_3)\overline{I}_3=0,$$
$$\overline{I}_3(\omega_{31}\overline{I}_1+\omega_{32}\overline{I}_2)=0,$$

или (учитывая равенства (i))

$$\omega_1\overline{A}\,\overline{I}_1+a\omega_{31}\overline{A}\,\overline{I}_2=0,$$
$$\omega_{31}\overline{A}\overline{I}_1+\omega_{32}\overline{A}\overline{I}_2+\omega_1\overline{I}_1\overline{I}_3+a\omega_{31}\overline{I}_2\overline{I}_3=0, \qquad \text{(j)}$$
$$\omega_{31}\overline{I}_1\overline{I}_3+\omega_{32}\overline{I}_2\overline{I}_3=0.$$

Эти равенства нам необходимо продифференцировать вдоль той же самой кривой. Для того чтобы новое дифференцирование не вывело за окрестность второго порядка, надо чтобы в равенствах (j) не содержалось форм. Легко, однако, видеть, что эти формы могут исчезнуть лишь в трех случаях:

1) $\omega_{31}=\omega_{32}=0$,
2) $\omega_1=\omega_{31}=0$,
3) $\omega_1=\omega_{32}=0$.

Исследуем каждый из этих случаев.

1) Кривая, определяемая равенствами $\omega_{31}=\omega_{32}=0$, есть не что иное, как линия центров, расположенная на цилиндре комплекса. Следовательно, все лучи комплекса вдоль этой линии параллельны. Соприкасающейся линейчатой поверхностью будет некоторая цилиндрическая поверхность второго порядка. В данном случае равенства (j) после сокращений примут вид:

$$\overline{A}\overline{I}_1=0, \quad \overline{I}_1\overline{I}_3=0, \quad 0=0. \qquad \text{(j')}$$

Дифференцируя еще раз эти равенства вдоль данной кривой, получим

$$(\omega_1\overline{I}_1+\omega_3\overline{I}_3)\overline{I}_1+\overline{A}\omega_{12}\overline{I}_2=0, \quad \omega_{12}\overline{I}_2\overline{I}_3=0;$$

отсюда

$$\omega_1\overline{I}_1\overline{I}_1+\omega_{12}\overline{A}\overline{I}_2=0, \quad \overline{I}_2\overline{I}_3=0.$$

Вносся равенства $\omega_{31}=\omega_{32}=0$ в формулы (3), получим, в частности,

$$\omega_{12}=x_1\omega_1.$$

Подставляя это значение ω_{12} в первое из предыдущих равенств и сокращая на ω_1, приведем эти равенства к виду

$$x_1\overline{I}_1\overline{I}_1+\overline{A}\overline{I}_2=0, \quad \overline{A}_2\overline{I}_3=0. \qquad \text{(k)}$$

Если за координатные оси принять ребра подвижного нормального трехгранника, то равенства (i), (j′)) и (k) примут вид:

$$c_{00}=0,\quad c_{03}=0,\quad c_{33}=0,\quad c_{01}=0,\quad c_{13}=0,\quad c_{11}+x_1c_{02}=0,\quad c_{23}=0.$$

Уравнение соприкасающегося цилиндра получим, внеся эти коэффициенты в уравнение (h),

$$-x_1X^2+c_{22}Y^2+2c_{12}XY+2Y=0. \tag{13}$$

Это — целая связка цилиндров с параметрами c_{22} и c_{12}.

2) Для кривой, определяемой равенствами $\omega_1=\omega_{31}=0$, уравнения (j) принимают вид:

$$0=0,\quad \overline{A}\overline{I}_2=0,\quad \overline{I}_2\overline{I}_3=0. \tag{l}$$

Вдоль этой кривой $d\overline{A}=\omega_3\overline{I}_3$, следовательно, эта кривая огибается лучами комплекса. Мы ищем, таким образом, соприкасающуюся поверхность второго порядка, проходящую через три бесконечно близких касательных к пространственной кривой. Очевидно, такая поверхность будет не единственной. Дифференцируя равенства (l) вдоль данной кривой, получим

$$\omega_3\overline{I}_3\overline{I}_2+\overline{A}\omega_{21}\overline{I}_1=0,\quad \omega_{21}\overline{I}_1\overline{I}_3+\overline{I}_2\omega_{32}\overline{I}_2=0;$$

отсюда

$$\overline{A}\overline{I}_1=0,\quad -x_3\overline{I}_1\overline{I}_3+\overline{I}_2\overline{I}_2=0. \tag{m}$$

Принимая за координатный трехгранник подвижной нормальный трехгранник комплекса, мы из равенств (i), (l) и (m) получим

$$c_{00}=0,\ c_{03}=0,\ c_{33}=0,\ c_{02}=0,\ c_{23}=0,\ c_{01}=0,\ -x_3c_{13}+c_{22}=0.$$

Следовательно, уравнение соприкасающейся поверхности примет вид:

$$c_{11}X^2+x_3Y^2+2c_{12}XY+2XZ=0. \tag{14}$$

Это также целая связка поверхностей с параметрами c_{11} и c_{12}.

3) Для кривой, определяемой равенствами $\omega_1=\omega_{32}=0$ уравнения (j) принимают вид:

$$\overline{A}\overline{I}_2=0,\quad \overline{A}\overline{I}_1+a\overline{I}_2\overline{I}_3=0,\quad \overline{I}_1\overline{I}_3=0. \tag{n}$$

Дифференцируя эти равенства еще раз вдоль той же самой кривой, получим

$$\begin{gathered}(\omega_2\overline{I}_2+\omega_3\overline{I}_3)\overline{I}_2+\overline{A}\omega_{21}\overline{I}_1=0,\\ (\omega_2\overline{I}_2+\omega_3\overline{I}_3)\overline{I}_1+\overline{A}(\omega_{12}\overline{I}_2+\omega_{13}\overline{I}_3)+da\overline{I}_2\overline{I}_3+a\omega_{21}\overline{I}_1\overline{I}_3+a\omega_{31}\overline{I}_2\overline{I}_1=0,\\ (\omega_{12}\overline{I}_2+\omega_{13}\overline{I}_3)\overline{I}_3+\omega_{31}\overline{I}_1\overline{I}_1=0.\end{gathered} \tag{p}$$

Легко видеть, что для рассматриваемой кривой справедливы равенства

$$\omega_2=a\omega_{31},\ \omega_3=(ax_2-x_5)\omega_{31},\ \omega_{12}=x_2\omega_{31},\ da=x_4\omega_{31}.$$

Внося эти значения в равенства (p) и производя сокращения в силу предыдущих соотношений, получим

$$\begin{gathered}a\overline{I}_2\overline{I}_2+(ax_2-x_5)\overline{I}_2\overline{I}_3-x_2\overline{A}\overline{I}_1=0,\\ a\overline{I}_1\overline{I}_2+x_4\overline{I}_2\overline{I}_3+a\overline{I}_1\overline{I}_2=0,\\ x_2\overline{I}_2\overline{I}_3+\overline{I}_1\overline{I}_1=0.\end{gathered} \tag{q}$$

При совпадении координатного трехгранника с подвижным из условий (i), (n) и (q) будем иметь соотношения для коэффициентов уравнения соприкасающейся поверхности второго порядка:

$$c_{00}=0,\quad c_{03}=0,\quad c_{33}=0,\quad c_{02}=0,\quad c_{01}+ac_{23}=0,\quad c_{13}=0,$$
$$ac_{22}+(ax_2-x_5)c_{23}-x_2c_{01}=0,\quad 2ac_{12}+x_4c_{23}=0,\quad x_2c_{23}+c_{11}=0.$$

Следовательно, уравнение искомой поверхности будет иметь вид:

$$ax_2X^2+(2ax_2-x_5)Y^2+x_4XY-2aYZ+2a^2X=0. \tag{15}$$

Касательная плоскость этой поверхности в точке $M(0,\ 0,\ t)$ луча имеет уравнение

$$aX-tY=0.$$

Отсюда заключаем, что эта плоскость образует с вектором $\overline{I}_1$ (осью x) угол θ_1, определяемый равенством

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{a}{t}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (6), заключаем, что $\theta_1=-\theta$. Следовательно, касательная плоскость поверхности (15) в точке M симметрична плоскости кривой s, касающейся луча в той же точке, относительно главной нормали комплекса.

Центр поверхности (15) имеет координаты

$$X=-\frac{a}{x_2};\quad Y=0,\quad Z=-\frac{x_4}{2x_2}.$$

Следовательно, поверхность (15) является однополостным гиперболоидом. Эта поверхность становится гиперболическим параболоидом для комплексов

$$x_2=0.$$

Центр поверхности лежит на главной нормали комплекса, если $x_4=0$. У таких комплексов для кривой $\omega_1=\omega_{32}=0$ справедливо также равенство $da=0$, т. е. вдоль рассматриваемой кривой $a=\text{const}$.

Касательная плоскость поверхности (15) в центре луча совпадает с плоскостью $\overline{I}_2\overline{I}_3$. Через центр проходят две образующие гиперболоида: одна из них совпадает с лучом $(\overline{I}_3)$ $(x=y=0)$, другая определяется уравнениями

$$x=0,\quad (2ax_2-x_5)Y-2aZ=0.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{2ax_2-x_5}{2a},$$

где ψ — угол, образуемый второй прямолинейной образующей с вектором $\overline{I}_2$. С другой стороны, касательная к линии $\omega_1=\omega_{32}=0$ определяется вектором

$$d\overline{A}=a\omega_{31}\overline{I}_2+\omega_3\overline{I}_3.$$

Но

$$\omega_3=(ax_2-x_5)\,\omega_{31}.$$

Следовательно,

$$d\bar{A} = \omega_{31}[a\bar{I}_2 + (ax_2 - x_5)\bar{I}_3].$$

Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ax_2 - x_5}{a},$$

где φ — угол между касательной и бинормалью ($\bar{I}_2$) комплекса. Касательная к кривой $\omega_1 = \omega_{32} = 0$ совпадает со второй прямолинейной образующей поверхности (15), если $\varphi = \psi$. Легко видеть, что такое совпадение имеет место лишь для комплексов

$$x_5 = 0.$$

Тем самым мы определили геометрический смысл инвариантов x_2, x_4, x_5.

4. Кривые $\omega_1 = \omega_{31} = 0$ Гаак называет центральными кривыми. Все касательные к этим кривым являются лучами комплекса, причем каждая точка касания представляет собой центр соответствующего луча.

Единичным вектором касательной к центральной кривой является вектор $\bar{I}_3$. Вдоль кривой имеем равенство $d\bar{I}_3 = \omega_{32}\bar{I}_2$. Следовательно, главной нормалью центральной кривой является бинормаль комплекса. Единичный вектор бинормали центральной кривой будет поэтому определяться равенством

$$\bar{\beta} = \bar{I}_3 \times \bar{I}_2 = -\bar{I}_1,$$

т. е. этот вектор противоположен единичному вектору $\bar{I}_1$ главной нормали комплекса. Кручение центральной кривой χ определим из равенства

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\frac{d\bar{I}_1}{ds} = -\frac{\omega_{12}\bar{I}_2}{ds} = \chi\bar{I}_2.$$

Следовательно,

$$\chi = -\frac{\omega_{12}}{ds}.$$

Из равенства $d\bar{A} = \omega_3\bar{I}_3$ заключаем, что $ds = \omega_3$. Следовательно,

$$\chi = -\frac{\omega_{12}}{\omega_3}. \tag{г}$$

Первое и третье равенства (3) для центральной кривой принимают вид:

$$\omega_{12} = x_3\omega_{32},$$
$$\omega_3 = (ax_3 - x_6)\omega_{32}.$$

Внося в (г) эти значения форм, получим формулу кручения пространственной кривой (центральной):

$$\chi = -\frac{x_3}{ax_3 - x_6}.$$

У комплекса

$$x_3 = 0$$

все центральные кривые являются плоскими. Тем самым определен геометрический смысл и инварианта x_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegrundet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, 1868—1869, Leipzig.

2. W. Haak, Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe: I, Mathematische Zeitschrift, B. 40, 1935, S. 560—561; II, ibid., S. 703—718; IV, B. 41, S. 252—260.

3. С. П. Фиников, Геометрия комплекса прямых, Ученые записки Московского городского пед. института им. В. П. Потемкина, вып. I, т. I, 1940.

4. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.—Л., 1948.

5. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М.—Л., 1938.

Получена 12 января 1953 г.

Запорожье.