Напряжения в трубе при внезапном приложении нагрузки

Е. Х. Агабабян

Основной целью настоящей работы является исследование напряжений, возникающих в круглой трубе под действием внезапно возникшего равномерно распределенного по ее внутренней границе давления, которое в дальнейшем остается постоянным. Задача решается в условиях плоской деформации трубы. Материал трубы принимается несжимаемым и подчиняющимся законам упругопластических деформаций.

Обозначив через $U = U(r, t)$ радиальное смещение точек трубы, из условия несжимаемости имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = 0.$$

Решая уравнение, получим

$$U = \frac{C(t)}{r},$$

где $C(t)$ — подлежащая определению функция времени.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \varrho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{1}$$

В случае упругой деформации

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -4\mu \frac{C(t)}{r^2} \tag{2}$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \varrho \frac{C''(t)}{r} + 4\mu \frac{C(t)}{r^3}.$$

Интегрируя его и используя граничное условие

$$r = b \quad \sigma_r = 0$$

(b — наружный радиус трубы), получим формулу, определяющую напряжение σ_r в упругой области

$$\sigma_r = \varrho C''(t) \ln \frac{r}{b} - 2\mu \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right) C(t). \tag{3}$$

Используя второе граничное условие

$$r = a, \quad \sigma_r = -P$$

(a — внутренний радиус трубы), получим дифференциальное уравнение для определения функции $C(t)$:

$$P=\varrho \ln\frac{b}{a}\cdot C''(t)+2\mu\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)C(t) \tag{4}$$

со следующими начальными условиями:

$$t=0,\ C=0,\ C'=0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$C(t)=\frac{Pa^2b^2}{2\mu(b^2-a^2)}(1-\cos\omega t), \tag{5}$$

где

$$\omega^2=\frac{2\mu(b^2-a^2)}{\varrho a^2b^2\ln\dfrac{b}{a}}. \tag{6}$$

Подставляя выражение (5) в формулу (3), получим

$$\sigma_r=-\frac{a^2b^2P}{b^2-a^2}\left\{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}+\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^2\ln\dfrac{b}{a}}\ln\frac{b}{r}-\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]\cos\omega t\right\}. \tag{3'}$$

Из соотношения (2) имеем

$$\sigma_\theta=\frac{a^2b^2P}{b^2-a^2}\left\{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}-\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^2\ln\dfrac{b}{a}}\ln\frac{b}{r}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right]\cos\omega t\right\}.$$

Представляет интерес подсчитать величину среднего напряжения

$$\frac{\sigma_r+\sigma_\theta}{2}=\frac{a^2b^2P}{b^2-a^2}\left\{\frac{1}{b^2}-\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^2\ln\dfrac{b}{a}}\ln\frac{b}{r}+\frac{1}{b^2}\right]\cos\omega t\right\}.$$

Рассмотренный пример показывает, что труба будет совершать колебания с частотой ω около состояния, соответствующего решению статической задачи Ляме о равновесии упругой несжимаемой трубы под действием внутреннего давления P.

Очевидно, что упругие колебания возможны лишь при соблюдении условия

$$|\sigma_r-\sigma_\theta|<2K,$$

где K — пластическая постоянная. Согласно (2) это условие приводится к виду

$$\frac{4\mu C(t)}{r^2}<2K.$$

Последнее показывает, что переход материала в пластическое состояние начнется на внутренней границе трубы в момент времени t^*, определяемый равенством

$$\sin^2\frac{\omega t^*}{2}=\frac{K(b^2-a^2)}{2b^2P},$$

при условии, что давление P больше предельного

$$P_c = \frac{K(b^2 - a^2)}{2b^2}.$$

Дифференциальное уравнение движения, относящееся к пластической области, имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \varrho \frac{C''(t)}{r} + \frac{2K}{r}.$$

Интегрируя это уравнение и используя граничное условие

$$r = a, \ \sigma_r = -P,$$

получим для пластической зоны

$$\sigma_r = -P + [2K + \varrho C''(t)] \ln \frac{r}{a}. \tag{7}$$

Обозначим через $r^*(t)$ переменный радиус границы между пластической и упругой областями. На этой границе значения σ_r, определяемые формулами (3) и (7), должны совпадать:

$$P - [2K + \varrho C''(t)] \ln \frac{r^*(t)}{a} = \left[\frac{1}{r^{*2}} - \frac{1}{b^2}\right] 2\mu C(t) + \varrho C''(t) \ln \frac{b}{r^*(t)}.$$

Так как при $r = r^*$

$$\frac{4\mu C}{r^{*2}} = 2K, \tag{8}$$

то из полученного дифференциального соотношения можно исключить функцию $C(t)$.

Если ввести обозначения

$$x(t) = \frac{r^{*2}(t)}{a^2}, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

то дифференциальное уравнение, определяющее распространение границы пластической зоны, примет вид:

$$\frac{a^2 \varrho}{2\mu} \ln \beta \cdot x''(t) + \ln x(t) - \frac{x(t)}{\beta^2} = \frac{P}{K} - 1. \tag{9}$$

Оно имеет следующие начальные условия:

$$\text{при} \quad t = t^*, \ x = 1, \ x' = \frac{2\mu}{Ka^2} C'(t^*).$$

Формулы (3) и (7) для напряжения σ_r в упругой и пластической областях могут быть преобразованы посредством замены функции $C(t)$ на функцию $X(t)$ согласно (8):

$$\sigma_r = -K \left[\frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{a^2}{b^2} x - 1 - \ln x + \frac{P}{K}\right) + \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{b^2}\right) x \right] \tag{3''}$$

$$\sigma_r = K \left[2 + \frac{\frac{P}{K} + \frac{a^2}{b^2} x - 1 - \ln x}{\ln \frac{b}{a}} \right] \ln \frac{r}{a} - P. \tag{7'}$$

Первая формула относится к упругой области и справедлива при $r > a\sqrt{x}$, вторая относится к пластической области, в ней следует считать $r < a\sqrt{x}$. При $r = a\sqrt{x}$ обе формулы дают одно и то же значение σ_r. Формулу касательного напряжения $\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}$ для упругой области получим посредством замены функции $C(t)$ на функцию $x(t)$ в соотношении (2)

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = -\frac{Ka^2}{r^2}x(t), \tag{2'}$$

для пластической области

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = -K.$$

Легко видеть, что формулы для напряжения σ_θ примут вид:
в упругой области

$$\sigma_\theta = -K\left[\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}\left(\frac{a^2}{b^2}x - 1 - \ln x + \frac{P}{K}\right) - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{r^2}\right)x\right],$$

в пластической области

$$\sigma_\theta = K\left[2 + \frac{\frac{P}{K} + \frac{a^2}{b^2}x - 1 - \ln x}{\ln\frac{b}{a}}\right]\ln\frac{r}{a} - P + 2K.$$

Если считать, что в момент времени $t = 0$ к внутренней границе трубы приложен равномерно распределенный импульс давления интенсивности I, то в полученных формулах следует положить P равным нулю.

Для этого случая на рис. 1, 2, 3 даны графики функций

$$\frac{\sigma_r}{K},\quad \frac{\sigma_\theta}{K},\quad \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2K} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2K}$$

при $\frac{b}{a} = 3$ для последовательных значений радиуса пластической зоны r^*, возрастающего со временем.

Формулы для напряжений не зависят от характера дифференциального уравнения (9). Решение этого уравнения упрощается, если положить в нем $P = 0$, т. е. считать, что в момент времени $t = 0$ подействовал импульс давления.

Интегрируя в пределах малого интервала времени, заключающего импульс, уравнение (4) и учитывая, что

$$C'(-0) = 0, \quad C(0) = 0,$$

получим

$$I = \varrho \ln\frac{b}{a} C'(+0).$$

Для моментов времени $t > 0$ дифференциальное уравнение (4) представится в виде:

$$\varrho C''(t)\ln\frac{b}{a} + 2\mu\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)C(t) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$C(t)=\frac{I}{\omega\varrho\ln\frac{b}{a}}\sin\omega t.$$

В момент времени t^*, определяемый из соотношения

$$\sin\omega t^*=\frac{\omega\varrho Ka^2\ln\frac{b}{a}}{2I\mu},$$

на внутренней границе трубы появляется пластическая зона. Закон распространения радиуса пластической зоны определяется дифференциальным уравнением (9), которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{a^2\varrho}{2\mu}x''(t)\ln\beta+\ln x(t)-\frac{x(t)}{\beta^2}=-1. \tag{9'}$$

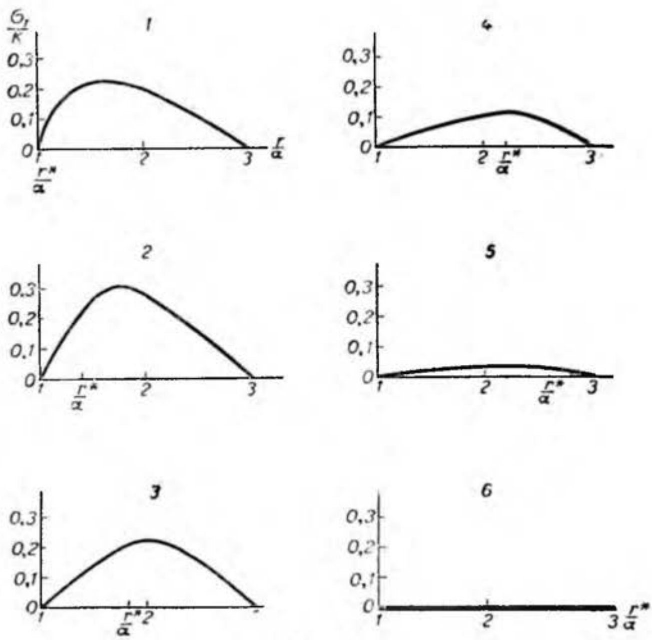

Рис. 1.

Начальными условиями его являются

$$\text{при}\quad t=t^*\quad x=1,\quad x'(t^*)=\frac{2I\mu}{Ka^2\varrho\ln\frac{b}{a}}\cos\omega t^*.$$

Уравнение (9′) допускает интеграл

$$\frac{a^2\varrho\ln\beta}{2\mu}(x')^2=\frac{a^2\varrho\ln\beta}{2\mu}[x'(t^*)]^2-2x\ln x+\frac{x^2-1}{\beta^2}.$$

Пользуясь последним, можно найти минимальную величину $x'(t^*)$, при которой пластическая область полностью захватит всю трубу. Для этого следует положить

$$x=\beta^2,$$

тогда

$$\frac{a^2\varrho \ln \beta}{2\mu}[x'(t^*)]^2 = 2\beta^2 \ln \beta^2 - \frac{\beta^4-1}{\beta^2}. \tag{10}$$

Найдем теперь величину соответствующего импульса давлений. С этой целью из соотношений

$$\frac{2\mu I}{\varrho \ln \frac{b}{a}} \cos \omega t^* = Ka^2 x'(t^*)$$

и

$$\frac{2\mu I}{\varrho \ln \frac{b}{a}} \sin \omega t^* = Ka^2\omega$$

исключим t^*.

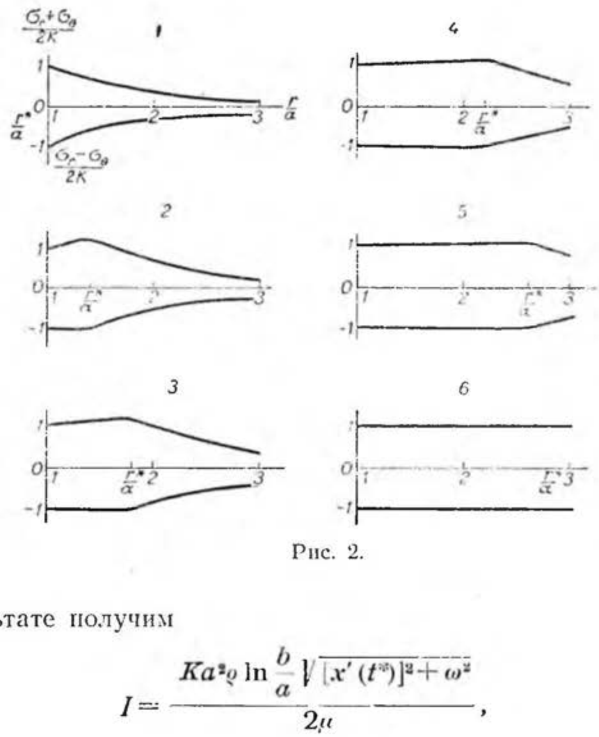

Рис. 2.

В результате получим

$$I = \frac{Ka^2\varrho \ln \frac{b}{a} \sqrt{[x'(t^*)]^2+\omega^2}}{2\mu},$$

где $x'(t^*)$ определяется формулой (10), а ω формулой (6).

В окончательном виде формула для импульса имеет вид:

$$I = K \ln \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\varrho}{2\mu}\left(4b^2 - \frac{b^2-a^2}{\ln \frac{b}{a}}\right)}.$$

Если начальный импульс столь велик, что пластическая зона достигает внешней границы и далее происходит инерционное пластическое расширение трубы, то, как нетрудно показать, напряжение σ_r всюду обращается в 0.

Действительно, согласно формуле (7) при $P=0$ имеем в пластической области

$$\sigma_r = [2K + \varrho C''(t)] \ln \frac{r}{a}.$$

Так как пластическая область целиком занимает всю трубу, то σ_r в последней формуле обращается в 0 при $r=b$ и, следовательно, $\sigma_r = 0$, так как

$$2K + \varrho C''(t) \equiv 0.$$

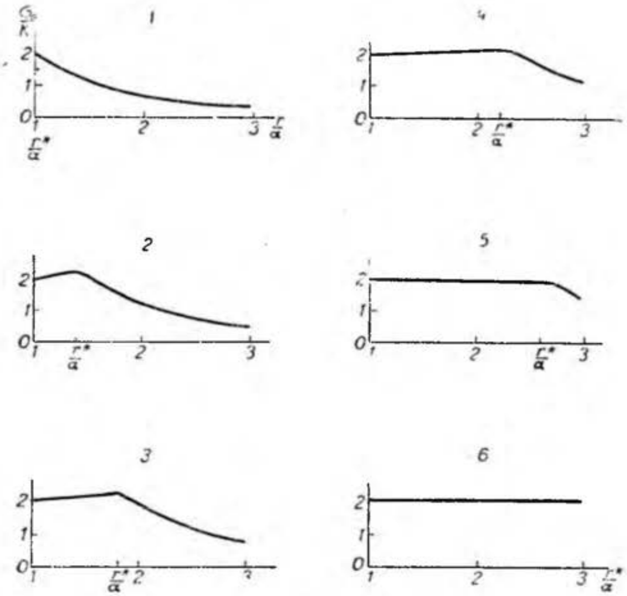

Рис. 3.

Отсюда получаем закон пластического расширения трубы:

$$C''(t) = -\frac{2K}{\varrho}.$$

В момент времени t^{**}, при котором

$$C' = 0, \quad C = C_1, \tag{11}$$

пластическая деформация сменится упругой разгрузкой, подчиняющейся закону

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) - (\sigma_r' - \sigma_\theta') = 2\mu [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) - (\varepsilon_r' - \varepsilon_\theta')], \tag{12}$$

где σ_r' σ_θ', ε_r' и ε_θ' — напряжения и деформации, достигнутые в конце пластического расширения.

Так как

$$\sigma_r' - \sigma_\theta' = -2K,$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = -\frac{2C(t)}{r^2}, \quad \varepsilon_r' - \varepsilon_\theta' = -\frac{2C_1}{r^2},$$

то из соотношения (12) имеем:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2K + \frac{4\mu}{r^2}[C_1 - C(t)]. \tag{12'}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение движения (1) в случае упругой разгрузки примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2K}{r} - \frac{4\mu}{r^3}[C_1 - C(t)] + \varrho \frac{C''(t)}{r}.$$

Интегрируя это уравнение и используя граничное условие

$$r = a, \quad \sigma_r = 0,$$

получим

$$\sigma_r = 2K \ln\frac{r}{a} + 2\mu [C_1 - C(t)]\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \varrho C''(t) \ln\frac{r}{a}.$$

Второе граничное условие

$$r = b, \quad \sigma_r = 0$$

позволяет получить дифференциальное уравнение для функции $C(t)$

$$\varrho C''(t) \ln\frac{b}{a} + 2\mu\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)[C_1 - C(t)] = -2K \ln\frac{b}{a}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (11), имеет вид:

$$C(t) = C_1 - \frac{2K \ln\frac{b}{a}}{2\mu\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}[1 - \cos\omega(t - t^{**})], \tag{13}$$

где

$$\omega^2 = \frac{2\mu(b^2 - a^2)}{\varrho a^2 b^2 \ln\frac{b}{a}}.$$

Оно показывает, что упругая разгрузка сводится к гармоническим радиальным колебаниям с частотой ω при наличии остаточных напряжений.

Обратная пластическая деформация возникает в момент времени t^{***}, при котором наступит равенство

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2K,$$

или согласно (12')

$$\frac{4\mu}{a^2}[C_1 - C(t^{***})] = 4K.$$

Используя равенство (13), окончательно получим

$$\sin^2\frac{\omega(t^{***} - t^{**})}{2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Получена 10 января 1953 г.
Москва.