

## О колебаниях в гироскопических системах при прохождении через резонанс

Ю. А. Митропольский

В настоящей работе рассматриваются колебания в гироскопических системах при прохождении через резонанс.

Во многих конструкциях центрифуг, сепараторов и других гироскопических приборов рабочая скорость лежит выше одного, а иногда и двух критических чисел оборотов. В этом случае прохождение через резонанс является неизбежным элементом их работы как в период пуска, так и в период остановки. В ряде гироскопических систем переходной процесс сопровождается изменением массы системы, жесткости, моментов инерции, амплитуд возмущающих сил и т. д. Ввиду этого понятия свободных колебаний системы, а также собственных частот как физических констант, вычисленных при дискретных значениях угловой скорости вращения  $\nu$ , теряют свой обычный смысл. Имеющиеся в литературе методы [3], посвященные этому вопросу, не могут охватить задачу в полном объеме даже для случая, когда колебательный процесс описывается системой линейных дифференциальных уравнений.

Задача о прохождении через резонанс в гироскопических системах с полным учетом изменяемости всех параметров, а также с учетом возможной нелинейности может быть решена при помощи асимптотических методов Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1].

1. Рассмотрим случай, когда задача о колебаниях в гироскопической системе при переходе через резонанс может быть сведена к рассмотрению следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}(\tau) \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(\tau) \frac{dy}{dt} + b_{11}(\tau)x &= \varepsilon f_1 \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \\ a_{22}(\tau) \frac{d^2y}{dt^2} - \gamma(\tau) \frac{dx}{dt} + b_{22}(\tau)y &= \varepsilon f_2 \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1,1)$$

где  $x$  и  $y$  — обобщенные координаты (например, углы, определяющие положение оси гироскопа относительно неподвижной системы координат),  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $\tau = \varepsilon t$ ,  $t$  — время

$$f_1 \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \quad f_2 \left( \tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) -$$

функции периодические по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ ,

$$a_{11}(\tau), a_{22}(\tau), b_{11}(\tau), b_{22}(\tau), f_1\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), f_2\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \nu(\tau) -$$

неограниченно дифференцируемы для всех конечных значений  $\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}$ , причем для всех  $\tau$ , находящихся на любом конечном интервале  $0 \leq \tau \leq L$ ,  $a_{11}(\tau), a_{22}(\tau), b_{11}(\tau), b_{22}(\tau)$  не обращаются в нуль.

При этих предположениях приближенное решение системы уравнений (1,1) с гироскопическими членами, мы можем построить согласно методу, изложенному в нашей работе [2].

Для этого необходимо одновременно с системой уравнений (1,1) рассматривать следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, зависящими от  $\tau$ , как от параметра,

$$\begin{aligned} a_{11}(\tau) \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma(\tau) \frac{dy}{dt} + b_{11}(\tau) x &= 0, \\ a_{22}(\tau) \frac{d^2 y}{dt^2} - \gamma(\tau) \frac{dx}{dt} + b_{22}(\tau) y &= 0. \end{aligned} \quad (1,2)$$

Система уравнений (1,2), называемая обычно невозмущенной системой уравнений, соответствующей системе (1,1), является вспомогательной при построении приближенных решений уравнений (1,1).

Как известно, общее решение системы уравнений (1,2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2, \\ y &= c_1 a_1 \sin \psi_1 + c_2 a_2 \sin \psi_2, \end{aligned} \quad (1,3)$$

где  $\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2$ ;  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — корни характеристического уравнения

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} b_{11}(\tau) - \omega^2 a_{11}(\tau), & \gamma(\tau) \omega \\ -\gamma(\tau) \omega, & b_{22}(\tau) - \omega^2 a_{22}(\tau) \end{vmatrix} = 0, \quad (1,4)$$

$c_1$  и  $c_2$  — фундаментальные функции, определяющиеся выражениями:

$$c_1(\tau) = \frac{a_{11}(\tau) \omega_1^2(\tau) - b_{11}(\tau)}{\gamma(\tau) \omega_1(\tau)}, \quad c_2(\tau) = \frac{a_{11}(\tau) \omega_2^2(\tau) - b_{11}(\tau)}{\gamma(\tau) \omega_2(\tau)}. \quad (1,5)$$

Ввиду того что мы считаем коэффициенты в системе уравнений (1,2) зависящими от  $\tau$ , как от некоторого параметра, выражения для  $\omega_1, \omega_2, c_1$  и  $c_2$  также будут зависеть от  $\tau$ , как от параметра.

После этих предварительных замечаний перейдем к построению приближенных асимптотических решений для исходной системы дифференциальных уравнений (1,1) согласно нашей методике, изложенной в цитируемой выше работе.

Предположим, что в исследуемой колебательной системе, описываемой системой дифференциальных уравнений (1,1), при некотором значе-

нии  $\tau = \tau^*$  возможен внутренний резонанс дробного порядка, т. е. возможно равенство  $\omega_1(\tau^*) = \frac{s}{r} \omega_2(\tau^*)$ , где  $s$  и  $r$  — некоторые небольшие взаимно простые числа. Кроме того, при некоторых значениях  $\tau$  частота внешней возмущающей силы  $\nu(\tau)$  может равняться одной из собственных частот  $\omega_1(\tau)$  или  $\omega_2(\tau)$ . Тогда приближенное решение системы дифференциальных уравнений (1,1) ищем в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \cos(\theta + \psi_2) + \varepsilon u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2) + \varepsilon^2 \dots \\ y &= c_1(\tau) a_1 \sin(\theta + \psi_1) + c_2(\tau) a_2 \sin(\theta + \psi_2) + \\ &+ \varepsilon v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2) + \varepsilon^2 \dots, \end{aligned} \quad (1,6)$$

в которых  $\tau = \varepsilon t$ ,  $u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2), \dots, v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  — некоторые периодические по  $\theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2$  функции с периодом  $2\pi$ , а величины  $a_1, a_2, \psi_1, \psi_2$  должны быть определены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \varepsilon A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^2 A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \dots \\ \frac{da_2}{dt} &= \varepsilon A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^2 A_2^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \dots \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^2 B_2^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \dots \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \omega_2(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^2 B_2^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) + \dots \end{aligned} \quad (1,7)$$

В настоящей работе мы ограничимся построением только первого приближения, что вполне достаточно для практических целей, и только попутно приведем явные выражения для функций  $u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2), v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$ .

Итак, решение системы дифференциальных уравнений (1,1) в первом приближении будем искать в виде

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \cos(\theta + \psi_2), \\ y &= c_1(\tau) a_1 \sin(\theta + \psi_1) + c_2(\tau) a_2 \sin(\theta + \psi_2), \end{aligned} \quad (1,8)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а величины  $a_1, a_2, \psi_1, \psi_2$  должны быть определены из следующей системы уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \varepsilon A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \\ \frac{da_2}{dt} &= \varepsilon A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \omega_2(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2). \end{aligned} \quad (1,9)$$

Таким образом, в первом приближении наша задача сводится к определению величин  $A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $B_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ . Для однозначности определения этих величин, как и обычно, необходимо наложить условие конечности функций

$$u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2), \quad v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2),$$

т. е. условие отсутствия в выражениях для этих функций членов, знаменатели которых могут обратиться в нуль.

Приступим к определению указанных величин. Для этого необходимо, дифференцируя правые части рядов (1,6), найти выражения для  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , причем дифференцирование совершаем с учетом зависимостей (1,7). Полученные результаты подставляем в левую часть уравнений (1,1), в правую подставляем значения  $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ , и полученные выражения разлагаем в ряд Тейлора. Приравняв коэффициенты при  $\varepsilon$  в левой и правой частях системы (1,1), получим следующие уравнения для определения

$$u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2) \quad \text{и} \quad v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$$

$$a_{11}(\tau) \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \gamma(\tau) \frac{dv_1}{dt} + b_{11} u_1 = \bar{f}_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0), \quad (1,10)$$

$$a_{22}(\tau) \frac{d^2 v_1}{dt^2} - \nu(\tau) \frac{du_1}{dt} + b_{22} v_1 = \bar{f}_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) = & f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) - \\ & - \left\{ a_{11} \frac{dA_1^{(1)}}{dt} - 2a_{11}a_1\omega_1 B_1^{(1)} + \gamma c_1 a_1 B_1^{(1)} \right\} \cos(\theta + \psi_1) - \\ & - \left\{ a_{11} \frac{dA_1^{(2)}}{dt} - (2a_{11}\omega_2 - \gamma c_2) a_2 B_1^{(2)} \right\} \cos(\theta + \psi_2) + \\ & + \left\{ a_{11} a_1 \frac{dB_1^{(1)}}{dt} + (2a_{11}\omega_1 - \gamma c_1) A_1^{(1)} + a_{11} a_1 \frac{d\omega_1}{d\tau} - \gamma a_1 \frac{dc_1}{d\tau} \right\} \sin(\theta + \psi_1) + \\ & + \left\{ a_{11} a_2 \frac{dB_1^{(2)}}{dt} + (2a_{11}\omega_2 - \gamma c_2) A_1^{(2)} + a_{11} a_2 \frac{d\omega_2}{d\tau} - \gamma a_2 \frac{dc_2}{d\tau} \right\} \sin(\theta + \psi_2). \end{aligned} \quad (1,11)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) = & f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) - \\ & - \left\{ a_{22} c_1 \frac{dA_1^{(1)}}{dt} - (2a_{22}c_1\omega_1 - \gamma a_1) B_1^{(1)} \right\} \sin(\theta + \psi_1) - \\ & - \left\{ a_{22} c_2 \frac{dA_1^{(2)}}{dt} - (2a_{22}c_2\omega_2 + \gamma a_2) B_1^{(2)} \right\} \sin(\theta + \psi_2) - \\ & - \left\{ a_{22} c_1 a_1 \frac{dB_1^{(1)}}{dt} + (2a_{22}c_1\omega_1 - \gamma) A_1^{(1)} + 2a_{22}a_1\omega_1 \frac{dc_1}{d\tau} + a_{22}c_1 a_1 \frac{d\omega_1}{d\tau} \right\} \cos(\theta + \psi_1) - \\ & - \left\{ a_{22} c_2 a_2 \frac{dB_1^{(2)}}{dt} + (2a_{22}c_2\omega_2 - \gamma) A_1^{(2)} + 2a_{22}a_2\omega_2 \frac{dc_2}{d\tau} + a_{22}c_2 a_2 \frac{d\omega_2}{d\tau} \right\} \cos(\theta + \psi_2), \end{aligned}$$

а также:

$$\begin{aligned}x_0 &= a_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \cos(\theta + \psi_2), \\y_0 &= c_1 a_1 \sin(\theta + \psi_1) + c_2 a_2 \sin(\theta + \psi_2), \\x_0 &= -a_1 \omega_1 \sin(\theta + \psi_1) - a_2 \omega_2 \sin(\theta + \psi_2), \\y_0 &= c_1 a_1 \omega_1 \cos(\theta + \psi_1) + c_2 a_2 \omega_2 \cos(\theta + \psi_2).\end{aligned}\tag{1,12}$$

Раскладывая выражения (1,11) в ряд Фурье, имеем:

$$\bar{f}_i(\tau, \theta, x_0, y_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{f}_{iknm}(\tau, a_1, a_2) e^{i\{k\theta + n(\theta + \psi_1) + m(\theta + \psi_2)\}},\tag{1,13}$$

где  $i = 1, 2$ , и введены обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{f}_{iknm}(\tau, a_1, a_2) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}_i(\tau, \theta, x_0, y_0) \times \\&\times e^{-i\{k\theta + n(\theta + \psi_1) + m(\theta + \psi_2)\}} d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2).\end{aligned}\tag{1,14}$$

После этого находим из уравнений (1,10) значения для  $u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  и  $v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  (при дифференцировании считаем, что  $\tau$  — некоторый постоянный параметр):

$$\begin{aligned}u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2) &= \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{1knm}(\tau, a_1, a_2) e^{i\{k\theta + n(\theta + \psi_1) + m(\theta + \psi_2)\}} \\v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2) &= \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{1knm}(\tau, a_1, a_2) e^{i\{k\theta + n(\theta + \psi_1) + m(\theta + \psi_2)\}}.\end{aligned}\tag{1,15}$$

Здесь коэффициенты в правых частях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}u_{1knm}(\tau, a_1, a_2) &= \frac{[b_{22}(\tau) - a_{22}(\tau)(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)^2] \bar{f}_{1knm}(\tau, a_1, a_2)}{D(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)} - \\&- \frac{i\gamma(\tau)(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2) \bar{f}_{2knm}(\tau, a_1, a_2)}{D(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)}, \\v_{1knm}(\tau, a_1, a_2) &= \frac{-[b_{11}(\tau) - a_{11}(\tau)(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)^2] \bar{f}_{2knm}(\tau, a_1, a_2)}{D(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)} + \\&+ \frac{i\gamma(\tau)(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2) \bar{f}_{1knm}(\tau, a_1, a_2)}{D(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2)}.\end{aligned}\tag{1,16}$$

Требование отсутствия в выражениях для  $u_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  и  $v_1(\tau, a_1, a_2, \theta, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  членов, знаменатели которых могут при некоторых значениях  $t$  обратиться в нуль, будет выполнено, если в рядах Фурье (1,13) будут отсутствовать слагаемые для тех значений индексов  $k, n, m$ , для которых  $D(k\nu + n\omega_1 + m\omega_2) = 0$ . Последнее равенство будет выполняться для всех значений  $k, n, m$ , для которых имеем одно из следующих двух равенств:

$$k\nu + n\omega_1 + m\omega_2 = \pm \omega_1$$

ИЛИ

$$k\nu + n\omega_1 + m\omega_2 = \pm \omega_2.$$

Приравнивая для этих значений индексов  $k, n, m$  коэффициенты Фурье в разложениях (1,15) нулю, мы получаем соотношения, из которых можем вполне однозначно определить величины  $A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $B_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ . Определение этих величин зависит также от того, какой резонанс мы собираемся рассматривать, или, вернее, от того, какое возможно соотношение между величинами  $r(\tau)$ ,  $\omega_1(\tau)$  и  $\omega_2(\tau)$  при некотором значении  $\tau = \tau^*$  в процессе колебаний исследуемой нами механической системы.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Первый случай — для некоторых значений  $\tau$  на рассматриваемом интервале  $0 \leq \tau \leq L$  возможны следующие соотношения между

$$\begin{aligned} & r(\tau), \omega_1(\tau), \omega_2(\tau): \\ & r(\tau_1) = \omega_1(\tau_1), \quad r(\tau_2) = \omega_2(\tau_2), \quad \omega_1(\tau) \neq \omega_2(\tau), \\ & \omega_1(\tau) \neq \frac{s}{r} \omega_2(\tau), \end{aligned}$$

где  $s$  и  $r$  — некоторые взаимно простые числа  $0 \leq \tau_1 \leq L, 0 \leq \tau_2 \leq L, \tau_1 \neq \tau_2$ .

Второй случай:

$$r(\tau_1) = \omega_1(\tau_1), \quad \omega_1(\tau_2) = \frac{s}{r} \omega_2(\tau_2), \quad r(\tau) \neq \omega_2(\tau).$$

Третий случай:

$$r(\tau_1) = \omega_2(\tau_1), \quad \omega_1(\tau_2) = \frac{s}{r} \omega_2(\tau_2), \quad r(\tau) \neq \omega_1(\tau).$$

Соответственно каждому из этих случаев определяем величины

$$\begin{aligned} & A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \quad A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \\ & B_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \quad B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2). \end{aligned}$$

После ряда выкладок для первого случая получим следующие выражения:

$$A_1^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} A_{1\sigma}^{(1)}, \quad A_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} A_{1\sigma}^{(2)}, \quad (1,17)$$

$$B_{1\sigma}^{(1)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} B_{1\sigma}^{(1)}, \quad B_1^{(2)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} B_{1\sigma}^{(2)},$$

где  $A_{1\sigma}^{(1)}, A_{1\sigma}^{(2)}, B_{1\sigma}^{(1)}$  и  $B_{1\sigma}^{(2)}$  являются некоторыми периодическими по  $\psi_1$  и  $\psi_2$  решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} R_{\sigma j} \frac{dA_{1\sigma}^{(j)}}{dt} - L_{\sigma j} \alpha_j B_{1\sigma}^{(j)} &= \frac{e^{-i\sigma\psi_1}}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ h_{1j}^{\sigma}(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \cos(\theta + \psi_j) - \right. \\ & \left. - g_{1j}^{\sigma}(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \sin(\theta + \psi_j) \right\} e^{i\sigma\psi_1} d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) + \\ & + \frac{e^{-i\sigma\psi_2}}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ h_{2j}^{\sigma}(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \cos(\theta + \psi_j) - \right. \\ & \left. - g_{2j}^{\sigma}(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \sin(\theta + \psi_j) \right\} e^{i\sigma\psi_2} d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2); \end{aligned} \quad (1,18)$$

$$\begin{aligned}
R_{\sigma j} a_j \frac{dB_{1\sigma}^{(j)}}{dt} - L_{\sigma j} A_{1\sigma}^{(j)} = & - \frac{e^{-i\sigma\psi_1}}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ h_{1j}^\sigma(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \sin(\theta + \psi_j) - \right. \\
& - g_{1j}^\sigma(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \cos(\theta + \psi_j) \left. \right\} e^{i\sigma\psi_1} d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) - \\
& - \frac{e^{-i\sigma\psi_2}}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ h_{2j}^\sigma(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \sin(\theta + \psi_j) - \right. \\
& - g_{2j}^\sigma(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \cos(\theta + \psi_j) \left. \right\} e^{i\sigma\psi_2} d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) - \\
& - a_j \left( a_{11} \frac{d\omega_j}{dt} - \gamma \frac{dc_j}{dt} \right) (h_{1j}^\sigma(\tau) + h_{2j}^\sigma(\tau)) + \\
& + a_j \left( a_{22} c_j \frac{d\omega_j}{dt} + 2a_{22}\omega_j \frac{dc_j}{dt} \right) (g_{1j}^\sigma(\tau) + g_{2j}^\sigma(\tau)) \quad (j=1, 2).
\end{aligned} \tag{1,18a}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
h_{1j}^\sigma(\tau) &= b_{22}(\tau) - a_{22}(\tau) [\sigma(\nu - \omega_1) + \omega_j]^2, \\
h_{2j}^\sigma(\tau) &= b_{22}(\tau) - a_{22}(\tau) [\sigma(\nu - \omega_2) + \omega_j]^2, \\
g_{1j}^\sigma(\tau) &= \gamma(\tau) [\sigma(\nu - \omega_1) + \omega_j], \\
g_{2j}^\sigma(\tau) &= \gamma(\tau) [\sigma(\nu - \omega_2) + \omega_j],
\end{aligned} \tag{1,19}$$

$$\begin{aligned}
R_{\sigma j} &= a_{11}(\tau) \{h_{1j}^\sigma(\tau) + h_{2j}^\sigma(\tau)\} - a_{22}(\tau) c_j(\tau) [g_{1j}^\sigma(\tau) + g_{2j}^\sigma(\tau)], \\
L_{\sigma j} &= (2a_{11}(\tau)\omega_1 - \gamma(\tau)c_j(\tau)) [h_{1j}^\sigma(\tau) + h_{2j}^\sigma(\tau)] - \\
& - (2a_{22}(\tau)c_j(\tau)\omega_1 - \gamma(\tau)) (g_{1j}^\sigma(\tau) + g_{2j}^\sigma(\tau)) \quad (j=1, 2),
\end{aligned} \tag{1,20}$$

причем везде дифференцирование и интегрирование совершаем только по  $t$ , содержащемуся явно, а  $\tau$  везде считаем постоянным параметром.

Для второго и третьего случаев находим:

$$A_1^{(j)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} \sum_k A_{1\sigma k}^{(j)}, \quad B_1^{(j)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) = \sum_{\sigma} \sum_k B_{1\sigma k}^{(j)}, \tag{1,21}$$

где  $A_{1\sigma k}^{(j)}$  и  $B_{1\sigma k}^{(j)}$  ( $j=1, 2$ ) являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned}
R_{\sigma kj} \frac{dA_{1\sigma k}^{(j)}}{dt} - L_{\sigma kj} a_j B_{1\sigma k}^{(j)} = & \\
= \frac{1}{4\pi^3} e^{i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_j\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{ij}^{\sigma k}(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \times \\
& \times e^{-i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_j\}} \cos(\theta + \psi_j) d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) - \\
- \frac{1}{4\pi^3} e^{i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_j\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{ij}^{\sigma k}(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \times \\
& \times e^{-i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_j\}} \sin(\theta + \psi_j) d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2);
\end{aligned} \tag{1,22}$$

$$\begin{aligned}
& R_{\sigma kj} a_j \frac{dB_{1\sigma k}^{(j)}}{dt} + L_{\sigma kj} A_{1\sigma k}^{(j)} = \\
& = -\frac{1}{4\pi^3} e^{i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_i\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{ij}^{\sigma k}(\tau) f_1(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, y, \dot{y}_0) \times \\
& \quad \times e^{-i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_i\}} \sin(\theta + \psi_j) d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) - \\
& - \frac{1}{4\pi^3} e^{i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_i\}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{ij}^{\sigma k}(\tau) f_2(\tau, \theta, x_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \times \\
& \quad \times e^{-i\{\sigma(r\psi_1 - s\psi_2) - k\psi_i\}} \cos(\theta + \psi_j) d\theta d(\theta + \psi_1) d(\theta + \psi_2) - \\
& - a_j a_{11} \left( \frac{d\omega_j}{dt} - \gamma \frac{dc_j}{dt} \right) h_{ij}^{\sigma k}(\tau) + a_j a_{22} c_j \frac{d\omega_j}{dt} + 2a_{22} \omega_j \frac{dc_j}{dt} h_{ij}^{\sigma k}(\tau),
\end{aligned}$$

причем имеем обозначения:

$$\begin{aligned}
h_{ij}^{\sigma k}(\tau) &= b_{22}(\tau) - a_{22}(\tau) [k(v - \omega_j) + \sigma(r\omega_1 - s\omega_2) + \omega_j]^2, \\
g_{ij}^{\sigma k}(\tau) &= \gamma(\tau) [k(v - \omega_j) + \sigma(r\omega_1 - s\omega_2) + \omega_j] \quad (j=1, 2);
\end{aligned} \tag{1,23}$$

$i=1$  соответствует второму случаю,  $i=2$  — третьему случаю.

Кроме того, как в системе уравнений (1,18), так и в уравнениях (1,22) под полной производной по времени следует понимать следующее:

$$\frac{dA_{1\sigma}^{(j)}}{dt} = \frac{\partial A_{1\sigma}^{(j)}}{\partial \psi_1} (\omega_1 - v) + \frac{\partial A_{1\sigma}^{(j)}}{\partial \psi_2} (\omega_2 - v). \tag{1,24}$$

После того как нами найдены явные выражения для величин  $A_1^{(i)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $B_1^{(i)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2)$ , а также для функций  $u_1(\tau, \theta, a_1, a_2, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$  и  $v_1(\tau, \theta, a_1, a_2, \theta + \psi_1, \theta + \psi_2)$ , мы можем написать решение системы уравнений (1,1) в первом приближении и в „улучшенном“ первом приближении, т. е. с учетом высших гармоник колебания.

2. Перейдем к рассмотрению, с помощью изложенного метода, колебаний при прохождении через резонанс в конкретной гироскопической системе.

Рассмотрим схему гироскопа, имеющего применение в некоторых конструкциях центрифуг, сепараторов и т. д. (рис. 1).

Материальная ось гироскопа  $AD$  удерживается в вертикальном положении двумя опорами  $C$  и  $D$ , причем верхняя опора  $C$  упругая с одинаковой жесткостью  $k$  по всем радиусам. Можно было бы рассмотреть случай, когда жесткость

верхней опоры зависит от перемещения оси и причем эта зависимость нелинейна; однако мы не будем усложнять задачу.

Упругостью оси гироскопа будем пренебрегать, считая ее абсолютно жесткой.

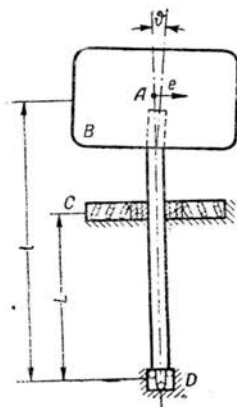


Рис. 1



Ротор гироскопа  $B$  предположим неуравновешенным как статически, так и динамически, кроме того, масса ротора значительно превосходит массу оси гироскопа, что дает нам право пренебрегать последней.

Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  углы, определяющие положение оси гироскопа относительно неподвижной системы координат  $xyz$  с началом отсчета в точке  $D$ , ось  $Dz$  направлена вертикально вверх. Пусть  $e$  и  $\vartheta$  — линейный и угловой эксцентриситеты ротора;  $I_1$  — момент инерции ротора относительно поперечной оси, проведенной перпендикулярно оси симметрии и проходящей через нижнюю опору  $D$ ;  $l$  — расстояние от подпятника до центра тяжести ротора;  $L$  — расстояние от подпятника до верхней опоры  $C$ ;  $I$  — момент инерции ротора относительно оси симметрии;  $J$  — момент инерции ротора относительно поперечной оси, проведенной перпендикулярно оси симметрии и проходящей через центр тяжести ротора;  $P$  — вес ротора;  $m$  — масса ротора.

Тогда дифференциальные уравнения движения оси гироскопа будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + I \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\beta}{dt} + b\alpha &= A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta + \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta \right] - I \frac{d^2\theta}{dt^2} \beta, \\ I_1 \frac{d^2\beta}{dt^2} - I \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + b\beta &= A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta - \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta \right] + I \frac{d^2\theta}{dt^2} \alpha, \end{aligned} \quad (2,1)$$

где введены обозначения:

$$(I - J)\vartheta + mle = A, \quad kL^2 - Pl = b.$$

Кроме того, в этих уравнениях имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) = \nu_0 \pm \gamma t, \quad (2,2)$$

$\gamma$  — постоянное угловое ускорение (или замедление) собственного вращения ротора, вызванное постоянным моментом, внезапно приложенным к оси гироскопа. Заметим, что  $\nu(\tau)$  может быть произвольной функцией времени, и это не вызовет при решении задачи никаких дополнительных затруднений.

Подробный вывод приведенных здесь уравнений (2,1) для схемы гироскопа, приведенной на рис. 1, имеется в работе А. А. Смелкова [3].

Построим приближенное решение системы уравнений (2,1) при помощи приведенных выше формул. Уравнения (2,1) — линейные, причем переменными коэффициентами являются только коэффициенты при гироскопических членах, а также амплитуды и частоты внешних периодических сил. Благодаря этому мы получим очень простые уравнения первого приближения, численное интегрирование которых не представит никаких дополнительных затруднений.

Предположим, что при рассмотрении нестационарного процесса в гироскопической системе, описываемой дифференциальными уравнениями (2,1), мы имеем первый случай, приведенный на стр. 338, т. е. для некоторых значений  $\tau$  на рассматриваемом интервале  $0 \leq \tau \leq L$  возможны следующие соотношения между  $\nu(\tau)$ ,  $\omega_1(\tau)$  и  $\omega_2(\tau)$ :

$$\nu(\tau_1) = \omega_1(\tau), \quad \nu(\tau_2) = \omega_2(\tau), \quad \omega_1(\tau) \neq \frac{S}{r} \omega_2(\tau).$$

Тогда для построения решения нам необходимо воспользоваться формулами (1,8), (1,4), (1,5), (1,17) и уравнениями (1,9) и (1,18).

Сопоставляя уравнения (2,1) с уравнениями (1,1), имеем

$$a_{11}(x) = a_{22}(x) = I_1, \quad \gamma(x) = I\nu(x), \quad b_{11}(x) = b_{22}(x) = b.$$

Далее, согласно (1,4), составляем следующее характеристическое уравнение для определения „собственных“ частот:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} b - I_1\omega^2, & I\nu(x)\omega \\ -I\nu(x)\omega, & b - I_1\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2,3)$$

откуда находим

$$\omega_1(x) = \frac{\sqrt{I^2\nu^2(x) + 4bI_1} - I\nu(x)}{2I_1}, \quad \omega_2(x) = \frac{\sqrt{I^2\nu^2(x) + 4bI_1} + I\nu(x)}{2I_1}. \quad (2,4)$$

Вычисляем фундаментальные функции:

$$c_1 = \frac{I_1\omega_1^2 - b}{I\nu(x)\omega_1} = \frac{I_1 \frac{1}{I_1} (b + I\nu(x)\omega_1) - b}{I\nu(x)\omega_1} = 1, \quad (2,5)$$

$$c_2 = \frac{I_1\omega_2^2 - b}{I\nu(x)\omega_2} = \frac{I_1 \frac{1}{I_1} (b + I\nu(x)\omega_2) - b}{I\nu(x)\omega_2} = 1.$$

Итак, решение системы дифференциальных уравнений (2,1) мы можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \cos(\theta + \psi_2), \\ \beta &= a_1 \sin(\theta + \psi_1) + a_2 \sin(\theta + \psi_2), \end{aligned} \quad (2,6)$$

где  $\frac{d\theta}{dt} = \nu_0 + \gamma t = \nu(x)$  (мы пишем  $\nu(x)$ , так как предполагаем, что  $\gamma$  — величина порядка малости  $\varepsilon$ ), а величины  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  должны быть определены из уравнений первого приближения, к составлению которых мы сейчас и приступим.

Заметим, что в системе дифференциальных уравнений, описывающей движение оси гироскопа, не учтено трение. Последнее можно учесть, рассматривая, например, следующую диссипативную функцию Рейля:

$$R = \frac{1}{2} [b_1 \dot{\alpha}^2 + 2h \dot{\alpha} \dot{\beta} + b_2 \dot{\beta}^2], \quad (2,7)$$

где  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $h$  — некоторые константы.

Если мы учтем трение, то получим следующие выражения для возмущающих сил, действующих на нашу гироскопическую систему:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_1 \left( x, \theta, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \beta, \frac{d\beta}{dt} \right) &= \\ &= A [\nu^2(x) \cos \theta + \nu'(x) \sin \theta] - I\nu'(x)\beta - b_1 \frac{d\alpha}{dt} - h \frac{d\beta}{dt}, \\ \varepsilon f_2 \left( x, \theta, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \beta, \frac{d\beta}{dt} \right) &= \\ &= A [\nu^2(x) \sin \theta - \nu'(x) \cos \theta] + I\nu'(x)\alpha - h \frac{d\alpha}{dt} - b_2 \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned} \quad (2,8)$$

Подставляя в правые части этих выражений значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\frac{d\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\beta}{dt}$ , найденные из (2,6), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_1(\tau, \theta, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0) = & A[v^2(\tau) \cos \theta + v'(\tau) \sin \theta] - \\ & - I v'(\tau) [a_1 \sin(\theta + \psi_1) + a_2 \sin(\theta + \psi_2)] + \\ & + b_1 [a_1 \omega_1 \sin(\theta + \psi_1) + a_2 \omega_2 \sin(\theta + \psi_2)] - \\ & - h [a_1 \omega_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \omega_2 \cos(\theta + \psi_2)]; \end{aligned} \quad (2,9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon f_2(\tau, \theta, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0) = & A[v^2(\tau) \sin \theta - v'(\tau) \cos \theta] + \\ & + I v'(\tau) [a_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \cos(\theta + \psi_2)] + \\ & + h [a_1 \omega_1 \sin(\theta + \psi_1) + a_2 \omega_2 \sin(\theta + \psi_2)] - \\ & - b_2 [a_1 \omega_1 \cos(\theta + \psi_1) + a_2 \omega_2 \cos(\theta + \psi_2)]. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к составлению уравнений (1,18). Для этого необходимо подсчитать интегралы, стоящие в правых частях уравнения (1,18), предварительно подставив значения

$$f_1(\tau, \theta, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0), \quad f_2(\tau, \theta, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0). \quad (2,9')$$

Эти интегралы будут отличны от нуля для следующих значений  $\sigma = 0, +1, -1$ . После ряда выкладок получаем уравнения, определяющие

$$A_{10}^{(j)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \quad B_{10}^{(j)}(\tau, a_1, a_2, \psi_1, \psi_2), \quad (j=1, 2, \sigma=0, +1, -1):$$

$$\sigma=0: \quad 3I_1 \frac{dA_{10}^{(j)}}{dt} - 3(2I_1 \dot{\omega}_j - I v(\tau)) a_j B_{10}^{(j)} = h a_j \omega_j, \quad (2,10)$$

$$\begin{aligned} & 3I_1 a_j \frac{dB_{10}^{(j)}}{dt} + 3(2I_1 \omega_j - I v(\tau)) A_{10}^{(j)} = \\ & = -[(b_1 + 2b_2) \omega_j - 3I v'(\tau)] a_j - 3I_1 a_j \frac{d\omega_j}{d\tau} \quad (j=1, 2); \end{aligned}$$

$$\sigma=1: \quad I_1 \frac{dA_{11}^{(j)}}{dt} - (2I_1 \omega_j - I v(\tau)) a_j B_{11}^{(j)} = \frac{1}{2} A v^2(\tau) e^{i\psi_j} - \frac{1}{2i} A v'(\tau) e^{i\psi_j}, \quad (2,11)$$

$$I_1 a_j \frac{dB_{11}^{(j)}}{dt} + (2I_1 \omega_j - I v(\tau)) A_{11}^{(j)} = -\frac{1}{2i} A v^2(\tau) e^{i\psi_j} - \frac{1}{2} A v'(\tau) e^{i\psi_j} \quad (j=1, 2);$$

$$\begin{aligned} \sigma=-1: \quad I_1 \frac{dA_{1,-1}^{(j)}}{dt} - (2I_1 \omega_j - I v(\tau)) a_j B_{1,-1}^{(j)} = \\ = \frac{1}{2} A v^2(\tau) e^{-i\psi_j} + \frac{1}{2i} A v'(\tau) e^{-i\psi_j}, \end{aligned} \quad (2,12)$$

$$\begin{aligned} & I_1 a_j \frac{dB_{1,-1}^{(j)}}{dt} + (2I_1 \omega_j - I v(\tau)) a_j A_{1,-1}^{(j)} = \\ & = \frac{1}{2i} A v^2(\tau) e^{-i\psi_j} - \frac{1}{2} A v'(\tau) e^{-i\psi_j} \quad (j=1, 2). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\begin{aligned}
 A_{10}^{(j)} &= -\frac{[(b_1+2b_2)\omega_j-3I\nu'(\tau)]}{3(2I_1\omega_j-I\nu(\tau))}a_j - \frac{I_1\frac{d\omega_j}{d\tau}}{2I_1\omega_j-I\nu}a_j; \\
 B_{10}^{(j)} &= -\frac{h\omega_j}{3(2I_1\omega_j-I\nu(\tau))}; \\
 A_{1,1}^{(j)} &= -\frac{\frac{1}{2i}A\nu^2(\tau)e^{i\psi_j} + \frac{1}{2}A\nu'(\tau)e^{i\psi_j}}{I_1(\omega_j+\nu(\tau))-I\nu(\tau)}; \\
 B_{1,1}^{(j)} &= \frac{-\frac{1}{2}A\nu^2(\tau)e^{i\psi_j} + \frac{1}{2i}A\nu'(\tau)e^{i\psi_j}}{a_j[I_1(\omega_j+\nu(\tau))-I\nu(\tau)]}; \\
 A_{1,-1}^{(j)} &= \frac{\frac{1}{2i}A\nu^2(\tau)e^{-i\psi_j} - \frac{1}{2}A\nu'(\tau)e^{-i\psi_j}}{I_1(\omega_j+\nu(\tau))-I\nu(\tau)}; \\
 B_{1,-1}^{(j)} &= \frac{-\frac{1}{2}A\nu^2(\tau)e^{i\psi_j} - \frac{1}{2i}A\nu'(\tau)e^{-i\psi_j}}{a_j[I_1(\omega_j+\nu(\tau))-I\nu(\tau)]};
 \end{aligned} \tag{2,13}$$

( $j=1, 2$ ).

После этого, воспользовавшись формулой (2,17), можем написать уравнения первого приближения, определяющие  $a_1, a_2, \psi_1, \psi_2$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= -\frac{[(b_1+2b_2)\omega_1-3I\nu'(\tau)]}{3(2I_1\omega_1-I\nu(\tau))}a_1 - \frac{I_1\frac{d\omega_1}{d\tau}}{2I_1\omega_1-I\nu(\tau)}a_1 - \\
 &\quad - \frac{A\nu^2(\tau)\sin\psi_1 - A\nu'(\tau)\cos\psi_1}{I_1(\omega_1+\nu(\tau))-I\nu(\tau)}; \\
 \frac{da_2}{dt} &= -\frac{[(b_1+2b_2)\omega_2-3I\nu'(\tau)]}{3(2I_1\omega_2-I\nu(\tau))}a_2 - \frac{I_1\frac{d\omega_2}{d\tau}}{2I_1\omega_2-I\nu(\tau)}a_2 - \\
 &\quad - \frac{A\nu^2(\tau)\sin\psi_2 - A\nu'(\tau)\cos\psi_2}{I_1(\omega_2+\nu(\tau))-I\nu(\tau)}; \\
 \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) - \frac{h\omega_1}{3(2I_1\omega_1-I\nu(\tau))} - \frac{A\nu^2(\tau)\cos\psi_1 - A\nu'(\tau)\sin\psi_1}{a_1[I_1(\omega_1+\nu(\tau))-I\nu(\tau)]}; \\
 \frac{d\psi_2}{dt} &= \omega_2(\tau) - \nu(\tau) - \frac{h\omega_2}{3(2I_1\omega_2-I\nu(\tau))} - \frac{A\nu^2(\tau)\cos\psi_2 - A\nu'(\tau)\sin\psi_2}{a_2[I_1(\omega_2+\nu(\tau))-I\nu(\tau)]}.
 \end{aligned} \tag{2,14}$$

Заметим, что даже при достаточно больших скоростях прохождения через резонанс абсолютная величина  $I\nu'(\tau), I_1\omega_j'(\tau) \ll b_1\omega_j(\tau)$ , и, кроме того,  $\nu'(\tau) \ll \nu^2(\tau)$ . Таким образом, не нарушая точности вычисления, мы можем величины  $I\nu'(\tau), I_1\omega_j'(\tau), \nu'(\tau)$  отнести ко второму приближению и в первом приближении их вовсе не учитывать. Кроме того,

для упрощения положим в диссипативной функции Рейля:  $h = 0$ ,  $b_1 = b_2 = \delta$ , тогда уравнения первого приближения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\frac{\delta\omega_1 a_1}{2I_1\omega_1 - I\nu(\tau)} - \frac{A\nu^2(\tau) \sin \psi_1}{I_1(\omega_1 + \nu(\tau)) - I\nu(\tau)}, \\ \frac{da_2}{dt} &= -\frac{\delta\omega_2 a_2}{2I_1\omega_2 - I\nu(\tau)} - \frac{A\nu^2(\tau) \sin \psi_2}{I_1(\omega_2 + \nu(\tau)) - I\nu(\tau)}, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_1(\tau) - \nu(\tau) - \frac{A\nu^2(\tau) \cos \psi_1}{a_1 [I_1(\omega_1 + \nu(\tau)) - I\nu(\tau)]}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \omega_2(\tau) - \nu(\tau) - \frac{A\nu^2(\tau) \cos \psi_2}{a_2 [I_1(\omega_2 + \nu(\tau)) - I\nu(\tau)]}. \end{aligned} \quad (2,15)$$

Численное интегрирование полученной системы уравнений первого приближения не представляет затруднений, к тому же эта система распадается на две независимые друг от друга системы двух уравнений, что еще больше облегчает интегрирование.

Остановимся теперь на выводе соотношений, при помощи которых можно построить зависимость амплитуды колебания от частоты внешней силы (резонансную кривую) при стационарном режиме. Для этого необходимо приравнять правые части уравнений (2,15) нулю и из полученных выражений исключить фазы колебания  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . После этого получим следующие соотношения, дающие возможность построить резонансную кривую для амплитуды каждой отдельной гармонической составляющей:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{(A\nu^2)^2}{[I_1(\omega_1 + \nu) - I\nu]^2 \left\{ (\omega_1 - \nu)^2 + \frac{\delta^2 \omega_1^2}{(2I_1\omega_1 - I\nu)^2} \right\}}, \\ a_2^2 &= \frac{(A\nu^2)^2}{[I_1(\omega_2 + \nu) - I\nu]^2 \left\{ (\omega_2 - \nu)^2 + \frac{\delta^2 \omega_2^2}{(2I_1\omega_2 - I\nu)^2} \right\}}. \end{aligned} \quad (2,16)$$

Следует помнить, что в этих формулах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не являются постоянными, а зависят от  $\nu$  согласно формулам (2,4).

Заметим, что выражения (2,6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \alpha &= U \cos(\theta + \kappa), \\ \beta &= U \sin(\theta + \kappa), \end{aligned} \quad (2,17)$$

где  $U$  и  $\kappa$  — амплитуда суммарного колебания и фазовый сдвиг — определяются формулами:

$$U = \sqrt{(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2)^2 + (a_1 \sin \psi_1 + a_2 \sin \psi_2)^2} \quad (2,18)$$

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{a_1 \sin \psi_1 + a_2 \sin \psi_2}{a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2}. \quad (2,19)$$

Применим полученные формулы к численному примеру.

Допустим, параметры рассматриваемой нами схемы гироскопа имеют следующие значения:

вес ротора гироскопа  $P = 5$  кг;  
 расстояние от нижней опоры до центра тяжести ротора гироскопа  
 $l = 25$  см;  
 расстояние между нижней и верхней опорами оси гироскопа  
 $L = 15$  см;  
 жесткость верхней опоры  $k = 5$  кг/см;  
 момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I = 0,1$  кг·см·сек<sup>2</sup>;  
 момент инерции ротора относительно поперечной оси, проведенной  
 перпендикулярно оси симметрии и проходящей через нижнюю опору  
 $I_1 = 0,2$  кг·см·сек<sup>2</sup>.

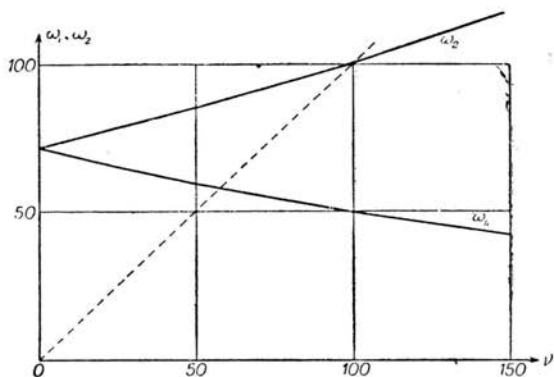


Рис. 2.

При решении задачи ограничимся только построением резонансных кривых как стационарных, так и при различных режимах прохождения через резонанс. В этом случае нет необходимости находить абсолютные значения амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ , достаточно построить графики для отношений  $\frac{a_1}{A}$  и  $\frac{a_2}{A}$  (это возможно сделать в силу линейности уравнений (2,1)). Поэтому можно не задавать численные значения параметров гироскопа, характеризующих величину  $A$ , т. е. численные значения  $J$ ,  $e$  и  $\vartheta$ . Коэффициент трения примем  $\delta = 0,02$ .

Подставляя приведенные численные значения в формулы (2,4), находим

$$\omega_1(\nu) = \frac{\sqrt{800 + 0,1\nu^2} - 0,2\nu}{0,4}, \quad \omega_2(\nu) = \frac{\sqrt{800 + 0,1\nu^2} + 0,2\nu}{0,4} \quad (2,20)$$

при  $\nu = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 70,7$  1/сек. Зависимость  $\omega_1$  и  $\omega_2$  от  $\nu$  приведена на рис. 2, из которого ясно, что при изменении  $\nu$  — частоты внешней силы — от 0 до 100—110 1/сек в системе дважды может возникнуть резонанс: первый раз при  $\nu = 59$  1/сек и второй раз при  $\nu = 101$  1/сек.

Воспользовавшись формулами (2,16), получим

$$\frac{a_j}{A_1} = \frac{\nu^2}{(\omega_j + 0,5\nu) \sqrt{(\omega_j - \nu)^2 + \frac{50\omega_j^2}{(2\omega_j - 0,5\nu)^2}}} \quad (j = 1, 2), \quad (2,21)$$

$$A_1 = 10A.$$

при помощи которых строят резонансные кривые при стационарном режиме, характеризующие изменение амплитуд каждой отдельной гармонической составляющей, входящей в выражение для  $a$  и  $\beta$  (рис. 3 и 4).

На рис. 3 кривая  $M_1 B_1 N_1$  характеризует зависимость отношения  $\frac{a_1}{A_1}$  от частоты  $\nu$  при стационарном режиме, на рис. 4 кривая  $M_2 B_2 N_2$  характеризует отношение  $\frac{a_2}{A_1}$ .

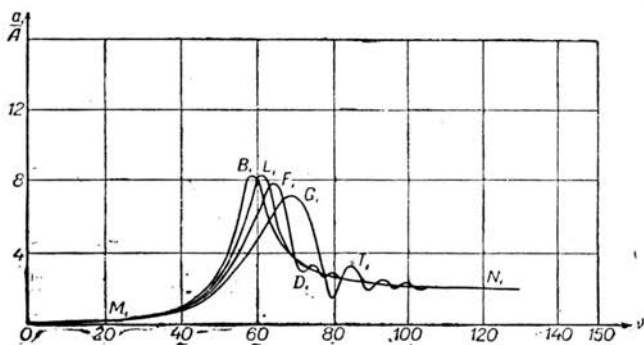


Рис. 3.

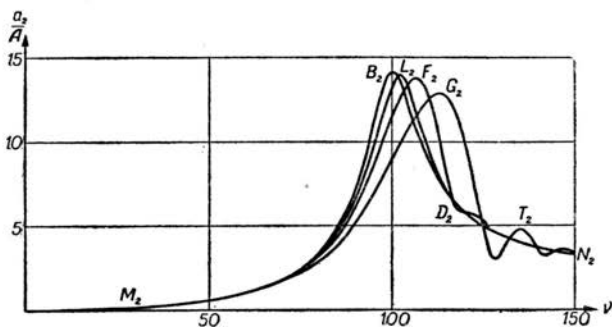


Рис. 4.

Для анализа поведения исследуемой гироскопической системы при различных режимах прохода через резонанс необходимо численно проинтегрировать уравнения первого приближения (2,15) для различных скоростей изменения частоты внешней силы  $\nu(\tau)$ . Мы уже отмечали, что  $\nu(\tau)$  может изменяться по любому закону, можно даже закон изменения  $\nu(\tau)$  задать с помощью графической характеристики. Для упрощения примем, что  $\nu(\tau)$  изменяется по линейному закону  $\nu(\tau) = \nu_0 + \gamma\tau$  и исследуем поведение системы для значений  $\gamma = 8$  1/сек<sup>2</sup>, 20 1/сек<sup>2</sup>, 50 1/сек<sup>2</sup>. Эти значения  $\gamma$  соответствуют разгону гироскопической системы.

Подставляя численные значения в уравнения (2,15), имеем

$$\frac{d\left(\frac{a_j}{A}\right)}{dt} = -\frac{14,14\omega_j}{4\omega_j - \nu(\tau)} \left(\frac{a_j}{A}\right) - \frac{10\nu^2(\tau)}{(2\omega_j + \nu(\tau))} \sin \psi_j,$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \omega_j - \nu(\tau) - \frac{10\nu^2(\tau)}{\left(\frac{a_j}{A}\right)(2\omega_j + \nu(\tau))} \cos \psi_j, \quad (2,22)$$

где  $j = 1, 2$ ,  $\nu(\tau) = \nu_0 + \gamma t$ ,  $\omega_j = \frac{\sqrt{800 + 0,1\nu^2(\tau) \mp 0,2\nu(\tau)}}{0,4}$ . Численно

интегрируя системы уравнений (2,22), получаем резонансные кривые прохождения через резонанс для ускорений  $\gamma = 8^1/\text{сек}^2$ ,  $20^1/\text{сек}^2$ ,  $50^1/\text{сек}^2$ . На рис. 3 этим ускорениям соответствуют кривые  $M_1L_1N_1$ ,  $M_1F_1D_1$  и  $M_1G_1T_1$ , на рис. 4 — кривые  $M_2L_2N_2$ ,  $M_2F_2D_2$  и  $M_2G_2T_2$ .

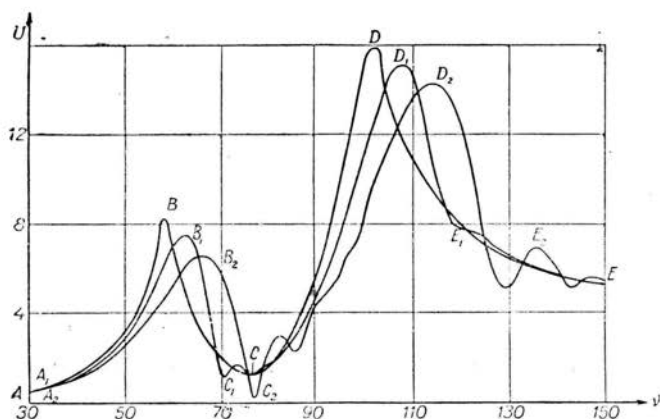


Рис. 5.

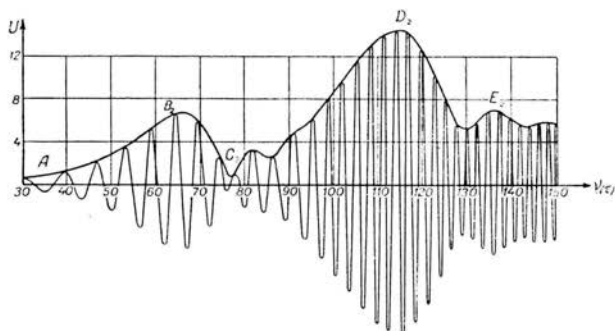


Рис. 6.

На рис. 5 приведены кривые зависимости  $U$  от частоты (согласно формуле (2,18)) как для стационарного режима — кривая  $ABCDE$ , так и для различных ускорений — кривая  $A_1B_1C_1D_1E_1$  — для  $\gamma = 20^1/\text{сек}^2$ , кривая  $A_2B_2C_2D_2E_2$  — для  $\gamma = 50^1/\text{сек}^2$ . Для наглядности на рис. 6 приведена зависимость  $\frac{\alpha}{A_1} = U \cos(\theta + x)$  от времени, для отрезка времени, в течение которого исследуемая колебательная система проходит через оба резонансных значения.

Кривые рис. 7 характеризуют зависимость  $x$  от  $\nu$  при стационарном режиме и различных скоростях прохождения через резонанс.

Для практических целей вполне достаточно ограничиться построением графиков, приведенных на рис. 5 и 7, которые полностью характе-



ризуют поведение системы при прохождении через резонанс — смещение и снижение максимумов резонансной кривой при прохождении через резонансные значения частоты, возникновение биений, изменение сдвига между фазой возмущающей силы и фазой колебания и т. д.

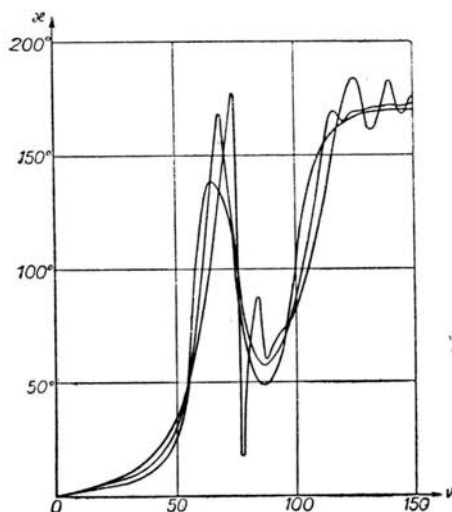


Рис. 7.

На подробном анализе полученных резонансных кривых мы не останавливаемся, так как он произведен в нашей работе [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.
2. Ю. А. Митропольский, Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы, Журнал ПММ, т. XIV, в. 2, 1950.
3. А. А. Смелков, О колебаниях в гироскопических системах при больших скоростях вращения, Инженерный сборник, т. VIII, 1950.
4. Ю. А. Митропольский, Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс, Инженерный сборник, т. XV, 1953.

Получена 31 января 1953 г.  
Киев.