Фильтрация в почти однородной среде

В. Н. Остапенко

1. При решении большинства задач фильтрации предполагается, что водопроницаемость среды постоянна во всей области движения грунтовых вод.

Без этого упрощающего предположения решение этих задач весьма затруднено.

Поэтому значительный интерес представляет выяснение условий, при которых введение указанного предположения в малой степени влияет на точность решения задач.

Исходя из экспериментальных результатов, П. Ф. Фильчаков [2] поставил задачу о влиянии неоднородности фильтрационных свойств среды на точность решения задач фильтрации. В рассмотренных в статье [2] примерах при неоднородности среды порядка $\pm 10\%$ точность решения задач составляла 1%.

В настоящей заметке рассматривается влияние неоднородности водопроницаемой среды на точность решения задач фильтрации и устанавливаются некоторые условия, при выполнении которых среду можно практически считать однородной.

2. Движение грунтовых вод в однородном грунте подчиняется закону Дарси:

$$\begin{aligned} v_x &= k\frac{\partial H}{\partial x}, \\ v_y &= k\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $H = H(x, y)$ — функция напора, $k = \text{const}$ — коэффициент фильтрации.

Так как

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \tag{2}$$

то решение задачи фильтрации сводится к нахождению функции H, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

и некоторым граничным условиям.

Очевидно, что в естественных условиях коэффициент фильтрации

$$k = k(x, y) \neq 0. \tag{4}$$

Следовательно, в этом случае решение задачи фильтрации сводится к нахождению функции $H_1 = H_1(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x, y)\frac{\partial H_1}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x, y)\frac{\partial H_1}{\partial y}\right] = 0 \tag{5}$$

и тем же граничным условиям, что и функция H.

Решение уравнения (5) в большинстве случаев не может быть получено. Однако, как показали исследования задач фильтрации, проведенные в Институте математики АН УССР, функцию H_1 с достаточной степенью точности можно заменить функцией H, если функция $k(x, y)$ удовлетворяет некоторым условиям.

Пусть $D(\Gamma)$ — область фильтрации, Γ — граница области фильтрации. Определим величину k_0 следующим образом:

$$k_0 = \frac{1}{|D|}\iint\limits_D k(x, y)\,dx\,dy, \tag{6}$$

где $|D|$ площадь области D.

Рассмотрим функцию

$$\delta(x, y) = k - k_0. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_D \delta(x, y)\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Разобьем область D на N областей D_n, таких, что для каждой области D_n выполняется условие

$$\iint\limits_{D_n} \delta\,dx\,dy = 0 \tag{9}$$

и для любой области D_n', содержащейся в D_n,

$$\iint\limits_{D_n'} \delta\,dx\,dy \neq 0. \tag{10}$$

Кроме того, будем предполагать, что функция δ имеет непрерывные производные третьего порядка и что

$$\delta\big|_\Gamma = \frac{\partial\delta}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{11}$$

Обозначим

$$H_1 = H + \varepsilon; \tag{12}$$

ε, очевидно, удовлетворяет однородным граничным условиям.

Подставляя (12) и (7) в (5), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) + \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Вводя замену

$$E = \varepsilon\sqrt{k}, \tag{14}$$

уравнение (13) преобразуем к виду

$$\Delta E-\frac{\Delta\sqrt{k}}{\sqrt{k}}E+\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0. \tag{15}$$

Из уравнения (15) следует соотношение

$$E(x, y)=-\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)E(\xi, \eta)\frac{\Delta\sqrt{k(\xi, \eta)}}{\sqrt{k(\xi, \eta)}}d\xi\, d\eta+$$
$$+\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)\frac{1}{\sqrt{k(\xi, \eta)}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

Возвращаясь к функции ε из (16), получим

$$\varepsilon(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{k(x, y)}}\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)\varepsilon(\xi, \eta)\Delta\sqrt{k(\xi, \eta)}\,d\xi\, d\eta+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k(x, y)}}\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)\frac{1}{\sqrt{k(\xi, \eta)}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)d\xi\, d\eta, \tag{17}$$

где $K(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина для рассматриваемой краевой задачи.

Применяя к (17) теорию Фредгольма, представим ε в виде:

$$\varepsilon=\iint\limits_D R(x, y, \xi, \eta, \lambda)\,\psi(\xi, \eta)\,d\xi\, d\eta+\psi(x, y), \tag{18}$$

где

$$\psi(x, y)=\frac{1}{\sqrt{k(x, y)}}\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)\frac{1}{\sqrt{k(\xi, \eta)}}\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)d\xi\, d\eta, \tag{19}$$

$R(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ — резольвента Фредгольма.

Из (18) получим

$$|\varepsilon|\leqslant\iint\limits_D |R|\,|\psi|\,d\xi\, d\eta+|\psi|, \tag{20}$$

т. е.

$$|\varepsilon|\leqslant M\max|\psi|. \tag{21}$$

Ограничиваясь первым членом разложения функции $\frac{1}{\sqrt{k}}$ в ряд, выражение (19) представим в виде:

$$\psi(x, y)=\frac{1}{k_0}\iint\limits_D K(x, y, \xi, \eta)\left(\frac{\partial\delta}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\partial\delta}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)d\xi\, d\eta. \tag{22}$$

Интегрируя правую часть (22) по частям, получим

$$\psi(x, y)=-\frac{1}{k_0}\iint\limits_D \delta\left(\frac{\partial K}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\xi}+\frac{\partial K}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\eta}\right)d\xi\, d\eta. \tag{23}$$

Учитывая (9) при оценке ψ из (23), получим

$$|\psi|\leqslant\frac{\overline{\delta}|\overline{D}_n|}{k_0}C, \tag{24}$$

где $\overline{\delta} = \max |\delta|$, $|\overline{D}_n| = \max \{|D_n|\}$.

Из (21) и (24) следует

$$|\varepsilon| < A \frac{\overline{\delta} |\overline{D}_n|}{k_0}, \tag{25}$$

где A — некоторая постоянная величина, определяемая для каждой конкретной краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I и II, 1952.
2. П. Ф. Фильчаков, Моделирование задач фильтрации на электропроводной бумаге, ДАН, т. 84, № 2, 1952.

Получена 28 января 1953 г.

Киев.