DOI: 10.3842/umzh.v76i2.7748

УДК 512.64

Володимир Щедрик[1] (Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів)

ПАРАМЕТРИЧНІ 2-РОЗКЛАДИ В ПОВНИХ ЛІНІЙНИХ ГРУПАХ МАЛОГО ПОРЯДКУ НАД ПОЛЕМ

We obtain a parametric decomposition of elements of complete linear groups of the second and third orders over an arbitrary field. This decomposition is based on the canonical (unambiguous) representation of these elements in the form of the product of elements from the groups of commutators of certain Jordan matrices and representatives of the left cosets of these groups.

Отримано параметричний розклад елементів повних лінійних груп другого та третього порядків над довільним полем, який ґрунтується на їх канонічному (однозначному) зображенні у вигляді добутку елементів із груп комутаторів певних матриць Жордана та представників лівих суміжних класів цих груп.

1. Вступ. Стандартно в цій статті через F позначатимемо довільне поле, через $M_n(R)$ і $\mathrm{GL}_n(R)$ — кільце та повну лінійну групу матриць порядку n над кільцем R відповідно.

Розклад матриць над F у добуток декількох зустрічається досить часто і бере початок з класичної лінійної алгебри. Зокрема, будь-яка матриця є добутком оборотної та ступінчастої, що використовується в методі Гаусса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Іншим прикладом є розклад довільної оборотної матриці в добуток верхньої трикутної, переставної та верхньої трикутної матриць, який, зауважимо, допускає глибоке узагальнення на алгебраїчні групи і відомий в теорії таких груп як розклад Брюа (Bruhat). Дещо інший набір співмножників використано в [1], де доведено, що кожна оборотна матриця над F є добутком верхньої трикутної, нижньої та верхньої унітрикутних матриць. Якщо говорити про матриці над кільцями, в [2], зокрема, показано, що елементи $\mathrm{GL}_n(F[x])$ можна записати у вигляді добутку матриці із групи Зеліска (означення див. нижче), нижньої та верхньої унітрикутних матриць. У пропонованій роботі дається зображення елементів груп $\mathrm{GL}_3(F)$ і $\mathrm{GL}_2(F)$ у вигляді добутку елементів груп комутаторів певних матриць Жордана та представників їх лівих суміжних класів. Особливостями таких зображень є їх однозначність і параметричність.

2. Основна ідея. Нехай A — матриця над $F[x]$, що записана у вигляді матричного полінома над F:

$$A = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ \dots \ + A_0, \quad A_i \in M_3(F).$$

Матриця A називається унітальною, якщо $A_k = I$ — одинична матриця. Будемо говорити, що A регуляризується справа, якщо існує така матриця $U \in \mathrm{GL}_3(F[x])$, що

$$AU = Ix^s + D_{s-1}x^{s-1} + \ \dots \ + D_0.$$

Розглянемо матрицю вигляду

$$Ix - T^{-1}JT, \tag{1}$$

[1] E-mail: shchedrykv@ukr.net.

де $T \in \mathrm{GL}_3(F),\ J = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Кожна така матриця має форму Сміта $\Phi := \mathrm{diag}\,(1, x, x^2)$. Справді,

$$(PT)(Ix - T^{-1}JT)(T^{-1}Q) = \Phi, \text{ де } P := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{Vmatrix}, \quad Q := \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси випливає, що $Ix - T^{-1}JT$ можна записати у вигляді

$$Ix - T^{-1}JT = (PT)^{-1}\Phi(T^{-1}Q)^{-1}.$$

При цьому ця матриця є лівим дільником матриці Ix^2:

$$Ix^2 = ((PT)^{-1}\Phi(T^{-1}Q)^{-1}) \cdot ((T^{-1}Q)\mathrm{diag}\,(x^2, x, 1)(PT)).$$

Навпаки, нехай $Ix^2 = (Ix - B)C$, де $B \in M_3(F),\ C \in M_3(F[x])$, до того ж $Ix - B$ має форму Сміта Φ. Оскільки єдиним характеристичним числом матриці B є $0 \in F$, то на підставі теореми 7 із [3, с. 140] існує така $L \in \mathrm{GL}_3(F)$, що $B = L^{-1}JL$. Таким чином, усі ліві унітальні дільники Ix^2 з формою Сміта Φ мають вигляд (1). З викладеного випливає, що елементи групи $\mathrm{GL}_3(F)$ „заховані" в лівих дільниках матриці Ix^2, які мають форму Сміта Φ. Отже, для їх опису спершу потрібно знайти всі ліві унітальні дільники Ix^2 з формою Сміта Φ.

Нехай $Ix^2 = KN$ — довільний розклад Ix^2 у добуток двох поліноміальних матриць. Якщо $V \in \mathrm{GL}_3(F[x])$, то $Ix^2 = (KV)(V^{-1}N)$. Тобто всі матриці, які асоційовані справа до K, є лівими дільниками Ix^2. На підставі леми 5.7 із [4, с. 175], якщо матриця з $M_3(F[x])$ регуляризується справа, то лише єдиним чином. Тобто клас асоційованих справа матриць містить не більше однієї унітальної матриці.

Розіб'ємо множину матриць з формою Сміта Φ на класи асоційованих між собою справа матриць. Інструментом такої сепарації є група Зеліска матриці Φ:

$$\mathbf{G}_\Phi = \{H \in \mathrm{GL}_3(F[x]) \mid \exists\, H_1 \in \mathrm{GL}_3(F[x])\colon H\Phi = \Phi H_1\}.$$

Згідно з [5], вона складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ xh_{21} & h_{22} & h_{23} \\ x^2h_{31} & xh_{32} & h_{33} \end{Vmatrix} \in \mathrm{GL}_3(F[x]). \tag{2}$$

Необхідною умовою асоційованості матриць є рівність їх форм Сміта. Нехай A, B мають форму Сміта Φ. Тоді їх можна записати у вигляді $A = P_A^{-1}\Phi Q_A^{-1},\ B = P_B^{-1}\Phi Q_B^{-1}$, де $P_A, Q_A, P_B, Q_B \in \mathrm{GL}_3(F[x])$. На підставі теореми 4.5 із [4, с. 128] матриці A, B асоційовані справа тоді й лише тоді, коли $P_B = HP_A$, де $H \in \mathbf{G}_\Phi$. Розіб'ємо групу $\mathrm{GL}_3(F[x]$ на класи суміжності $\mathbf{G}_\Phi K$, де $K \in \mathrm{GL}_3(F[x])$. Позначимо через $W(\Phi)$ множину представників цих класів. Згідно з теоремою 4.6 із [4, с. 129], $W^{-1}(\Phi)\Phi$ є множиною всіх лівих неасоційованих справа дільників Ix^2 з формою Сміта Φ. Таким чином, на другому кроці потрібно знайти явний вигляд усіх елементів множини $W(\Phi)$, а на третьому вибрати із множини $W^{-1}(\Phi)\Phi$ всі ті матриці, що регуляризуються справа. Завершальним кроком буде зображення цих матриць у вигляді (1).

Для подальших досліджень нам потрібно буде скористатись поняттям Φ-скелета матриці [6, 7], яке є одним із важливих інваріантів матриць стосовно перетворень із групи $\mathbf{G}_\Phi$.

Позначимо $\Phi_1 := I,\ \Phi_2 := \mathrm{diag}\,(x,1,1),\ \Phi_3 := \mathrm{diag}\,(x^2,x,1)$. Нехай $P \in \mathrm{GL}_3(F[x])$. Для матриць $\Phi_i P$ існують такі $U_i \in \mathrm{GL}_3(F[x])$, що

$$U_i \Phi_i P = \begin{Vmatrix} \sigma_{i1} & 0 & 0 \\ * & \sigma_{i2} & 0 \\ * & * & \sigma_{i3} \end{Vmatrix},$$

де σ_{ij} належить множині неасоційованих елементів кільця $F[x],\ i,j = 1,2,3$ (див., зокрема, ліву форму Ерміта матриць).

Означення. *Φ-скелетом матриці P називається матриця $S_\Phi(P) := \|\ \sigma_{ij}\|_1^3$.*

Теорема 1 [4, с. 225]. *Якщо $P \in \mathrm{GL}_3(F[x])$ і $H \in \mathrm{G}_\Phi$, то $S_\Phi(P) = S_\Phi(HP)$.*

3. Основні результати. Опис елементів групи $\mathbf{GL_3(\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}])}$.

Теорема 2. *Елементами множини $W(\Phi)$ є такі матриці*:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx+c & d & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ bx+c & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & bx+c & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$
$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & x \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

де $a,b,c,d,n \in F,\ m \in F\backslash\{0\}$.

Доведення. На підставі теореми 6.8 із [4, с. 226] усі матриці з $\mathrm{GL}_3(F[x])$ можуть мати такі Φ-скелети:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x^2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x^2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x \end{Vmatrix},$$
$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x^2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x & x \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & x & x \end{Vmatrix}.$$

Зауважимо, що перші шість із цих матриць називаються стандартними Φ-скелетами [7]. Згідно з теоремою 7.2 із [4, с. 232], представниками суміжних класів, які мають стандартні Φ-скелети, є перші шість класів матриць множини (3) (ці класи отримують, коли всі параметри, що фігурують у цих матрицях, набувають усіх допустимих значень з поля F). Таким чином, залишається знайти представників суміжних класів, які мають Φ-скелети:

$$S_1 := \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & x & x \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad S_2 := \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & x & x \end{Vmatrix}.$$

Нехай $P \in \mathrm{GL}_3(F[x])$, до того ж $S_\Phi(P) = S_1$. На підставі теорем 6.4 і 6.5 із [4, с. 220, 222] у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_1, що

$$H_1 P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 1 \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{Vmatrix} =: P_1.$$

На підставі теореми 1 $S_\Phi(HP) = S_1$. Звідси випливає, що матриці $\Phi_3 \begin{Vmatrix} p_{12} & 0 \\ p_{22} & 1 \\ p_{32} & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \\ * & x \end{Vmatrix}$ є асоційованими зліва. Це означає, що н.с.д. мінорів 2-го порядку матриці $\begin{Vmatrix} x^2 p_{12} & 0 \\ x p_{22} & x \\ p_{32} & 0 \end{Vmatrix}$ дорівнює x^2. Звідси випливає, що $p_{32} = x p'_{32}$, до того ж $(p'_{32}, x) = 1$. Матриця P_1 оборотна. Тому оборотною є її підматриця $\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{31} & p_{32} \end{Vmatrix}$. Отже,

$$(p_{12}, p_{32}) = (p_{12}, x p'_{32}) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; (p_{12}, p'_{32}) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; (x p_{12}, p'_{32}) = 1.$$

Існують такі $u_1, v_1 \in F[x]$, що

$$x p_{12} u_1 + p'_{32} v_1 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 p_{12} u_1 + p_{32} v_1 = x.$$

При цьому

$$(x u_1, v_1) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; (x^2 u_1, v_1) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; x^2 u_1 u_2 + v_1 v_2 = 1$$

для деяких $u_2, v_2 \in F[x]$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} v_2 & 0 & -u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ x^2 u_1 & 0 & v_1 \end{Vmatrix} P_1 = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 1 \\ q_{31} & x & 0 \end{Vmatrix} =: P_2.$$

Матриця P_2 є оборотною. Тому $(q_{31}, x) = 1$. Тоді елемент q_{31} можна записати у вигляді $q_{31} = c_{31} x + m,\ c_{31} \in F[x], m \in F \setminus \{0\}$. Із вигляду матриці P_2 випливає, що існує така оборотна матриця U, що

$$U \Phi_3 P_2 = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ q_{31} & x & 0 \\ p_{21} x & p_{22} x & x \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} -c_{31} & 1 & 0 \end{Vmatrix} U \Phi_3 P_2 = \begin{Vmatrix} m & x & 0 \end{Vmatrix}.$$

Позначимо

$$\begin{Vmatrix} -c_{31} & 1 & 0 \end{Vmatrix} U =: \begin{Vmatrix} u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} x^2 u_{31} & x u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m & x & 0 \end{Vmatrix} P_2^{-1}.$$

Рядок $\begin{Vmatrix} m & x & 0 \end{Vmatrix}$ є примітивним, тобто його елементи взаємно прості. Отже, і $\begin{Vmatrix} x^2 u_{31} & x u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix}$ є примітивним рядком. Оскільки $F[x]$ — кільце головних ідеалів, то на підставі теореми 3.7 із [8] його можна доповнити до оборотної матриці вигляду

$$H_2 := \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ x^2 u_{31} & x u_{32} & u_{33} \end{matrix} \right\| \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тоді

$$H_2 P_2 = \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| =: P_3.$$

Оскільки $S_\Phi(P_3) = S_1$, то $(xd_{13}, d_{23}) = 1$. Існують такі $c_{13}, c_{23} \in F[x]$, що

$$xd_{13}c_{13} + d_{23}c_{23} = 1.$$

Тоді

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} d_{23} & -d_{13} & 0 \\ xc_{13} & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}_{H_3} P_3 = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| =: P_4, \quad H_3 \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Запишемо b_{22} у вигляді $b_{22} = c_{22}x + n$, де $c_{22} \in F[x]$, $n \in F$. Тоді

$$\underbrace{\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_{22} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|}_{H_4} P_4 = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b'_{21} & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| =: P_5, \quad H_4 \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Розглянемо матричне рівняння стосовно невідомого Y :

$$Y\Phi_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| P_5^{-1}.$$

Звідси отримуємо

$$Y\Phi_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| \delta^{-1} \left\| \begin{matrix} -x & 0 & b_{12} \\ m & 0 & -b_{11} \\ xb'_{21} - mn & mb_{12} - xb_{11} & b_{11}n - b'_{21}b_{12} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} xb'_{21}\delta^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $\delta = b_{21}m - b_{11}x \in F \setminus \{0\}$. Оскільки $m \neq 0$, то матриця $\left\| \begin{matrix} 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\|$ є примітивною, тобто н.с.д. мінорів 2-го порядку цієї матриці є взаємно простими. Отже, є примітивною і матриця $\left\| \begin{matrix} xb'_{21}\delta^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$. Доповнимо її до оборотної матриці вигляду

$$\left\| \begin{matrix} * & * & * \\ xb'_{21} & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| =: H_5 \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тоді

$$H_5 P_5 = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix} \right\| =: P_6.$$

Легко переконатися, що існує оборотна верхня трикутна матриця H_6, яка, очевидно, належить групі $\mathbf{G}_\Phi$, така що

$$H_6P_6 = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix}\right\| =: P_7. \tag{4}$$

Переконаємося, що в суміжному класі $\mathbf{G}_\Phi P_7$ існує єдина матриця вигляду (4). Припустимо, що

$$H\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & 1 \\ m_1 & x & 0 \end{matrix}\right\|,$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi, \quad m, m_1 \in F\backslash\{0\}, \quad n, n_1 \in F$. Звідси випливає, що

$$H = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & 1 \\ m_1 & x & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} -xm^{-1} & 0 & m^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} * & * & * \\ n_1 - n & * & * \\ x(1 - m_1m^{-1}) & 0 & m_1m^{-1} \end{matrix}\right\|.$$

Оскільки матриця H має вигляд (2), то

$$x|(n_1 - n) \Rightarrow n_1 - n = 0 \Rightarrow n_1 = n.$$

Також

$$x^2|x(1 - m_1m^{-1}) \Rightarrow x|(1 - m_1m^{-1}) \Rightarrow 1 - m_1m^{-1} = 0 \Rightarrow m_1m^{-1} = 1 \Rightarrow m_1 = m.$$

Отже, ми описали всіх представників суміжних класів $\mathbf{G}_\Phi P$, для яких $S_\Phi(P) = S_1$.

Нехай тепер

$$S_\Phi(P) = S_2 := \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & x & x \end{matrix}\right\|.$$

На підставі теорем 6.4 і 6.5 із [4, c. 220, 222] у групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H_1, що

$$H_1P = \left\|\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & x \end{matrix}\right\| =: P_1.$$

Згідно з теоремою 1, $S_\Phi(HP) = S_1$. Тому матриця Φ_2P_1 асоційована зліва до матриці вигляду

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & x \end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

Тоді матриця

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|\Phi_2P_1 = \left\|\begin{matrix} xp_{11} - p_{31} & xp_{12} - p_{32} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & x \end{matrix}\right\|$$

також асоційована зліва до матриці (5). Звідси випливає, що $(p'_{12}, p_{22}) = 1$, де $p'_{12} := xp_{12} - p_{32}$. Оскільки $F[x]$ є кільцем Безу стабільного рангу 1,5 [9], то, згідно з теоремою 1.9 із [4, с. 34], існують такі $u, v \in F[x]$, що $p'_{12}u + p_{22}v = 1$, де $(v, x) = 1$.

Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} ux & v & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $(v, ux) = 1$, то ця матриця є примітивною. Доповнимо її до оборотної матриці вигляду

$$H_2 := \begin{Vmatrix} * & * & * \\ ux & v & -u \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тоді

$$H_2P_1 = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & 1 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & x \end{Vmatrix} =: P_2.$$

Запишемо p_{32} у вигляді $p_{32} = b_{32}x + n$, де $b_{32} \in F[x]$, $n \in F$. Розглянемо матрицю

$$H_3 := \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -xb_{32} & 1 \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тоді

$$H_3P_2 = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & 1 & 0 \\ p'_{31} & n & x \end{Vmatrix} =: P_3.$$

Запишемо p'_{31} у вигляді $p'_{31} = b_{31}x + m$, де $b_{31} \in F[x]$, $m \in F$. Оскільки $S_\Phi(P_3) = S_2$, то існує така матриця $U \in \mathrm{GL}_3(F[x])$, що

$$U\Phi_3P_3 = \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ xm_{21} & x & 0 \\ p'_{31} & n & x \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} -b_{31} & 0 & 1 \end{Vmatrix} U\Phi_3P_3 = \begin{Vmatrix} m & n & x \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} -b_{31} & 0 & 1 \end{Vmatrix} U\Phi_3 = \begin{Vmatrix} m & n & x \end{Vmatrix} P_3^{-1}.$$

З оборотності матриці P_3 випливає, що $(p'_{31}, n, x) = 1$. Отже,

$$(b_{31}x + m, n, x) = (m, n, x) = 1.$$

Тому $\begin{Vmatrix} -b_{31} & 0 & 1 \end{Vmatrix} U\Phi_3$ є примітивним рядком. Запишемо його у вигляді

$$\begin{Vmatrix} -b_{31} & 0 & 1 \end{Vmatrix} U\Phi_3 =: \begin{Vmatrix} x^2u_{31} & xu_{32} & u_{33} \end{Vmatrix}$$

і доповнимо до оборотної матриці вигляду

$$H_3 := \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ x^2 u_{31} & x u_{32} & u_{33} \end{Vmatrix} \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Тоді

$$H_3 P_2 = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ m & n & x \end{Vmatrix} =: P_4.$$

З означення Φ-скелета випливає, що матриця $\Phi_2 P_4$ асоційована зліва до матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}.$$

Це означає, що $(xc_{13}, c_{23}, x) = x$. Отже, $c_{23} = x' c_{23}$. Тоді

$$\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c'_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{H_4} P_4 = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix} =: P_5, \quad H_4 \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Повторивши міркування, що були наведені на початку розгляду цього випадку, знайдемо в $\mathbf{G}_\Phi$ таку матрицю H_5, що

$$H_5 P_5 = \begin{Vmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c''_{21} & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix} =: P_6.$$

Покладемо

$$\delta := \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{якщо } m \neq 0. \end{cases}$$

Зважаючи на те, що $(m, n, x) = 1$, приходимо до висновку, що матриця

$$\begin{Vmatrix} \delta & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}$$

є примітивною. Доповнимо її до оборотної матриці вигляду

$$P_7 := \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ \delta & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$P_7 P_6^{-1} = (\det P_6)^{-1} \begin{Vmatrix} * & * & * \\ x(\delta - c''_{21}) & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =: H_6 \in \mathbf{G}_\Phi.$$

Звідси отримуємо, що $P_7 = H_6 P_6$. У випадку $m \neq 0$ розв'язком рівняння

$$YP_7 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & x \end{matrix} \right\| =: P_8 \tag{6}$$

є оборотна верхня трикутна матриця H_8, яка, очевидно, є елементом групи $\mathbf{G}_\Phi$. Аналогічним чином показуємо, що у випадку $m = 0$ лівими перетворенням із групи $\mathbf{G}_\Phi$ матриця P_7 зводиться до вигляду

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & n & x \end{matrix} \right\| =: P_9.$$

Переконаємося, що в лівому класі суміжності $\mathbf{G}_\Phi P_8$ існує єдина матриця вигляду (6). Припустимо, що

$$H \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m_1 & n_1 & x \end{matrix} \right\|,$$

де $H \in \mathbf{G}_\Phi,\ m, m_1 \in F \backslash \{0\},\ n, n_1 \in F$. Звідси випливає, що

$$H = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m_1 & n_1 & x \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} -xm^{-1} & -nm^{-1} & m^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x(1 - m_1 m^{-1}) & n_1 - nm^{-1} m_1 & m_1 m^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки H має вигляд (2), то, як і у випадку матриць з Φ-скелетом S_1, отримуємо, що $m_1 = m$ і $n_1 = n$.

Припустимо, що

$$H_1 \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & n & x \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & x \end{matrix} \right\|,$$

де $H_1 \in \mathbf{G}_\Phi,\ n, n_1 \in F \backslash \{0\}$. Звідси випливає, що

$$H = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & x \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} xn^{-1} & 1 & -n^{-1} \\ -xn^{-1} & 0 & n^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x(1 - n_1 n^{-1}) & 0 & n_1 n^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $x^2 | x(1 - n_1 n^{-1})$, то $n_1 = n$.

Теорему 2 доведено.

Маючи явний вигляд матриць множини $W(\Phi)$, можемо отримати явний вигляд усіх неасоційованих справа матриць з формою Сміта Φ. А саме, такою множиною буде $W^{-1}(\Phi)\Phi$ (див. теорему 4.6 із [4, с. 129]). Наступним кроком буде вибір серед матриць цієї множини тих, що регуляризуються справа.

Теорема 3. *Регуляризуються справа такі матриці з множини* $W^{-1}(\Phi)\Phi$:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx + c & d & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \Phi, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ bx + c & 1 & 0 \end{matrix} \right\|^{-1} \Phi, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & bx + c & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \Phi,$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & x \end{Vmatrix}^{-1} \Phi, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}^{-1} \Phi,$$

де $a, c, d, n \in F,\ b, m \in F\backslash\{0\}$.

Доведення. З теореми 2 випливає, що множина $N(\Phi)$, яка складається з елементів

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

де $a, c, d \in F$, є підмножиною множини $W(\Phi)$. На підставі теореми 6.1 із [10, с. 180] жодна матриця з множини $N^{-1}(\Phi)\Phi$ не регуляризується справа.

Простою перевіркою переконуємося, що матриці з множини $(W(\Phi)\backslash N(\Phi))^{-1}\Phi$ регуляризуються справа. Дійсно,

1) $$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bx + c & d & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_1 = Ix - B_1,$$

де

$$U_1 := \begin{Vmatrix} x - cb^{-1} & -db^{-1} & -b^{-1} \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_1 := b^{-1}\begin{Vmatrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (ad - c)c & (ad - c)d & ad - c \end{Vmatrix};$$

2) $$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ bx + c & 1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_2 = Ix - B_2,$$

де

$$U_2 := \begin{Vmatrix} x - cb^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_2 := b^{-1}\begin{Vmatrix} c & 1 & 0 \\ -c^2 & -c & 0 \\ -ac & -a & 0 \end{Vmatrix};$$

3) $$\left(\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ d & bx + c & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_3 = Ix - B_3,$$

де

$$U_3 := \begin{Vmatrix} -db^{-1} & x - cb^{-1} & -b^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_3 := b^{-1}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ -cd & -c^2 & -c \end{Vmatrix};$$

4) $$\left(\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ m & x & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_4 = Ix - B_4, \; U_4 := \begin{Vmatrix} -m & x & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_4 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 \\ -mn & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

5) $\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & x \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_5 = Ix - B_5, \quad U_5 := \begin{Vmatrix} 0 & -m & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_5 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{Vmatrix};$

6) $\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & x \end{Vmatrix}^{-1} \Phi\right) \cdot U_6 = Ix - B_6, \ U_6 := \begin{Vmatrix} -m & -n & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_6 := \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ m & n & 0 \end{Vmatrix}.$

Теорему 3 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нільпотентними матрицями в кільці $M_3(F)$ є*

$$\mathbf{0}, \ s\begin{Vmatrix} c & d & 1 \\ -ac & -ad & -a \\ (ad-c)c & (ad-c)d & ad-c \end{Vmatrix}, \ s\begin{Vmatrix} c & 1 & 0 \\ -c^2 & -c & 0 \\ -ac & -a & 0 \end{Vmatrix},$$

$$s\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ -cd & -c^2 & -c \end{Vmatrix}, \quad s\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad s\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad s\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{Vmatrix},$$

де $a, c, d, k \in F, \ s \in F \backslash \{0\}$.

Доведення. Розглянемо рівняння $X^2 = 0$ у кільці $M_3(F)$. На підставі узагальненої теореми Безу коренями цього рівняння є ті і лише ті матриці B, для яких виконується рівність $Ix^2 = (Ix - B)C$, де $C \in M_3(F[x])$. На підставі теореми 4.2 із [4, с. 127] форма Сміта дільників матриці Ix^2 ділить її форму Сміта (у нашому випадку матриця Ix^2 збігається зі своєю формою Сміта). Оскільки $\deg\det(Ix - B) = 3$, то потенційними формами Сміта лівих дільників Ix^2, які мають вигляд $Ix - B$, є Ix та $\mathrm{diag}\,(1, x, x^2)$. Єдиним дільником шуканого вигляду з формою Сміта Ix, згідно з теоремою 5.1 із [4, с. 151], є $Ix - 0$. Тобто ми отримуємо нульову матрицю в якості кореня рівняння $X^2 = 0$. Ліві унітальні дільники Ix^2 з формою Сміта $\mathrm{diag}\,(1, x, x^2)$ описано в теоремі 3: $Ix - B_i, \ i = 1, 2, \ldots, 6$. Перепозначаючи $s := b^{-1}, \ s := m, \ k := nm^{-1}, \ k := -n$, завершуємо доведення.

Теорема 4. *Нехай $A \in W^{-1}(\Phi)\Phi$ і регуляризується справа. Тоді A асоційована справа до матриці вигляду $Ix - B$, де $B = T^{-1}JT, \ J = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, T належить множині*

$$\left\{\begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \begin{Vmatrix} a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ 0 & b & 0 \end{Vmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{Vmatrix} 0 & n & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\right\},$$

де $b, m \in F \backslash \{0\}, \ a, c, d, n \in F$.

Доведення. Матриця A має форму Сміта Φ і регуляризується справа. На підставі міркувань, наведених на початку статті, A регуляризується справа до матриці вигляду $Ix - B$, де $B = T^{-1}JT$. За теоремою 3 множина $Ix - B_i, \ i = 1, 2, \ldots, 6$, є множиною всіх унітальних матриць, до яких зводяться матриці множини $W^{-1}(\Phi)\Phi$. Простою перевіркою переконуємося, що $B_i = T_i^{-1}JT_i, \ i = 1, 2, \ldots, 6$, де

$$T_1 = \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_2 = \begin{Vmatrix} a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ 0 & b & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T_4 = \begin{Vmatrix} 0 & n & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_5 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad T_6 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теорему 4 доведено.

Теорема 5.

$$\mathrm{GL}_3(F) = \begin{Vmatrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{Vmatrix} \cdot \left\{ \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ 0 & b & 0 \end{Vmatrix} \right\}$$

$$\bigcup \begin{Vmatrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{Vmatrix} \cdot \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & n & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}, \tag{7}$$

де $b, m, f, g \in F \backslash \{0\},\ a, c, d, n, p, q, s \in F.$

Доведення. У теоремі 4 вказано явний вигляд усієї множини тих оборотних матриць T, для яких $Ix - T^{-1}JT$ є лівим дільником матриці Ix^2. При цьому для будь-якої іншої матриці T_1 з цієї множини маємо $T^{-1}JT \neq T_1^{-1}JT_1$. Припустимо, що $K \in \mathrm{GL}_3(F)$ і виконується рівність $K^{-1}JK = T^{-1}JT$. З цієї рівності випливає, що $(TK^{-1})J = J(TK^{-1})$, тобто $T = LK$, де $LJ = JL$. Таким чином, оборотні матриці T і K генерують один і той самий лівий унітальний дільник матриці Ix^2, коли вони відрізняються одна від одної справа на оборотну матрицю, яка комутує з матрицею J. Тобто відрізняються одна від одної справа на елемент із групи комутаторів матриці J. Очевидно, що й обернені твердження будуть правильними. Легко переконатися, що група комутаторів матриці J складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$M := \begin{Vmatrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{Vmatrix}, \quad f, g \in F \backslash \{0\}, \quad p, q, s \in F.$$

Переконаємося, що множина (7) не містить однакових елементів.

1. Припустимо, що

$$\begin{Vmatrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & d & 1 \\ b & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ c_1 & d_1 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} gc & gd & g \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 & d_1 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow g = 1,$$

$$\begin{Vmatrix} q & s & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^t = 0 \Rightarrow s = 0, \quad \begin{Vmatrix} q & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & d & 0 \end{Vmatrix}^t = 0 \Rightarrow q = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} f & p & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^t = 0 \Rightarrow p = 0, \quad \begin{Vmatrix} f & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & d & 0 \end{Vmatrix}^t = 1 \Rightarrow f = 1.$$

Таким чином, $M = I$.

2. Припустимо, що

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_1 & 0 & 1 \\ c_1 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$\left\|\begin{matrix} gc & g & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} c_1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| \Rightarrow g = 1, \quad \left\|\begin{matrix} q & s & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \;\Rightarrow\; q = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} 0 & s & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \;\Rightarrow s = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = 1 \Rightarrow f = 1, \quad \left\|\begin{matrix} 1 & p & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \;\Rightarrow\; p = 0.$$

Таким чином, $M = I$.

3. Припустимо, що

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ 0 & b & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ d & c & 1 \\ 0 & b & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$\left\|\begin{matrix} gd & gc & g \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} d & c & 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow g = 1, \quad \left\|\begin{matrix} q & s & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \;\Rightarrow s = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} q & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & d & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \;\Rightarrow q = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \Rightarrow p = 0, \quad \left\|\begin{matrix} f & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & d & 0 \end{matrix}\right\|^t = 1 \;\Rightarrow f = 1.$$

Таким чином, $M = I$.

4. Припустимо, що

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & n & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & n_1 & 1 \\ m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 1 \;\Rightarrow f = 1,$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & p & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & m & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \Rightarrow pm = 0 \Rightarrow p = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} q & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \Rightarrow q = 0, \quad \left\|\begin{matrix} 0 & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} n & 0 & 1 \end{matrix}\right\|^t = 1 \;\Rightarrow g = 1,$$

$$\left\|\begin{matrix} 0 & s & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 0 & m & 0 \end{matrix}\right\|^t = 0 \Rightarrow sm = 0 \Rightarrow s = 0.$$

Таким чином, $M = I$.

5. Припустимо, що

$$\left\|\begin{matrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$\left\| q \quad s \quad g \right\| \left\| 0 \quad 0 \quad 1 \right\|^t = 1 \Rightarrow g = 1, \ \left\| 0 \quad 1 \quad 0 \right\| \left\| 1 \quad m \quad 0 \right\|^t = m_1 \ \Rightarrow m = m_1.$$

6. Припустимо, що

$$\begin{Vmatrix} f & p & 0 \\ 0 & g & 0 \\ q & s & g \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m_1 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\left\| q \quad s \quad g \right\| \left\| 0 \quad 0 \quad 1 \right\|^t = 1 \ \Rightarrow g = 1,$$

$$\left\| 0 \quad 1 \quad 0 \right\| \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \left\| m_1 \quad n_1 \quad 0 \right\| \ \Rightarrow \ m = m_1, \quad n = n_1.$$

Як було зауважено вище, множення матриць T зліва на матрицю вигляду M не змінює вигляд матриці $(LT)^{-1}J(LT)$. Отже, таке множення не може перевести матрицю з одного параметричного класу до іншого. Таким чином, у записаній множині немає однакових елементів.

Теорему 5 доведено.

4. Опис елементів групи $\mathbf{GL_2}(\boldsymbol{F})$.

Теорема 6.

$$\mathrm{GL}_2(F) = \begin{Vmatrix} m & 0 \\ n & m \end{Vmatrix} \cdot \left\{ \begin{Vmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}, \tag{8}$$

де $a, c, m \in F\backslash\{0\}, b, n \in F.$

Доведення. Для опису елементів групи $\mathrm{GL}_2(F)$ можна використати метод, який був застосований при дослідженні елементів групи $\mathrm{GL}_3(F)$. Однак при розгляді матриць другого порядку краще працює метод „в лоб”: спершу переконаємося, що множина (8) не містить однакових елементів, а потом покажемо, що кожна оборотна матриця з $\mathrm{GL}_2(F)$ міститься в цій множині.

Позначимо

$$M := \begin{Vmatrix} m & 0 \\ n & m \end{Vmatrix}, \quad M_1 := \begin{Vmatrix} m_1 & 0 \\ n_1 & m_1 \end{Vmatrix}, \quad B := \begin{Vmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_1 := \begin{Vmatrix} b_1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де $a, a_1, m, m_1 \in F\backslash\{0\}, \ b, b_1, n, n_1 \in F.$

1. Нехай

$$MB = M_1B_1 \Rightarrow M_1^{-1}M = B_1B^{-1}.$$

Тоді

$$M_1^{-1}M = \begin{Vmatrix} m_1^{-1}m & 0 \\ pm_1^{-1} - p_1m_1^{-2}m & m_1^{-1}m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & a^{-1}(b_1 - b) \\ 0 & a_1a^{-1} \end{Vmatrix} = B_1B^{-1}.$$

Звідси отримуємо $m_1^{-1}m = 1$. Отже, $m = m_1$. Також

$$pm_1^{-1} - p_1m_1^{-1} = m_1^{-1}(p - p_1) = 0 \Rightarrow p = p_1.$$

Це означає, що $M = M_1$. Отже, $B = B_1$.

2. Припустимо, що $MB = M_1 \mathrm{diag}\,(c, 1)$. Тоді

$$M_1^{-1}M = \begin{Vmatrix} m_1^{-1}m & 0 \\ pm_1^{-1} - p_1m_1^{-2}m & m_1^{-1}m \end{Vmatrix} = \mathrm{diag}\,(c,1)B^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & ca^{-1} \\ 1 & -ba^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що $m_1^{-1}m = 0$ — суперечність.

3. Не викликає труднощів переконатися у тому, що з рівності $M\mathrm{diag}\,(c, 1) = M_1\mathrm{diag}\,(c_1, 1)$ випливає, що $c = c_1$ і $M = M_1$.

Покажемо, що кожний елемент групи $\mathrm{GL}_2(F)$ міститься в множині (8).

Нехай $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F)$, тобто $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

I. Якщо $\beta \neq 0$, то

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ \delta & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha}{\beta} & 1 \\ \dfrac{\gamma}{\beta} - \dfrac{\alpha\delta}{\beta^2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

II. Якщо $\beta = 0$, то

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta & 0 \\ \dfrac{\gamma\delta}{\alpha} & \delta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha}{\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теорему 6 доведено.

Автор висловлює щиру вдячність рецензенту за його слушні поради щодо покращення якості статті.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. K. Nagarajan, M. Devasahayam, T. Soundararajan, *Products of three triangular matrices*, Linear Algebra and Appl., **292**, 61 – 71 (1999).
2. В. П. Щедрик, *Кільця Безу стабільного рангу 1,5 і розклад повної лінійної групи в добуток деяких її підгруп*, Укр. мат. журн., **69**, № 1, 113 – 120 (2017).
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988).
4. V. Shchedryk, *Arithmetic of matrices over rings*, Akademperiodyka, Kyiv (2021); https://doi.org/10.15407/akademperiodika.430.278; https://www.researchgate.net/publication/353979871_Arithmetic_of_matrices.
5. В. Р. Зелиско, *О строении одного класса обратимых матриц*, Мат. методы и физ.-мех. поля, № 12, 14 – 21 (1980).
6. В. П. Щедрик, *Ф-скелет матриць і його властивості*, Мат. методи і фіз.-мех. поля, **43**, № 2, 45 – 51 (2000).
7. В. П. Щедрик, *Неасоційовані матриці зі стандартним Ф-скелетом*, Мат. методи і фіз.-мех. поля, **45**, № 3, 32 – 44 (2002).
8. I. Kaplansky, *Elementary divisor and modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **66**, 464 – 491 (1949).
9. В. П. Щедрик, *Кільця Безу стабільного рангу 1,5*, Укр. мат. журн., **67**, № 6, 849 – 860 (2015).
10. В. Петричкович, *Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями*, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів (2015); http://www.iapmm.lviv.ua/14/index.htm.

Одержано 11.08.23