1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. V, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп

В. С. Чарин

В настоящей статье изучаются полные* подгруппы автоморфизмов группы всех автоморфизмов некоторых классов абстрактных групп. В целях упрощения формулировок предложений условимся называть группой автоморфизмов заданной группы не обязательно группу всех ее автоморфизмов, а лишь подгруппу последней с тем или иным свойством.

Следуя А. И. Мальцеву [3], мы будем называть разрешимую группу группой типа A_i $(i = 2, 3, 4)$, если она обладает конечным нормальным рядом с факторами, являющимися абелевыми группами типа A_i $(i = 2, 3, 4)$. Абелеву группу называем:

1) типа A_2, если она имеет конечный ранг (мы всюду под рангом понимаем конечный специальный ранг в смысле А. И. Мальцева [2]);

2) типа A_3, если максимальная ее периодическая подгруппа распадается в прямое произведение конечного числа циклических и примарных локально циклических (типа p^∞), а фактор-группа по ней имеет конечный ранг;

3) типа A_4, если максимальная ее периодическая подгруппа конечна, а фактор-группа по ней имеет конечный ранг.

Предварительно докажем три вспомогательные предложения.

Под ε-свойством некоторой группы будем понимать одно из трех следующих свойств: а) конечность ранга, б) отсутствие элементов конечного порядка, в) нильпотентность.

Лемма 1**. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нормальные делители группы $\mathfrak{G}$ и $\vartheta = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Если факторы-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ обладают ε-свойством, то и фактор-группа $\mathfrak{G}/\vartheta$ обладает ε-свойством.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для ε-свойства а). Так как $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, то из конечности ранга $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ следует конечность ранга $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B}$. Но $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\vartheta$, поэтому ранг $\mathfrak{A}/\vartheta$ конечен. Но ранг $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ также конечен. Отсюда следует конечность ранга $\mathfrak{G}/\vartheta$ [4]. Доказательство для ε-свойства б) такое же.

Приведем доказательство для ε-свойства в). Пусть $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ обладает центральным рядом, образы членов которого в $\mathfrak{G}$ составляют ряд

$$\mathfrak{A} = \zeta_0 \subset \zeta_1 \subset \zeta_2 \subset \cdots \subset \zeta_n = \mathfrak{G}.$$

* Группа $\mathfrak{A}$ называется полной, если для любого ее элемента A и произвольного целого положительного числа n уравнение $X^n = A$ разрешимо в ней.

** Лемма 3 из [6] является несколько более слабым утверждением.

Пусть $\zeta'_\alpha = \zeta_\alpha \cap \mathfrak{B}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, n$). Если $Z \in \zeta'_{\alpha+1}$, $A \in \mathfrak{G}$, то $[Z, A] = Z^{-1}A^{-1}ZA \in \mathfrak{B}$. Значит, $[Z, A] \in \zeta_\alpha \cap \mathfrak{B}$, т. е. $[Z, A] \in \zeta'_\alpha$ и, следовательно, $\zeta'_{\alpha+1}/\zeta'_\alpha$ входит в центр $\mathfrak{G}/\zeta'_\alpha$. Но $\zeta'_n = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ обладает центральным рядом. Поэтому $\mathfrak{G}/\zeta'_0 = \mathfrak{G}/\vartheta$ обладает центральным рядом.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева периодическая группа конечного ранга. Если Γ — некоторая полная группа ее автоморфизмов, то она состоит лишь из единичного элемента.

Доказательство. Пусть A — произвольный элемент из $\mathfrak{A}$ и Π — совокупность всех тех автоморфизмов из Γ, которые оставляют A неподвижным. Так как число элементов из $\mathfrak{A}$ заданного порядка конечно, то индекс Π в Γ конечен. Но вследствие полноты Γ подгруппа Π должна совпадать с Γ. Итак, все автоморфизмы из Γ оставляют неподвижным элемент A. Так как элемент A произволен, то все элементы из $\mathfrak{A}$ остаются неподвижными при автоморфизмах из Γ. Это значит, что Γ состоит лишь из единичного элемента.

Лемма 3. Если группа $\mathfrak{G}$ является расширением нильпотентной группы $\mathfrak{A}$ конечного ранга с помощью полной нильпотентной группы $\mathfrak{B}$, то группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна.

Доказательство получается небольшим изменением доказательства теоремы 8 из [8].

Теперь мы перейдем к изучению групп автоморфизмов некоторых разрешимых групп.

Теорема 1. Полная группа Γ автоморфизмов разрешимой группы $\mathfrak{G}$ конечного ранга разрешима.

Доказательство. Группа $\mathfrak{G}$, будучи разрешимой типа A_2, обладает цепочкой подгрупп

$$\mathfrak{G}_0 = 1 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}, \tag{1}$$

состоящей из характеристических подгрупп с абелевыми факторами типа A_2 [3]. Так как максимальная периодическая подгруппа абелевой группы характеристична в ней, то можно полагать, что все эти факторы либо периодические, либо без кручения.

Через Ω_i обозначим совокупность всех автоморфизмов, индуцированных в факторе-группе $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) автоморфизмами из Γ. Совокупность Ω_i есть группа, являющаяся гомоморфным образом группы Γ и поэтому полная. Через Δ_i обозначим ядро гомоморфного отображения $\Gamma \to \Omega_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Если фактор-группа $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ — периодическая, то из леммы 2 вытекает, что Ω_i состоит лишь из тождественного автоморфизма, т. е. в этом случае Δ_i совпадает с Γ.

Если фактор-группа $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ — без кручения, то все автоморфизмы представляются матрицами над полем рациональных чисел. Когда ранг $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ равен единице, порядок матриц также равен единице, и группа Ω_i является подгруппой мультипликативной группы рациональных чисел. Вследствие полноты группа Ω_i состоит из единицы, т. е. $\Delta_i = \Gamma$. Если же ранг $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ больше единицы, то ввиду следствия теоремы 4 из [8] группа $\Omega_i \cong \Gamma/\Delta_i$ нильпотентна, без кручения и конечного ранга.

Таким образом, во всех случаях фактор-группы Γ/Δ_i суть полные нильпотентные группы без кручения и конечного ранга.

Пусть $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \cdots \cap \Delta_n$. Тогда фактор-группа $\Gamma/\Delta = \Psi$ ввиду леммы 1 есть нильпотентная группа без кручения и конечного ранга.

Каждый автоморфизм φ из Δ индуцирует во всех факторах ряда (1) тождественные автоморфизмы. По теореме Л. А. Калужнина из [10] группа Δ нильпотентна. Отсюда и следует разрешимость группы $\mathfrak{G}$.

Теорема 2. Полная группа Γ автоморфизмов нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ конечного ранга нильпотентна.

Доказательство. Пусть

$$1 = \zeta_0 \subset \zeta_1 \subset \zeta_2 \subset \cdots \subset \zeta_m = \mathfrak{G} \tag{2}$$

— верхний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Каждый фактор ζ_i/ζ_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots, m$) содержит максимальную периодическую подгруппу в качестве характеристической. Поэтому ряд (2), состоящий из характеристических подгрупп группы $\mathfrak{G}$, можно так уплотнить характеристическими же подгруппами, что каждый фактор нового ряда будет либо периодическим, либо без кручения. Поэтому мы и предположим, что ряд

$$1 = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G} \tag{3}$$

обладает как раз этим свойством.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, мы обнаружим, что либо все автоморфизмы из Γ индуцируют в факторе-группе $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ тождественный автоморфизм, либо же (когда $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ без кручения и ранга $\geqslant 2$) совокупность Ω_i индуцированных автоморфизмов является полной нильпотентной группой конечного ранга и без кручения. Но ввиду леммы 2 из [9] в последнем случае фактор-группу $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ можно уплотнить рядом

$$\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_{i-1} \subset \mathfrak{A}_1/\mathfrak{G}_{i-1} \subset \mathfrak{A}_2/\mathfrak{G}_{i-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{A}_k/\mathfrak{G}_{i-1} = \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1} \tag{4}$$

подгрупп, в котором в каждом факторе автоморфизмы из Ω_i индуцируют тождественные автоморфизмы. Заметим, что все $\mathfrak{A}_j$ — нормальные делители в $\mathfrak{G}$.

Значит ряд (3) можно всегда уплотнить так, чтобы новый ряд состоял из нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$ и во всех факторах которого автоморфизмы из Γ индуцировали бы тождественные автоморфизмы. Но тогда по теореме Л. А. Калужнина [10] группа Γ нильпотентна.

Теорема 3. Полная группа Γ автоморфизмов разрешимой группы $\mathfrak{G}$ типа A_4 нильпотентна, без кручения и конечного ранга.

Доказательство проводится методом, в основном принадлежащим Д. М. Смирнову [5].

1. Пусть цепочка подгрупп группы $\mathfrak{G}$

$$1 = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G} \tag{5}$$

является цепочкой характеристических подгрупп с абелевыми факторами конечного ранга и конечной периодической частью (можно считать в дальнейшем, что каждый из факторов этой цепочки либо периодический, либо без кручения). Существование ее вытекает из следствия теоремы 3 работы [3]. Если через Φ обозначить совокупность всех тех автоморфизмов из Γ, которые оставляют неподвижными элементы каждого из фактор-групп $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то Φ — нормальный делитель в Γ.

Через Φ_i обозначим совокупность всех тех автоморфизмов из Φ, которые оставляют неподвижными все элементы из подгруппы $\mathfrak{G}_i$. Ясно, что Φ_i — нормальный делитель в Φ и

$$\Phi = \Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \cdots \supseteq \Phi_{n-1} \supseteq \Phi_n = 1. \tag{6}$$

Фактор-группа Φ_{i-1}/Φ_i изоморфна группе тех автоморфизмов $\mathfrak{G}_i$, которые индуцируются автоморфизмами из Φ и которые оставляют неподвижными элементы из $\mathfrak{G}_{i-1}$ и $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$. Так как все фактор-группы Φ_{i-}/Φ_i в этом отношении одинаковы, то мы рассмотрим подробнее лишь одну из них, а именно $\Phi_{n-1}/\Phi_n = \Phi_{n-1}$.

2. Покажем сначала, что ранг Φ_{n-1} конечен. Для этого представим фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{n-1}$ в виде возрастающей последовательности

$$\mathfrak{G}_{n-1}/\mathfrak{G}_{n-1} \subset \mathfrak{A}_1/\mathfrak{G}_{n-1} \subset \mathfrak{A}_2/\mathfrak{G}_{n-1} \subset \cdots \tag{7}$$

подгрупп, где каждая $\mathfrak{A}_k/\mathfrak{G}_{n-1}$ имеет конечное число образующих $\bar{A}_{k1}, \bar{A}_{k2}, \ldots, \bar{A}_{kr}$, что возможно в силу конечности ранга $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{n-1}$. Здесь r — ранг последней фактор-группы. Пусть $A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{kr}$ — некоторые представители из $\mathfrak{G}$ соответствующих классов. Определим прямое произведение

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_{n-1} \times \mathfrak{G}_{n-1} \times \cdots \times \mathfrak{G}_{n-1}$$

r экземпляров подгрупп $\mathfrak{G}_{n-1}$ и отображение

$$\varphi \to (A_{k1}^{-1}A_{k1}^{\varphi}, A_{k2}^{-1}A_{k2}^{\varphi}, \ldots, A_{kr}^{-1}A_{kr}^{\varphi})$$

элементов $\varphi \in \Phi_{n-1}$ в $\mathfrak{P}$, которым пользовался Д. М. Смирнов в своей вышеуказанной работе. Это отображение группы Φ_{n-1} в группу $\mathfrak{P}$ является гомоморфным, ядро которого обозначим через Ψ_k. Ясно, что

$$\Phi_{n-1} \supseteq \Psi_1 \supseteq \Psi_2 \supseteq \cdots, \quad \cap \Psi_k = \Phi_n = 1.$$

Так как ранг $\mathfrak{G}$ конечен и, скажем, равен ϱ, то ранг $\mathfrak{G}_{n-1} \leqslant \varrho$, а потому ранг $\mathfrak{P} \leqslant r\varrho \leqslant \varrho^2$.

Группа Φ_{n-1} абелева (теорема 1 из [10]), поэтому и все фактор-группы Φ_{n-1}/Ψ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ абелевы. Они же, будучи изоморфны подгруппам группы $\mathfrak{P}$, которая имеет тип A_4 и конечный ранг, сами имеют тип A_4 и конечный ранг $\leqslant \varrho^2$.

Ввиду теоремы 9 из работы А. И. Мальцева [3] конечные подгруппы разрешимой группы типа A_4 имеют порядок, ограниченный некоторым фиксированным числом. Поэтому и все Φ_{n-1}/Ψ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ в качестве максимальных периодических подгрупп имеют подгруппы, порядок которых ограничен числом N, не зависящим от k.

Если $\theta_k = \Phi_{n-1}/\Psi_k$, то число непериодических факторов некоторого нормального ряда группы θ_k с факторами ранга 1 не зависит от способа построения такого нормального ряда, что непосредственно следует из теоремы Шрейера. Начиная с некоторого номера $k = l$ наступит стабилизация этого числа. Значит, для $k \geqslant l$ все Ψ_k/Ψ_{k+1} суть периодические группы. Среди $\Psi_l, \Psi_{l+1}, \ldots$ имеется лишь конечное число не совпадающих, ибо иначе, взяв достаточно большой номер $k = l_1$, мы получили бы периодическую подгруппу Ψ_l/Ψ_{l_1} в Φ_{n-1}/Ψ_{l_1} сколь угодно большого порядка $> N$, что невозможно. Значит, начиная с некоторого номера $k = l_2$, мы имеем $\Psi_{l_2} = \Psi_{l_2+1} = \cdots = \Phi_n = 1$. Следовательно, $\Phi_{n-1} = \Phi_{n-1}/\Phi_n$ есть абелева группа конечного ранга, притом типа A_4.

3. Но это же рассуждение годится для всех Φ_{i-1}/Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует, что Φ имеет конечный ранг. Вместе с тем из теоремы Л. А. Калужнина [10] следует, что Φ — нильпотентна.

4. Фактор-группа $\Gamma/\Phi = \Psi$, как гомоморфный образ полной группы Γ, полная.

Покажем, далее, что Ψ — нильпотентная группа конечного ранга.

С этой целью заметим, что каждый элемент $\psi \in \Psi$ индуцирует в факторах $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ряда (5) автоморфизмы, совокупность которых составляет группу Ω_i. Последняя — полная, нильпотентна и конечного ранга, как это и было показано при доказательстве теоремы 1. Пусть Δ_i — ядро гомоморфного отображения $\Psi \to \Omega_i$. Тогда $\Psi/\Delta_i \cong \Omega_i$.

Если $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \cdots \cap \Delta_n$, то Δ состоит лишь из одного единичного элемента группы Ψ, ибо элемент $\psi \in \Delta$ индуцирует во всех факторах $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_{i-1}$ тождественные автоморфизмы.

Ввиду леммы 1 группа Ψ/Δ нильпотентна, конечного ранга и без кручения.

Поэтому группа Γ представляет собой расширение нильпотентной группы Φ конечного ранга с помощью полной нипьпотентной группы Ψ конечного ранга. Но тогда из леммы 3 следует нильпотентность и конечность ранга группы Γ.

5. Остается показать, что группа Γ без кручения.

Из пунктов 3 и 4 настоящего доказательства следует, что группа Γ нильпотентна и типа A_4. Но, будучи полной, она содержит все элементы конечного порядка в центре [7], причем они составляют полную подгруппу, которая также типа A_4, что возможно только в том случае, когда последняя состоит лишь из одного единичного элемента.

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна, без кручения и конечного ранга, то полная группа Γ автоморфизмов ее нильпотентна, без кручения и конечного ранга.

Доказательство следует из того известного факта, что все факторы верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ суть абелевы без кручения, т. е. нильпотентная группа $\mathfrak{G}$ имеет тип A_4 и к ней может быть применена доказанная теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа типа A_3. Тогда полная группа Γ ее автоморфизмов является расширением полной абелевой группы Φ с помощью полной нильпотентной группы Ψ без кручения и конечного ранга.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 3 из [3] фактор-группа разрешимой A_3-группы $\mathfrak{G}$ по ее максимальному периодическому нормальному делителю $\mathfrak{H}$ есть разрешимая группа типа A_4. Однако из указанной выше работы А. И. Мальцева вытекает, что всякая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ также имеет тип A_3. Однако тогда подгруппа $\mathfrak{H}$ обладает конечным нормальным рядом с факторами, удовлетворяющими условию минимальности для подгрупп. Но тогда и сама подгруппа $\mathfrak{H}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп (см. стр. 189 из [1]). Известный результат С. Н. Черникова утверждает существование в $\mathfrak{H}$ характеристической подгруппы $\mathfrak{A}$, которая разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических подгрупп типа p^∞ (по некоторым простым числам p, не обязательно одинаковым), фактор-группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{A}$ по которой — конечная разрешимая группа. Ясно, что фактор-группа $\mathfrak{B}=\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ является разрешимой группой типа A_4.

Ввиду леммы 2 автоморфизмы из Γ индуцируют в $\mathfrak{A}$ тождественные автоморфизмы. Пусть Φ — совокупность всех тех автоморфизмов из Γ, которые индуцируют в $\mathfrak{B}=\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ тождественные автоморфизмы. Φ — нормальный делитель в Γ и $\Psi=\Gamma/\Phi$ — полная группа автоморфизмов разрешимой группы $\mathfrak{B}$ типа A_4. Из теоремы 3 следует, что Ψ — нильпотентная группа конечного ранга и без кручения. Подгруппа Φ группы Γ абелева (теорема 1 из [10]). Полнота Φ следует из того факта, что Γ — полная и Γ/Φ — без кручения.

Ранг подгруппы Φ группы Γ автоморфизмов $\mathfrak{G}$ не обязан быть конечным. В этом можно убедиться на нижеследующем примере.

Пусть $\mathfrak{A}$ — квазициклическая группа типа 3^∞. Пользуясь аддитивной формой записи групповой операции, выделим такую последовательность элементов $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, что $3A_1=0$, $3A_2=A_1, \ldots, 3A_{n+1}=$ $=A_n, \ldots$, причем в этой последовательности некоторые из элементов A_n могут быть нулями (ясно, что либо все элементы A_n равны 0, либо же лишь конечное число первых). Каждую из таких последовательностей будем записывать в виде

$$\varphi=(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots).$$

Если условиться считать последовательность φ отличной от аналогичной последовательности $\psi=(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$ в том, и только в том, случае, когда для некоторого номера n $A_n \neq B_n$, то множество Φ их будет несчетным (ибо для всякого отличного от нуля элемента $A \in \mathfrak{A}$ имеется три различных элемента, удовлетворяющих соотношению $X^3=A$). Множество Φ обратим в группу, определив групповую операцию для двух ее элементов φ и ψ так:

$$\varphi+\psi=(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)+(B_1, B_2, \ldots, B_n \ldots)=$$
$$=(A_1+B_1,\ A_2+B_2, \ldots, A_n+B_n, \ldots).$$

Ясно, что $\varphi+\psi \in \Phi$ и $\varphi+\psi=\psi+\varphi$.

Эта группа Φ не имеет элементов конечного порядка и не может быть группой конечного ранга, так как абелева группа конечного ранга конечна или счетна.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{C}$ аддитивную группу всех рациональных чисел вида $\dfrac{m}{3^k}$, где m — всевозможные целые числа, k — всевозможные целые неотрицательные числа. Если

$$C_1=1,\quad C_2=\frac{1}{3},\quad C_3=\frac{1}{3^2}, \ldots, C_{n+1}=\frac{1}{3^n}, \ldots,$$

то

$$\{C_1\} \subset \{C_2\} \subset \cdots \subset \{C_{n+1}\} \subset \cdots \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\{C_n\}=\mathfrak{C}.$$

Определим прямую сумму $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{C}$ как множество всевозможных пар $A + C$ с $A \in \mathfrak{A}$ и $C \in \mathfrak{C}$, с обычным образом определенной операцией сложения. В ней для любого $\varphi = (A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots) \in \Phi$ определим отображение, обозначаемое тем же символом φ, следующим образом.

Если $\mathfrak{G} = A + C \in \mathfrak{G}$, где $C = mC_n$, то положим $\varphi(A + C) = A + C + mA_n$. Легко проверить, что φ — автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, причем он индуцирует в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ тождественные автоморфизмы. Таким образом, мы построили группу Φ автоморфизмов, индуцирующих в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ тождественные автоморфизмы. Она абелева и бесконечного ранга.

В данном случае группа Φ автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$ неполная, однако небольшое усложнение конструкции делает ее полной. Для этого достаточно рассмотреть вместо последовательностей φ приведенного выше вида ряды следующего вида.

Пусть $(\cdots * \cdots * | * * \cdots * \cdots)$ — счетное множество пустых мест, обозначаемых звездочками и упорядоченных по типу всех целых чисел. Здесь вертикальная черта означает границу, разделяющую правую часть от левой. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность, рассмотренная выше, то заполним пустые места из приведенного множества их, начиная с некоторого, членами этой последовательности, а все остальные нулями. Получим ряды типа

$$\varphi = (\ldots 0, \ldots, A_n | A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+k}, \ldots).$$

В совокупности всех таких рядов можно определить операцию сложения:

$$(\ldots, 0, \ldots, A_n | A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots) + (\ldots, 0, \ldots, B_m | B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots) =$$
$$= (\ldots, 0, \ldots, A_n + B_m | A_{n+1} + B_{m+1}, \ldots),$$

что обращает ее в группу, аналогичную группе Φ, но уже полную.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, ОГИЗ, 1944.
2. А. И. Мальцев, О группах конечного ранга, Мат. сб., 22 (64) (1948), 351—352.
3. А. И. Мальцев, О некоторых классах бесконечных разрешимых групп, Мат. сб., 28 (70) (1951), 567—586.
4. Н. Н. Мягкова, О группах конечного ранга, Изв. АН СССР, серия мат., 13 (1949), 495—512.
5. Д. М. Смирнов, О группах автоморфизмов разрешимых групп, Мат. сб., 32 (74) (1953), 365—384.
6. Н. Ф. Сесекин, О локально нильпотентных группах без кручения, Мат. сб., 32 (74) (1953), 407—442.
7. С. Н. Черников, Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом, Мат. сб., 18 (60) (1946), 397—422.
8. В. С. Чарин, К теории локально нильпотентных групп, Мат. сб., 29 (71) (1951), 433—454.
9. В. С. Чарин, Об условии минимальности для нормальных делителей локально разрешимых групп, Мат. сб., 33 (75) (1953) (в печати).
10. Л. А. Калужнин, Sur quelques propriétés des groups d'automorphismes d'un group abstrait, C. R. Acad. Sci., Paris, 234, № 24 (1950), 2067—2069.

Получена 12 июня 1953 г.

Свердловск.