1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. V, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об одном интегро-дифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины

А. Ю. Ишлинский

Упругая нить (или канат) с грузом на конце представляет собой механическую систему с бесконечным числом степеней свободы. Наличие неизбежного внутреннего трения материала нити (или каната), а также трения груза о воздух приводит к сравнительно быстрому исчезновению из спектра частот колебаний системы всех высших частот, т. е. к так называемому освобождению основного тона системы. Последнее обстоятельство делает возможным приближенное рассмотрение каната с грузом на конце как механической системы с одной степенью свободы.

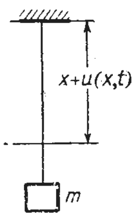

Рис. 1.

Например, в методе Релея для случая каната постоянной длины принимается, что все элементы системы совершают гармонические движения с одной и той же фазой. Амплитуды этих движений принимаются пропорциональными статическим перемещениям элементов системы под действием подвешенного груза. Далее составляются выражения кинетической и потенциальной энергий системы и используется уравнение Лагранжа второго рода, причем за обобщенную координату обычно принимается перемещение груза.

В конечном счете дело сводится к обычному дифференциальному уравнению гармонических колебаний, которое имеет тот же вид, как и в случае каната, лишенного массы; однако масса груза оказывается увеличенной на одну треть массы каната (так называемая поправка Релея).

Непосредственное применение метода Релея к канату переменной длины встречает затруднения, обусловленные сложностью граничных условий, а также тем обстоятельством, что уравнения Лагранжа второго рода справедливы лишь для систем, масса которых в процессе движения не изменяется.

Нетрудно показать, что уже в применении к канату постоянной длины (рис. 1) можно избежать выкладок, связанных с использованием выражений для кинетической и потенциальной энергий каната и получить то же самое дифференциальное уравнение, отправляясь непосредственно от дифференциального уравнения каната

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t)=0, \quad m\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = -EF\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}. \tag{2}$$

Здесь ϱ — плотность каната, F — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости, $u = u(x, t)$ — смещение точек каната от положения равновесия, m — масса подвешенного груза.

Имея в виду в дальнейшем искать приближенное решение в виде

$$u(x, t) = x\varphi(t), \tag{3}$$

умножим правую и левую части уравнения (1) на x и проинтегрируем их в пределах от $x=0$ до $x=l$, минимизируя тем самым невязку от замены в уравнении (1) точного значения $u(x, t)$ приближенным.

В результате, используя интеграцию по частям, получим соотношение

$$\varrho\int_0^l x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx = E\int_0^l x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx = Ex\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^l - E\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{4}$$

Используя первое граничное условие (2), приходим к формуле

$$El\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \varrho\int_0^l x\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}dx + Eu(l, t), \tag{5}$$

которая совместно со вторым граничным условием (2) приводит к интегро-дифференциальному соотношению

$$m\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \frac{\varrho F}{l}\int_0^l x\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}dx + \frac{EF}{l}u(l, t) = 0. \tag{6}$$

Подставляя сюда выражение (3), получим дифференциальное уравнение

$$\left(m + \frac{1}{3}\varrho Fl\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{EF}{l}\varphi = 0, \tag{7}$$

отличающееся от уравнения, составленного по методу Релея, лишь постоянным множителем.

Заметим, что при составлении приближенных уравнений следует избегать дифференцирования приближенных представлений искомых величин, так как это неизбежно ведет к значительной утере точности.

Если, например, приближенное представление смещения $u(x, t)$ согласно формуле (3) непосредственно подставить во второе граничное условие (2), то придем к дифференциальному уравнению

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{EF}{l}\varphi = 0,$$

значительно менее точному, чем уравнение (7), так как влияние собственной массы каната остается неучтенным.

Перейдем теперь к составлению приближенного уравнения движения груза на канате переменной длины (рис. 2), используя приемы, аналогичные только что изложенным. Через $u(x, t)$ будем обозначать в дальнейшем перемещение какого-либо сечения каната относительно груза по сравнению с положением этого сечения при ненатянутом канате; буквой x обозначается расстояние рассматриваемого сечения от груза при ненатянутом канате.

Обозначим далее буквой ξ расстояние груза от точки схода каната с колеса. Очевидно, что величина

$$l(t) = \xi - u(l, t) \tag{8}$$

представляет собою так называемую естественную длину каната, т. е. длину каната между колесом и грузом в ненатянутом состоянии.

Выражения

$$v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{d\xi}{dt} \quad \text{и} \quad w = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} \tag{9}$$

суть абсолютные скорости и ускорения элементов каната.

Дифференциальное уравнение движения элементов каната, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varrho g, \tag{10}$$

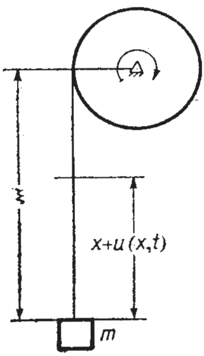

Рис. 2.

где g — ускорение силы тяжести.

Здесь и в дальнейшем всюду учитывается сила тяжести элементов каната и груза, так как $u(x, t)$ является теперь перемещением элементов каната, отсчитываемым от положения их при естественном состоянии каната, а не от положения равновесия, как это было выше.

Граничные условия на нижнем конце каната сводятся к равенству

$$u(0, t) = 0 \tag{11}$$

и к уравнению движения груза

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -EF\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + mg. \tag{12}$$

Что касается граничного условия на верхнем конце каната, т. е. при $x = l(t)$, то оно должно выражать равенство между скоростью элемента каната, приходящего в соприкосновение с колесом (или, наоборот, покидающего колесо) и окружной скоростью этого колеса v, т. е.

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} - \frac{d\xi}{dt} = v. \tag{13}$$

При этом предполагается, что скольжение каната по колесу отсутствует.

Заметим, что дифференцируя соотношение (8) по времени с учетом того обстоятельства, что $l = l(t)$, получим

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\frac{dl}{dt} - \frac{\partial u(l, t)}{\partial t}. \tag{14}$$

Исключая посредством последнего равенства величину $\frac{d\xi}{dt}$ из соотношения (13), приходим к следующему условию:

$$\left[1 + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\right]\frac{dl}{dt} = -v. \tag{15}$$

Если канат сматывается с колеса, то уместно считать заданной функцию $l(t)$. В этом случае соотношение (15) позволяет найти величину

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}, \tag{16}$$

т. е. относительное удлинение верхнего элемента каната.

Напротив, при наматывании каната на колесо естественно считать функцию $l(t)$ неизвестной. Соотношение (15) связывает в этом случае производную этой функции с относительным удлинением элемента каната, приходящего в соприкосновение с ободом колеса. Впрочем, из-за малости величины деформации (16) по сравнению с единицей можно принять, что с большой точностью справедливо равенство

$$\frac{dl}{dt} = -v. \tag{17}$$

Умножим, как и ранее, правую и левую части дифференциального уравнения (10) на переменную x и проинтегрируем их в пределах от $x = 0$ до $x = l$; получим

$$\varrho \int_0^l x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx - \varrho \frac{l^2}{2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = El \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - Eu(l, t) - \varrho g \frac{l^2}{2}. \tag{18}$$

Найдем далее связь между величинами

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}, \tag{19}$$

для чего проинтегрируем правую и левую части дифференциального уравнения (10) непосредственно по x в тех же пределах. В результате придем к соотношению

$$\varrho \int_0^l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx - \varrho l \frac{d^2 \xi}{dt^2} = E\left[\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}\right] - \varrho g l, \tag{20}$$

которое в сущности представляет собой приложение принципа Даламбера к движению рабочей части каната.

Умножим теперь правые и левые части граничного условия (12) на l, соотношения (18) на F и, наконец, соотношения (20) на $-lF$ и соответственно сложим их. В итоге величины (19) исключаются и образуется соотношение

$$\left(m + \frac{1}{2}\varrho F l\right) l \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \varrho F \int_0^l (l - x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx =$$

$$= -EFu(l, t) + \left(m + \frac{1}{2}\varrho F l\right) lg, \tag{21}$$

содержащее функции $u(x, t)$, $\xi(t)$ и $l(t)$.

Продифференцируем по времени обе части равенства (13); учитывая вновь, что $l = l(t)$, имеем

$$\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x\, \partial t} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \tag{22}$$

откуда можно немедленно определить вторую производную функции $\xi(t)$ и подставить ее выражение в соотношение (21). В результате получим следующее основное интегро-дифференциальное соотношение:

$$\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)l\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}+\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)l\frac{dl}{dt}\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x\,\partial t}-$$

$$-\varrho F\int_0^l (l-x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dx+EFu(l,t)=$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)l\frac{dv}{dt}+\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)lg, \qquad (23)$$

в котором окружная скорость колеса v и функция $l(t)$ связаны равенством (17) или, в более точной постановке, равенством (15). Соотношение (23) может быть использовано для составления приближенных уравнений колебаний груза на канате переменной длины.

Так, предполагая, как и выше, что

$$u(x,t)=x\varphi(t),$$

приходим после очевидных преобразований к линейному дифференциальному уравнению относительно функции $\varphi(t)$

$$\left(m+\frac{1}{3}\varrho Fl\right)l\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)\frac{dl}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+EF\varphi=$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)\frac{dv}{dt}+\left(m+\frac{1}{2}\varrho Fl\right)g. \qquad (24)$$

Уравнение (7) можно рассматривать как частный случай уравнения (24) при $l=\text{const}$ и, следовательно, в силу равенства (17) или (15) — при $v=0$. Правая часть уравнения (24) обусловливает при этом среднее удлинение каната под действием собственного веса.

В другом частном случае, если пренебречь собственной массой каната, т. е. положить в уравнении (24) $\varrho=0$, приходим к уравнению, которое исследовал Н. П. Неронов.

Приемами, аналогичными выше изложенным, можно получать интегро-дифференциальные соотношения и приближенные уравнения для канатов переменной длины с учетом несовершенной упругости.

ЛИТЕРАТУРА

Н. П. Неронов, Определение напряжений в подъемных канатах, Труды совещания по шахтным подъемным канатам, Изд-во АН СССР, 1944.

Получена 16 мая 1953 г.
Киев.