Динамическое расширение упругого цилиндра

Е. Х. Агабабян

В работе рассматривается задача о действии мгновенно возникшего и остающегося в дальнейшем постоянным давления p по внутренней границе полого упругого цилиндра конечного внешнего радиуса b (внутренний радиус a).

Дифференциальное уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r_1} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r_1} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}$$

после подстановки в него соотношений закона Гука

$$\sigma_r = \lambda \theta_1 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r_1},$$

$$\sigma_\theta = \lambda \theta_1 + 2\mu \frac{u}{r_1}$$

и замены переменных

$$r = \frac{r_1}{a}, \qquad t = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}\, t_1$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Вводя две новые искомые функции

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}, \qquad v = \frac{\partial u}{\partial t}$$

получим систему уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

эквивалентную полученному выше уравнению (1).

Характеристики этой системы суть два семейства прямых

$$dr = dt,$$

$$dr = -dt,$$

вдоль которых соответственно имеют место дифференциальные соотношения

$$dv - d\theta = -\frac{v}{r}\,dr, \tag{2}$$

$$dv + d\theta = -\frac{v}{r}\,dr. \tag{3}$$

Задачу решаем при следующих граничных и начальных условиях:

$$r=1, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma_r = \frac{1}{a}\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -p, \tag{4}$$

$$r = \frac{b}{a}, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma_r = 0.$$

В начальный момент времени перемещения и скорости точек цилиндра равны нулю. Следовательно,

$$v=0, \quad \theta=0 \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{и} \quad 1 < r \leqslant \frac{b}{a}.$$

Значение θ в точке $r=1$, $t=0$ находится из граничного условия

$$\frac{1}{a}\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -p.$$

Так как в указанной точке $u=0$, то

$$\theta_{0,\,0} = -\frac{pa}{\lambda+2\mu}. \tag{5}$$

Характеристику первого семейства $dr = dt$, исходящую из точки $r=1$, $t=0$ (рис. 1), будем называть главной характеристикой. Нетрудно убедиться, что для всех точек, расположенных ниже главной характеристики, θ и v равны нулю.

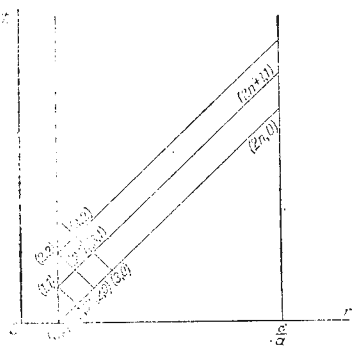

Рис. 1.

На главной характеристике имеем соотношение

$$dv - d\theta = -\frac{v}{r}\,dr. \tag{2}$$

Если взять какую-либо точку на главной характеристике и провести через нее характеристику второго семейства в сторону уменьшающихся t, то на последней с одной стороны θ и v равны нулю, а с другой стороны имеет место дифференциальное соотношение

$$dv + d\theta = -\frac{v}{r}\,dr.$$

Следовательно, в точках главной характеристики должно выполняться равенство

$$v + \theta = 0. \tag{6}$$

Используя (6), выражение (2) можно представить в виде

$$2dv = -\frac{v}{r}\,dr.$$

Откуда после интеграции получим $v = \frac{c}{\sqrt{r}}$. Константа c определяется из условия

$$v = -\theta_{0,0} \quad \text{при} \quad r = 1, \quad t = 0.$$

Таким образом, на главной характеристике всюду, кроме точки $(2n, 0)$,

$$v = -\frac{\theta_{0,0}}{\sqrt{r}}, \quad \theta = \frac{\theta_{0,0}}{\sqrt{r}}, \tag{7}$$

где $\theta_{0,0}$ определяется формулой (5).

Для нахождения значений $\theta_{2n,0}$ и $v_{2n,0}$ следует использовать граничное условие

$$(\lambda + 2\mu)\,\theta_{2n,0} - 2\mu\,\frac{u_{2n,0}}{r_{2n,0}} = 0. \tag{8}$$

Так как $u_{2n,0} = 0$, то и $\theta_{2n,0} = 0$.

Величину $v_{2n,0}$ легко определить из соотношения (2), в котором дифференциалы заменены конечными разностями

$$v_{2n,0} - v_{2n-1,0} - (\theta_{2n,0} - \theta_{2n-1,0}) = -\frac{v_{2n-1,0}}{r_{2n-1,0}}\,(r_{2n,0} - r_{2n-1,0}). \tag{9}$$

По значениям функций θ и v на главной характеристике (7) и с помощью соотношений на граничных прямых (4) $r = 1$ и $r = \frac{b}{a}$ можно последовательно вычислить θ и v во всех интересующих нас точках плоскости r, t.

Для приближенного решения этой задачи возьмем на главной характеристике последовательность близко друг к другу расположенных точек (0,0), (1,0), (2,0), . . . $(2n,0)$.

Через точку (1,0) проведем характеристику второго семейства до пересечения с прямой $r = 1$. Точку пересечения обозначим через (1,1). Очевидно, что

$$u_{1,1} = u_{0,0} + v_{0,0}\,\Delta t. \tag{10}$$

Из граничного условия

$$(\lambda + 2\mu)\,\theta_{1,1} - 2\mu\,\frac{u_{1,1}}{r_{1,1}} = -ap \tag{11}$$

найдем $\theta_{1,1}$.

Значение $v_{1,1}$ определим из соотношения (3), заменив в нем дифференциалы конечными разностями

$$v_{1,1} - v_{1,0} + \theta_{1,1} - \theta_{1,0} = -\frac{v_{1,0}}{r_{1,0}}\,(r_{1,1} - r_{1,0}); \tag{12}$$

здесь $v_{1,0}$, $\theta_{1,0}$, $\theta_{1,1}$ известны.

Зная $v_{1,1}$, $\theta_{1,1}$, $v_{2,0}$, $\theta_{2,0}$ и пользуясь соотношениями (2) и (3), можно получить величины $v_{2,1}$, $\theta_{2,1}$.

По значениям $v_{2,1}$, $\theta_{2,1}$ и $v_{3,0}$, $\theta_{3,0}$ определяются $v_{3,1}$, $\theta_{3,1}$ и т. д. до точки $(2n+1,1)$. Чтобы найти θ и v в точке $(2n+1,1)$, следует повторить вычисления, аналогичные (8) и (9), подставив в (8)

$$u_{2n+1} = u_{2n,0} + v_{2n,0}\,\Delta t.$$

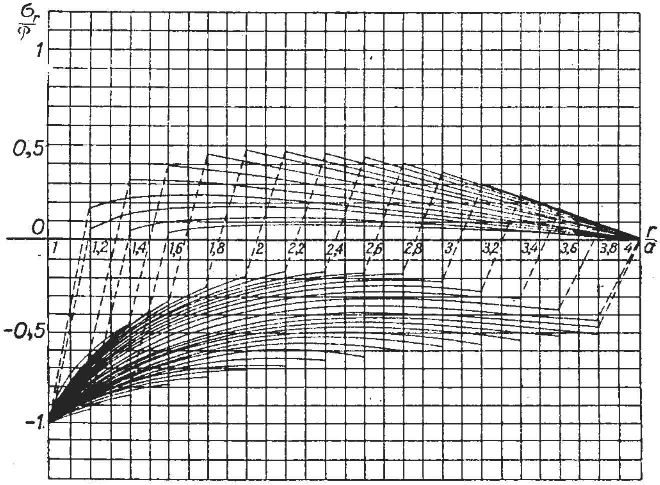

Рис. 2.

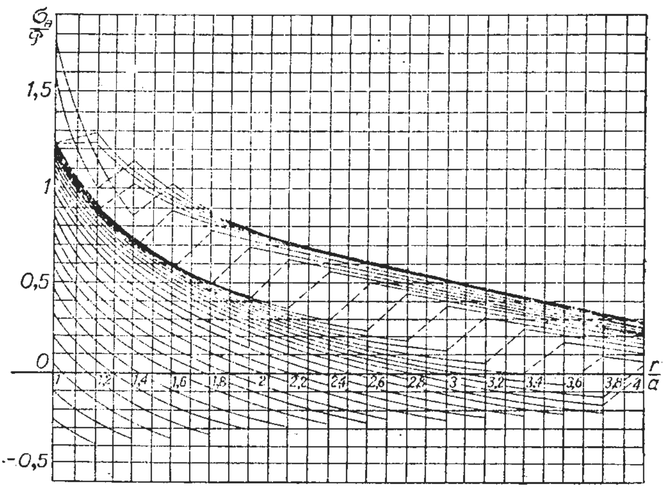

Рис. 3.

Затем, производя вычисления, аналогичные (10), (11) и (12), можно найти $v_{2,2}$, $\theta_{2,2}$, далее — $v_{3,2}$, $\theta_{3,2}$, $v_{4,2}$, $\theta_{4,2}$ и т. д.

Описанным методом был произведен численный расчет для случая $\frac{b}{a} = 4$ и $\nu = 0{,}3$. Учитывая линейность задачи, для простоты вычислений было положено $\theta_{0,0} = 1$.

На основании полученных числовых данных построены графики напряжений σ_r и σ_θ (рис. 2, 3) для различных и последовательно расположенных моментов времени.

Построенные графики дают картину прямого и обратного движения упругих волн, вызванных внезапным приложением постоянной нагрузки по внутренней границе цилиндра.

Каждый график показывает распределение напряжений в определенный момент времени. Пунктиром показаны скачки напряжений вдоль переднего фронта упругих волн и первой отраженной волны.

Получена 10 марта 1953 г.
Москва.