

Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации

Г. Н. Положий

Начало исследований решений краевых задач в зависимости от изменения области было положено в работах М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [1, 2, 3, 4]. М. А. Лаврентьевым при помощи выделения главных линейных частей относительно малого параметра функций, дающих отображение некоторых простейших областей на области, им близкие, были получены качественные выводы о поведении расхода жидкости, выходных скоростей и противодавлений при удлинении шпунтов в случае фильтрации под плоским флютбетом [5].

В настоящей работе при помощи теоремы о движении граничных точек, установленной нами ранее [6], исследуется вопрос об изменениях расхода жидкости, выходных скоростей и противодавлений, или, как мы будем говорить, интегральных характеристик, в зависимости от всевозможных изменений произвольной области фильтрации. На основе этого дается метод определения указанных интегральных характеристик фильтрационных потоков, основная идея которого заключается в оценке искомым величин, связанных с решением той или иной краевой задачи, сравнением с соответствующими величинами решений той же краевой задачи для таких областей, для которых эти решения известны или находятся просто. Предлагаемый метод применяется к рассмотрению ряда примеров и задач теории фильтрации.

§ 1. Вариационные теоремы теории фильтрации при отсутствии промежутка высачивания. Метод движения граничных точек

Пусть G — односвязная область в плоскости $z = x + iy$, ограниченная кусочно гладкой кривой L , причем замкнутая область $G + L$ может содержать и бесконечно удаленную точку. Пусть k ($k = \text{const}$) — коэффициент фильтрации, γ — удельный вес жидкости, p — давление, Q — расход жидкости, $w = u + iv$ ($u = -k \left(\frac{p}{\gamma} + y \right)$) — комплексный потенциал, T — годограф комплексного потенциала в плоскости w , $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ — вектор скорости фильтрации. При рассмотрении указанной области G в качестве области фильтрации, т. е. области, заполненной фильтрующейся жидкостью, представляют интерес несколько возможных случаев краевых условий.

1. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 1. Контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{AB} = -kh_1 = \text{const}, \quad u|_{CD} = -kh_2 = \text{const}, \\ v|_{BC} = \text{const}, \quad v|_{DA} = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где h_1 и h_2 — уровни жидкости в первом (правом) и соответственно во втором (левом) водоемах. Пусть в дальнейшем величины $H = h_1 - h_2$ ($H > 0$) и h_2 остаются неизменными. Тогда при изменении области фильтрации G за счет смещения какой-либо из точек A, B, C, D , т. е. при неизменной области G , но при переменных точках раздела граничных потенциальных линий и линий тока, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. При уменьшении потенциальной линии*: а) расход жидкости $Q = v|_{BC} - v|_{DA}$ уменьшается; б) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma u$ на неизменной и на увеличенной линиях тока уменьшается, если уменьшается линия AB , и увеличивается, если уменьшается линия CD ; в) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока увеличивается, а на неизменной потенциальной линии, вблизи ее конца на неизменной линии тока и на неизменной части увеличиваемой линии тока уменьшается.

В самом деле, пусть уменьшение потенциальной линии происходит за счет смещения точки C в положение точки C' (рис. 1), T_1 — голограф в плоскости измененного комплексного потенциала w_1 , a, b, c, d, c' — образы точек A, B, C, D, C' в плоскости w . Рассмотрим отображение T на прямоугольник T_1 , соответствующим образом расположенный в плоскости w_1 (за счет возможных преобразований переноса) при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка b , 3) неподвижная точка a отрезка $[ab]$, 4) неподвижная точка a отрезка $[dc']$, 5) неподвижная точка a отрезка $[bc]$.

В силу теоремы о движении граничных точек [6] при первой нормировке точка a будет притягивающей, точка d — отталкивающей, других неподвижных точек не будет. При второй нормировке точка b будет единственной неподвижной точкой и при том притягивающей, так как к ней должны приблизиться с различных сторон точки d и c . В силу этого при третьей нормировке точка a будет

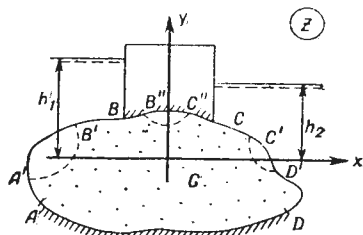


Рис. 1.

* Под уменьшением линии в дальнейшем понимается отбрасывание какой-либо линии, являющейся ее частью; под увеличением линии понимается образование из нее линии путем присоединения к ней какой-либо новой линии. Под уменьшением области G за счет вдавливания линии, входящей в состав ее границы, понимается отбрасывание какой-либо области, являющейся составной частью области G и имеющей в составе своей границы указанную линию.

единственной и притом притягивающей неподвижной точкой. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим вначале T на прямоугольник T_1^* , являющийся общей частью T и T_1 , при неподвижных точках a, d, a . При этом точки a и a будут отталкивающими. При отображении T_1^* на T_1 точка a тоже будет отталкивающей, так как от нее должны отодвинуться точка d и образ точки b . Следовательно, при четвертой нормировке точка a будет отталкивающей. Чтобы получить отображение при пятой нормировке, отобразим T на область T_1' , являющуюся пересечением T и T_1 , при неподвижных точках b и a так, чтобы точка d перешла в соответствующую вершину прямоугольника T_1 . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1' на T_1 при неподвижных точках d и a точка a будет притягивающей, так как к ней должна приблизиться точка b . Это значит, что при пятой нормировке точка a будет притягивающей. Таким образом, убеждаемся в справедливости утверждений теоремы при смещении точки C . Так же устанавливается справедливость этих утверждений при смещении точек D, A, B .

При уменьшении области фильтрации G за счет произвольных вдавливаний одной из потенциальных линий или линий тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C, D имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. При вдавливании потенциальной линии: а) расход жидкости $Q = v|_{BC} - v|_{DA}$ увеличивается; б) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линиях тока увеличивается, если вдавливается линия AB , и уменьшается, если вдавливается линия CD ; в) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока уменьшается, а на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока увеличивается.

Теорема 3. При вдавливании линии тока: а) расход жидкости $Q = v|_{BC} - v|_{DA}$ уменьшается; б) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной части вдавливаемой линии тока слева от вдавленного участка (со стороны напора жидкости) увеличивается, а справа — уменьшается; в) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях уменьшается. Расход жидкости на всякой связанной части потенциальной линии, имеющей своим концом один из концов вдавливаемой линии тока, уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — то же, что и в предыдущем случае, Ω — образ измененной области фильтрации в плоскости w . Справедливость утверждений теорем 2 и 3 о расходе жидкости Q непосредственно следует из теоремы о движении граничных точек. Пусть вдавливается потенциальная линия AB , причем части этой линии AA' и BB' остаются неизменными (рис. 1). Отобразим Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и c , 2) неподвижные точки a и d , 3) неподвижная точка a отрезка $[cd]$, 4) неподвижная точка a отрезка $[bb']$, 5) неподвижная точка a отрезка $[aa']$ (рис. 2, a', b' — образы точек A', B'). В силу теоремы о движении граничных точек при первой нормировке

точка b будет притягивающей, точка c — отталкивающей; других неподвижных точек не будет, так как $T_1 \supset T$. При второй нормировке точка d — отталкивающая, точка a — притягивающая; других неподвижных точек нет. В силу этого при третьей нормировке точка a будет единственной неподвижной точкой и притом отталкивающей. Это значит, что давление p на линиях тока увеличивается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на потен-

циальной линии CD увеличивается. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим вначале Ω на прямоугольник T_1' , являющийся наложением Ω и T_1 , при неподвижных точках a, b, c . При этом точки a и c будут притягивающими, так как $T_1' \supset \Omega$. При отображении T_1' на T_1 точка a будет притягивающей, так как к ней должны приближаться точка b и образ точки d . Следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на BB' уменьшается. При пятой нормировке, так же отображая Ω на T_1' при неподвижных точках a, a, d , убеждаемся, что вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на линии AA' уменьшается. Точно такие же рассуждения при вдавливании потенциальной линии CD приводят к справедливости утверждений теоремы 2. Пусть теперь вдавливается линия тока BC , причем части этой линии BB'' и CC'' (рис. 1) остаются неизменными. Пусть T_1'' — прямоугольник высотой Q , полученный из T_1 преобразованием подобия.

Рассмотрим отображение Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижная точка b , 2) неподвижная точка c , 3) неподвижная точка a отрезка $[cc'']$, 4) неподвижная точка a отрезка $[bb'']$ (рис. 2, b'', c'' — образы точек B'', C''). При отображении Ω на T_1'' при неподвижных точках b и a точка b — притягивающая, точка a — отталкивающая; других неподвижных точек нет, так как $T_1'' \supset \Omega$. Следовательно, при первой нормировке точка b будет притягивающей, все точки отрезков $[ab]$ и $[bb'']$ приблизятся к точке b . Точно так же, отображая Ω на T_1'' при неподвижных точках c и d , убеждаемся, что при второй нормировке точка c будет притягивающей, все точки отрезков $[cd]$ и $[cc'']$ приблизятся к точке c . Это значит, что давление p на линии BB'' увеличивается, на линии CC'' уменьшается. Вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ вблизи точек B и C и расход жид-

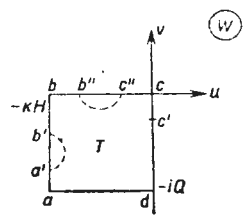


Рис. 2.

кости через связанные части потенциальных линий, имеющие своим концом точку B и C , уменьшаются. Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отобразим вначале Ω на прямоугольник T_1' , являющийся наложением Ω и T_1'' , при неподвижных точках a, c, d . При этом точки a и d будут притягивающими, так как $T_1' \supset \Omega$. При отображении T_1' на T_1'' при неподвижной точке a эта точка будет притягивающей, так как к ней должны приблизиться с различных сторон точка c и образ точки a . Следовательно, при третьей нормировке точка a будет притягивающей и вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на линии CC'' уменьшается. Чтобы получить

отображение при четвертой нормировке, отобразим Ω на T_1' при неподвижных точках a, b, a . Здесь точки a и a — притягивающие. При отображении T_1' на T_1'' точка a также будет притягивающей, так как к ней должны приблизиться точка b и образ точки d . Следовательно, при четвертой нормировке точка a будет притягивающей, и вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на линии BB'' уменьшается. Такие же рассуждения при вдавливании линии тока AD приводят к справедливости утверждений теоремы 3.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 по своей формулировке по сравнению с теоремой 2 отличается некоторой неполнотой, а именно: здесь ничего не говорится о поведении давления на неизменной линии тока и о поведении вектора скорости на потенциальных линиях, взятых в целом. Это объясняется тем, что знак вариации давления p на неизменной линии тока зависит от характера изменения вдавливаемой линии тока, знак вариации вектора скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на потенциальных линиях вблизи концов неизменной линии тока зависит от места вдавливания изменяемой линии тока.

2. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями и одной линией тока. Схема такой области G совпадает со схемой, изображенной на рис. 1, если считать, что точка D совпадает с точкой A , обычно лежащей на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$u|_{AB} = -kh_1 = \text{const}, \quad u|_{AC} = -kh_2 = \text{const}, \quad v|_{BC} = \text{const}, \quad (2)$$

где $h_1, h_2, H = h_1 - h_2$ ($H > 0$), $Q = \infty$ — то же самое, что и в 1. Годограф T комплексного потенциала $w = u + iv$ имеет вид полуполосы, указанной на рис. 3. Пусть в дальнейшем, как и в 1, величины $H = h_1 - h_2$ и h_2 остаются неизменными. Тогда при изменении области фильтрации G за счет смещения любой из точек A, B, C , т. е. при неизменной области G , но при переменных точках раздела граничных потенциальных линий и линии тока имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1'. При уменьшении потенциальной линии за счет увеличения линии тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на увеличенной линии тока уменьшается, если уменьшается потенциальная линия AB , и увеличивается, если уменьшается потенциальная линия AC ; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии увеличивается, а на неизменной потенциальной линии и на неизменной части линии тока уменьшается. При уменьшении потенциальной линии за счет смещения точки раздела потенциальных линий: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линии тока уменьшается, если уменьшается потенциальная линия AB , и увеличивается, если уменьшается потенциальная линия AC ; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока увеличивается, а на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф в плоскости измененного комплексного потенциала. При уменьшении потенциальной линии AB за счет смещения точки B в положение точки B' (рис. 1) рассмотрим отображение T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и c , 2) неподвижная точка a отрезка $[ac]$, 3) неподвижная точка a отрезка $[ab']$, 4) неподвижная точка a отрезка $[bc]$. При первой нормировке точка c будет притягивающей, точка a — отталкивающей. При второй нормировке точка a будет притягивающей, а при третьей нормировке — отталкивающей. Это значит, что давление p на линии тока

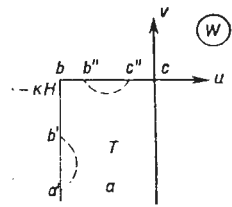


Рис. 3.

BC уменьшается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на AB' увеличивается, на AC' уменьшается. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим T на полуокружность T_1' , являющуюся наложением T и T_1 , при неподвижных точках a, c, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1' на T_1 точка a также будет притягивающей и, следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на BC уменьшается. Так же доказывается справедливость первой части теоремы 1' при уменьшении потенциальной линии за счет смещения точки C .

Пусть теперь уменьшение потенциальной линии происходит за счет смещения точки A в положение точки A' (рис. 1). Отобразим T на полуокружность T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и c , 2) неподвижная точка a отрезка $[ba']$, 3) неподвижная точка a отрезка $[ac]$. При первой нормировке точка c будет притягивающей, точка b — отталкивающей. При второй нормировке точка a будет отталкивающей, а при третьей нормировке — притягивающей. Это значит, что давление p на линии тока BC уменьшается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на $A'B$ увеличивается, а на AC уменьшается. Также убеждаемся в справедливости второй части теоремы 1' при смещении точки A в положение точки C' (рис. 1).

При уменьшении области фильтрации G за счет произвольных вдавливания потенциальных линий и линии тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C имеют место следующие теоремы.

Теорема 2'. При вдавливании потенциальной линии: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линии тока увеличивается, если вдавливается линия AB , и уменьшается, если вдавливается линия AC ; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока уменьшается, а на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока увеличивается.

Теорема 3'. При вдавливании линии тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной части линии тока слева от вдавленного участка (со стороны напора жидкости) увеличивается, а справа — уменьшается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части линии

тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях уменьшается. Расход жидкости на всякой связной части потенциальной линии, имеющей своим концом один из концов линии тока, уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф измененного комплексного потенциала, Ω — образ измененной области фильтрации в плоскости w . Пусть вдавливается потенциальная линия AB , причем части этой линии AA' и BB' остаются неизменными (рис. 1). Рассмотрим отображение Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и c , 2) неподвижная точка a отрезка $[ac]$, 3) неподвижная точка a отрезка $[bb']$, 4) неподвижная точка a отрезка $[aa']$. При первой нормировке точка c — отталкивающая, точка b — притягивающая. При второй нормировке точка a — отталкивающая, а при третьей и четвертой нормировках — притягивающая. Следовательно, давление p на линии тока BC увеличивается,

вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на BB' и AA' уменьшается, а на AC увеличивается. Те же рассуждения при вдавливании потенциальной линии AC приводят к справедливости теоремы 2'. Пусть теперь измененная область фильтрации получается вдавливанием линии тока BC , причем части этой линии BB'' и CC'' (рис. 1) остаются неизменными. Отобразим Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и c , 2) неподвижная точка a отрезка $[cc'']$, 3) неподвижная точка a отрезка $[bb'']$ (рис. 3, b'' , c'' — образы точек B'' , C'' в плоскости w). При первой нормировке точки b и c будут притягивающими. Чтобы получить отображение при второй нормировке, отображим Ω на полуполосу T_1' , являющуюся наложением Ω и T_1 , при неподвижных точках a , c , a'' , где a'' — любая точка интервала (ac) . Точки a и a'' при этом будут притягивающими. При отображении T_1' на T_1 точка a будет притягивающей, так как к ней должны приблизиться точка c и образ точки a . Точно так же убеждаемся, что при третьей нормировке точка a будет притягивающей. Отсюда следует справедливость утверждений теоремы 3'.

3. Область фильтрации, ограниченная двумя линиями тока и потенциальной линией. Схема такой области фильтрации G совпадает со схемой, изображенной на рис. 1, если считать, что точка B совпадает с точкой A , обычно лежащей на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$u|_{CD} = -kh_2 = \text{const}, \quad u|_A = -\infty, \quad v|_{AC} = \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \quad (3)$$

где h_2 — то же самое, что и в 1. Годограф T комплексного потенциала $w = u + iv$ имеет вид полуполосы, указанной на рис. 4.

Пусть в дальнейшем расход жидкости $Q = v|_{AC} - v|_{AD}$ и h_2 остаются неизменными. Тогда при изменении области фильтрации G за счет смещения любой из точек A , B , C , т. е. при неизменной области G , но при переменных точках раздела граничных линий тока и потенциальной линии, имеет место следующая теорема.

Теорема 1". При уменьшении потенциальной линии: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной и на увеличенной линиях тока увеличи-

вається; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части потенциальной линии и на неизменной линии тока увеличивается, а на неизменной части увеличенной линии тока уменьшается. При смещении точки раздела линий тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной части уменьшаемой линии тока увеличивается, а на неизменной части увеличиваемой линии тока уменьшается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части уменьшаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии увеличивается, а на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф измененного комплексного потенциала. При уменьшении потенциальной линии за счет смещения точки C в положение C' (рис. 1) отобразим T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка α отрезка $[ad]$, 3) неподвижная точка α отрезка $[ac]$, 4) неподвижная точка α отрезка $[dc']$. При первой нормировке точка d — отталкивающая, точка a — притягивающая. При второй нормировке точка α будет отталкивающей, при третьей нормировке — притягивающей. Следовательно, давление p на линиях тока AC и AD увеличивается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$

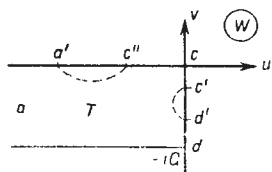


Рис. 4.

на AC уменьшается, на AD увеличивается. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим T на полуполосу T_1^* , являющуюся общей частью T и T_1 , при неподвижных точках a, d, a . При этом точки a и a будут отталкивающими. При отображении T_1^* на T_1 при неподвижных точках a и a точка α будет отталкивающей, так как от нее должна отодвинуться точка d . Следовательно, вектор скорости на DC' увеличивается. Также устанавливаются утверждения теоремы 1'' при уменьшении потенциальной линии за счет смещения точки D . Пусть теперь точка A смещена в положение A' (рис. 1). Отообразим T на годограф T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки c и d , 2) неподвижная точка α отрезка $[ad]$, 3) неподвижная точка α отрезка $[ca']$. При первой нормировке точка c — отталкивающая, точка d — притягивающая. При второй нормировке точка α — притягивающая, при третьей нормировке — отталкивающая. Это значит, что давление p на CA' увеличивается, на AD уменьшается, вектор скорости на CA' и вблизи точки C на потенциальной линии увеличивается, а на AD и вблизи точки D на потенциальной линии уменьшается. Этим теорема 1'' доказана.

При изменении области фильтрации G за счет произвольных вдавливающих линий тока и потенциальной линии, но при неизменных точках их раздела A, C, D имеют место следующие теоремы.

Теорема 2''. При вдавливании потенциальной линии: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линиях тока уменьшается; б) вектор скорости

$\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока уменьшается.

Теорема 3". При вдавливании линии тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной линии тока и на примыкающей к ней неизменной части вдавливаемой линии тока увеличивается, а на другой неизменной части вдавливаемой линии тока, примыкающей к потенциальной линии, уменьшается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии уменьшается, а на неизменной линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии увеличивается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф измененного комплексного потенциала, Ω — образ измененной области фильтрации в плоскости w . Пусть измененная область фильтрации получается вдавливанием потенциальной линии, причем части этой линии CC' и DD' остаются неизменными. Отобразим Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки c и d , 2) неподвижная точка a отрезка $[cc']$, 3) неподвижная точка a отрезка $[dd']$ (рис. 4). При первой нормировке точки c и d будут притягивающими. Чтобы получить отображение при второй нормировке, отобразим вначале Ω на полуполосу T_1' , являющуюся наложением Ω и T_1 , при неподвижных точках a, c, a . При этом точки a и a будут притягивающими. Отображая теперь T_1' на T_1 при неподвижной точке a , видим, что при второй нормировке точка a будет притягивающей. Также убеждаемся, что точка a будет притягивающей при третьей нормировке. Отсюда следует справедливость теоремы 2".

Пусть теперь вдавливается линия тока AC , причем части этой линии AA', CC' остаются неизменными. Отобразим Ω на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a, d, c , 2) неподвижная точка a отрезка $[ad]$, 3) неподвижная точка a отрезка $[aa']$, 4) неподвижная точка a отрезка $[cc']$. При первой нормировке точки a и c — притягивающие, точка d — отталкивающая. При второй нормировке точка a — отталкивающая, а при третьей нормировке — притягивающая. Следовательно, давление p на CC'' уменьшается, а на AD и AA' увеличивается, вектор скорости на AD увеличивается, а на AA' уменьшается. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим Ω на полуполосу T_1' , являющуюся наложением Ω и T_1 , при неподвижных точках a, c, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1' на T_1 точка a также будет притягивающей и, следовательно, вектор скорости на CC'' уменьшается. Такие же рассуждения при вдавливании линии тока AD приводят к справедливости теоремы 3".

З а м е ч а н и е. Если в контурных условиях (3) условие $u|_A = -\infty$ заменить другим условием $u|_A = +\infty$ (что имеет место в случае фильтрации из каналов), то теоремы 1", 2", 3" при этом остаются справедливыми при условии, если везде в этих теоремах знак вариации давления $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ считать противоположным.

§ 2. Некоторые вариационные теоремы теории фильтрации при наличии промежутка высачивания

Установим характер изменения основных интегральных характеристик теории фильтрации при замене области фильтрации, содержащей в составе своей границы промежутки высачивания, какой-либо из областей фильтрации, рассмотренных в § 1.

1. Область фильтрации, ограниченная двумя линиями тока, двумя потенциальными линиями и промежутком высачивания. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 5. Контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{AB} = -kh_1 = \text{const}, \quad u|_{DC'} = -kh_2 = \text{const}, \quad u|_{CC'} = -ky \geq -kh_1, \\ v|_{BC} = \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где h_1 и h_2 — уровни жидкости в первом и во втором водоемах, $H = h_1 - h_2$ ($H > 0$) — напор жидкости. Годограф T комплексного потенциала $w = u + iv$ имеет вид, указанный на рис. 6.

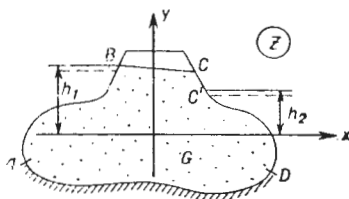


Рис. 5.

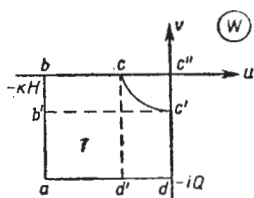


Рис. 6.

Пусть величины H и h_2 остаются неизменными, тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. При замене промежутка высачивания CC' потенциальной линией: а) расход жидкости Q увеличивается; б) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линиях тока уменьшается; в) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной потенциальной линии, вблизи ее концов и конца промежутка высачивания на линиях тока увеличивается, а на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф в плоскости измененного комплексного потенциала. Рассмотрим отображение T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка b , 3) неподвижная точка a отрезка $[ab]$, 4) неподвижная точка a отрезка $[dc']$, 5) неподвижная точка c . Отобразим T на прямоугольник $abc'd$ (рис. 6) при неподвижных точках b, a, d . При этом точка a будет отталкивающей, точки b и d будут притягивающими. Следовательно, при первой нормировке a — отталкивающая точка, d — притягивающая, и других неподвижных точек нет. Отобразим T на прямоугольник $abc'd$ при неподвижных точках a, b, c . При этом точка b будет отталкивающей. Следовательно, при второй нормировке точка b — отталкивающая и других неподвижных точек нет. Это значит, что расход жидкости Q увеличи-

вается, давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линиях тока уменьшается, вектор скорости вблизи концов A и B на линиях тока увеличивается. Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отобразим вначале T на прямоугольник $abc''d$ при неподвижных точках b, a, a . При этом точка a будет отталкивающей. При отображении прямоугольника $abc''d$ на T_1 , точка a также будет отталкивающей, так как от нее должны отодвинуться точки b и a . Следовательно, при третьей нормировке точка a будет отталкивающей и вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на потенциальной линии AB увеличивается. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим T на прямоугольник T_1' , являющийся наложением T и T_1 , при неподвижных точках a, d, a . При этом точки a и a будут притягивающими. При отображении T_1' на T_1 точка a будет притягивающей, так как к ней должны приблизиться с различных сторон точка d и образ точки b . Это значит, что вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на потенциальной линии DC' уменьшается. Отобразим T на прямоугольник $bcd'a$ (рис. 6) при неподвижных точках a, b, c . При этом точки a и c будут отталкивающими. При отображении последнего прямоугольника на T_1 точка c будет отталкивающей, так как от нее отодвинутся точка b и образ точки d . Это значит, что при пятой нормировке точка c — отталкивающая, а вектор скорости вблизи этой точки на линии тока увеличивается. Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 4, в частности, означает, что давление и расход жидкости ведут себя при замене промежутка высачивания потенциальной линией так же, как и при замене потенциальной линией линии тока.

Т е о р е м а 5. При замене промежутка высачивания CC' линией тока:

а) расход жидкости Q уменьшается; б) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной части увеличиваемой линии тока увеличивается, в) вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на неизменной части увеличиваемой линии тока, вблизи ее конца B на потенциальной линии уменьшается и вблизи точки C' на потенциальной линии увеличивается. Расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии уменьшается, если концом этой связной части является точка B , и увеличивается, если концом ее является точка C' .

В самом деле, пусть T_1 — годограф в плоскости измененного комплексного потенциала w_1 . Рассмотрим отображение T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка b , 3) неподвижная точка c' , 4) неподвижная точка a отрезка $[bc]$. Отобразим вначале T на прямоугольник $abc''d$ (рис. 6) при неподвижных точках b, a, d . При этом точка a будет отталкивающей, а точки b и d будут притягивающими. При отображении прямоугольника $abc''d$ на T_1 точка a будет притягивающей, а точка b — отталкивающей, т. е. расход жидкости Q уменьшается. При отображении прямоугольника $abc''d$ на T_1 при неподвижной точке b эта неподвижная точка b будет притягивающей и других неподвижных точек не будет, так как к точке b должны при-

близиться с различных сторон точки a и d . Это значит, что давление p на линии тока BC увеличивается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ вблизи точки B и расход жидкости через связную часть потенциальной линии, имеющей конец в точке B , уменьшаются. Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отобразим вначале T на прямоугольник $adc'b'$ (рис. 6) при неподвижных точках b', d, c' . При этом точка d будет притягивающей, а точки b', c' будут отталкивающими. При отображении указанного прямоугольника на T_1 точка c' будет отталкивающей, так как от нее должны отодвинуться с различных сторон точка d и образ точки b . Следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ вблизи точки C' и расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии, имеющую конец в точке C' , увеличиваются. Чтобы получить отображение при четвертой нормировке, отобразим T на область T_1' , являющуюся наложением T и T_1 при неподвижных точках d, b, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1' на T_1 точка a тоже будет притягивающей, так как к ней должны приблизиться с различных сторон точки b и d . Следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на линии тока BC уменьшается. Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждения теоремы 5, в частности, означают, что при замене промежутка высачивания линией тока расход жидкости Q ведет себя так же, как при замене потенциальной линии линией тока.

2. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями, линией тока и промежутком высачивания. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 5, если считать, что точка D совпадает с точкой A , обычно лежащей на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{AB} = -kh_1 = \text{const}, \quad u|_{AC} = -kh_2 = \text{const}, \\ u|_{CC'} = -ky \geq -kh_1, \quad v|_{BC} = \text{const}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $h_1, h_2, H = h_1 - h_2$ ($H > 0$) — то же самое, что и в случае 1. Годограф T комплексного потенциала $w = u + iv$ имеет вид полуполосы с выемкой, указанной на рис. 7; расход жидкости Q равен бесконечности.

Пусть величины $H = h_1 - h_2$ и h_2 остаются неизменными, тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 4'. При замене промежутка высачивания CC' потенциальной линией: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линии тока уменьшается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной потенциальной линии и на линии тока вблизи ее концов увеличивается, а на потенциальной линии AC' уменьшается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф в плоскости измененного комплексного потенциала w_1 . Отобразим T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и a , 2) неподвижная точка a отрезка $[ab]$, 3) не-

подвижная точка a отрезка $[ac']$, 4) неподвижная точка c . При первой нормировке точка b будет отталкивающей, точка c — притягивающей; других неподвижных точек не будет. Следовательно, давление p на линии

тока уменьшается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ вблизи точки B на линии тока увеличивается. Чтобы получить отображение при второй нормировке, отобразим T на полуполосу $abc''a$ (рис. 7) при неподвижных точках b, a, a . При этом точка a будет отталкивающей, точка b — притягивающей. При отображении указанной полуполосы на T_1 при неподвижных точках a и a первая из них будет отталкивающей, вторая — притягивающей, т. е. при второй нормировке точка a будет отталкивающей и вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на AB увеличивается.

Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отобразим T на полуполосу $abc''a$ при неподвижных точках b, a, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении указанной полуполосы на T_1 при неподвижных точках a и a точка a будет притягивающей, так как точка b должна удалиться от точки a . Это значит, что при третьей нормировке точка a будет притягивающей и, следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на потенциальной линии AC' убывает. При четвертой нормировке точка c будет отталкивающей и, следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на линии тока вблизи точки C увеличивается. Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждения теоремы 4' означают, что при замене промежутка высачивания потенциальной линией давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma u$ ведет себя точно так же, как и при замене линии тока потенциальной линией.

Т е о р е м а 5'. При замене промежутка высачивания CC' линией тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma u$ на линии тока увеличивается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной части линии тока и вблизи точки B на потенциальной линии уменьшается, вблизи точки C' на потенциальной линии увеличивается. Расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии уменьшается, если концом этой части является точка B , и увеличивается, если концом ее является точка C' .

В самом деле, рассмотрим отображение T на годограф измененного комплексного потенциала T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки b и a , 2) неподвижные точки c' и a , 3) неподвижная точка a отрезка $[bc]$. При первой нормировке точка b будет притягивающей, точка a — отталкивающей. При второй нормировке точка a будет притягивающей, точка c' — отталкивающей и других неподвижных точек не будет. Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отобразим T на полуполосу T_1' , являющуюся паложением T и T_1 при неподвижных точках a, b, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1'

Рис. 7.

392

на T_1 при неподвижных точках a и a точка a тоже будет притягивающей, так как к ней должна приблизиться точка b . Следовательно, при третьей нормировке точка a — притягивающая. Отсюда следуют все утверждения теоремы 5'.

З а м е ч а н и е. Утверждения теоремы 5', в частности, означают, что при замене промежутка высачивания линией тока давление ведет себя так же, как и при замене потенциальной линии линией тока.

3. Область фильтрации, ограниченная двумя линиями тока, потенциальной линией и промежутком высачивания. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 5, если считать, что точка B совпадает с точкой A , обычно лежащей на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{DC'} = -kh_2 = \text{const}, \quad u|_{CC'} = -ky, \quad u|_A = -\infty, \\ v|_{AC} = \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \quad (6)$$

где h_2 — уровень жидкости в водоеме. Годограф T комплексного потенциала $w = u + iv$ представлен на рис. 8.

Пусть в дальнейшем расход жидкости Q и h_2 остаются неизменными, тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 4". При замене промежутка высачивания CC' потенциальной линией:

- а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на линиях тока уменьшается;
- б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на неизменной части потенциальной линии уменьшается и на линиях тока вблизи точки D уменьшается, а вблизи точки C увеличивается.

В самом деле, пусть T_1 — годограф измененного комплексного потенциала. Отобразим T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка c , 3) неподвижная точка a отрезка $[dc']$. При первой нормировке точка d будет притягивающей, точка a — отталкивающей, других неподвижных точек не будет. При второй нормировке точка c будет отталкивающей. Это значит, что давление p на линиях тока уменьшается, вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на линиях тока вблизи точки d уменьшается, вблизи точки c увеличивается.

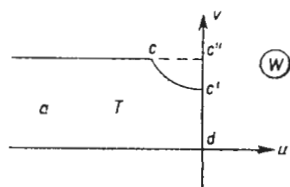


Рис. 8.

Чтобы получить отображение при третьей нормировке, отображим T на полуполосу T_1' , являющуюся наложением T и T_1 при неподвижных точках a, d, a . При этом точка a будет притягивающей. При отображении T_1' на T_1 точка a будет также притягивающей, так как к ней должны приблизиться с различных сторон точка d и образ точки c . Следовательно, вектор скорости $\vec{v} = \frac{\overline{dw}}{dz}$ на потенциальной линии DC' уменьшается. Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждения теоремы 4", в частности, означают, что при замене промежутка высачивания CC' потенциальной линией давле-

ние $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ ведет себя также, как и при замене линии тока потенциальной линией.

Теорема 5". При замене промежутка высачивания CC' линией тока: а) давление $p = -\frac{\gamma}{k}u - \gamma y$ на неизменной части увеличиваемой линии тока и на неизменной линии тока увеличивается; б) вектор скорости $\vec{v} = \frac{dw}{dz}$ на неизменной линии тока, вблизи точки D и на потенциальной линии вблизи точки C' увеличивается, а на неизменной части увеличиваемой линии тока уменьшается. Расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии, имеющую в качестве конца точку D или точку C' , увеличивается.

В самом деле, пусть T_1 — голограф измененного комплексного потенциала. Отообразим T на T_1 при следующих нормировках: 1) неподвижные точки a и d , 2) неподвижная точка a отрезка $[ad]$, 3) неподвижная точка a отрезка $[ac]$, 4) неподвижная точка c' . При первой нормировке точка d будет отталкивающей, точка c' — притягивающей; других неподвижных точек не будет. При второй нормировке точка a — отталкивающая, при третьей нормировке — притягивающая. При четвертой нормировке точка c' будет отталкивающей. Отсюда следует справедливость утверждений теоремы.

§ 3. Метод мажорантных областей

Установленные выше общие вариационные теоремы теории фильтрации в сочетании с непосредственным использованием теоремы о движении граничных точек позволяют установить довольно общий метод определения интегральных характеристик фильтрационных потоков. Сущность этого метода, называемого нами методом мажорантных областей, состоит в следующем. Для того, чтобы определить ту или иную интегральную характеристику фильтрационного потока при заданной области фильтрации G , необходимо построить фильтрационные потоки во вспомогательных областях фильтрации \bar{G} и \underline{G} так, чтобы, с одной стороны, соответствующая интегральная характеристика для областей \bar{G} и \underline{G} была известна, с другой стороны — численное значение этой характеристики для области G должно быть больше искомой величины, а для области \underline{G} — меньше искомой величины. Другими словами, в каждой конкретной задаче теории фильтрации, точное решение которой неизвестно, предлагается заменять решение данной задачи решением двух других задач, для которых эти решения находятся просто и дают возможность оценить искомое значение какой-либо интегральной характеристики сверху и снизу*.

* В связи с этим отметим, что замена решения одних фильтрационных задач решением других, более простых задач и, в частности, таких, для которых отображающая функция получается как главная линейная часть относительно малого параметра, встречается в теории фильтрации довольно часто [7, 8, 9]. Однако при этом, в отличие от предлагаемого метода, не устанавливалось, в каком отношении находятся те или иные величины, соответствующие истинному потоку, с соответствующими величинами

Во многих задачах теории фильтрации построение даже самых простейших мажорантных областей \tilde{G} и \underline{G} при довольно широком произволе в их выборе приводит к определению неизвестных интегральных характеристик с достаточной степенью точности. Рассмотрим несколько примеров и задач теории фильтрации на применение предлагаемого метода.

1. Определение расхода жидкости под плоским флютбетом при произвольном количестве шпунтов. Пусть требуется определить расход жидкости Q под плоским флютбетом с основанием $[-r, r]$ с любым количеством шпунтов при глубине залегания подземного водоупора, равной R ($R > r$), при условии, что границы водоёмов совпадают с отрезками вещественной оси (рис. 9).

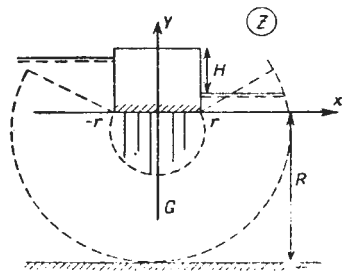


Рис. 9.

Чтобы построить для этого случая область \underline{G} , оценивающую расход снизу, проведем через точки $(-r, 0)$, $(r, 0)$ окружность, охватывающую все шпунты. Пусть R_0 — радиус этой окружности, $(0, -b)$ — ее центр. Тогда в соответствии с доказанными выше вариационными теоремами в качестве области \underline{G} можем взять область, ограниченную дугой этой окружности, прямыми линиями, выходящими из точки $(0, -b)$, и дугой окружности с центром в этой точке радиуса $R_1 = R - b$. При этом дуги окружностей должны быть линиями тока, а прямые линии — потенциальными линиями (рис. 9, пунктирные линии). В качестве области \tilde{G} , оценивающей расход сверху, для простоты можем взять область, получающуюся из заданной области фильтрации, путем удаления шпунтов. Для расхода жидкости \tilde{Q} , соответствующего области \tilde{G} , как известно, можем написать

$$\tilde{Q} = kH \frac{K'}{2K},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $\kappa = \text{th} \frac{\pi r}{2R}$, K' — полный эллиптический интеграл первого рода с дополнительным модулем $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$. Далее для области \underline{G} комплексный потенциал, очевидно, будет

$$w = -i \frac{kH}{\alpha\pi} \left(\ln \frac{z}{R_0} + i \frac{\alpha\pi}{2} \right),$$

где $\alpha\pi$ ($\alpha \geq 1$) — угол между прямолинейными участками границы области \underline{G} . Следовательно, для расхода жидкости \underline{Q} , соответствующего области \underline{G} , имеем

$$\underline{Q} = \frac{kH}{\alpha\pi} \ln \frac{R - b}{R_0}$$

потока, решение для которого находится. Пригодность полученного таким образом приближенного решения часто подтверждалась результатами экспериментов и наблюдений [9]. Однако, несмотря на это, указанный вопрос, как следует сделать вывод из результатов исследований М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева по устойчивости решения задачи Дирихле, является весьма существенным [1], поскольку устойчивость решения не всегда имеет место.

и для искомого расхода Q имеем оценки

$$\frac{kH}{\alpha\pi} \ln \frac{R-b}{R_0} \leq Q \leq \frac{kH K'}{2 K}$$

Например, при $a=1$ (т. е. когда все шпунты уменьшаются в полуокружности) при $\frac{R}{r} = 5\pi \approx 15,7$ имеем $x = \text{th } 0,1 \approx 0,1$ $\frac{K'}{K} = 2,34$,

$\ln 5\pi \approx 2,74$ и установленные неравенства дают

$$0,84 kH \leq Q \leq 1,17 kH;$$

если среднее арифметическое верхней и нижней оценок $Q^* = 1,005 kH$ принять за приближенное значение искомого расхода, то погрешность не будет превосходить 16,4%.

2. Определение выходных скоростей при фильтрации под плоским флютбетом с тремя симметрично расположенными шпунтами в грунте бесконечной глубины.

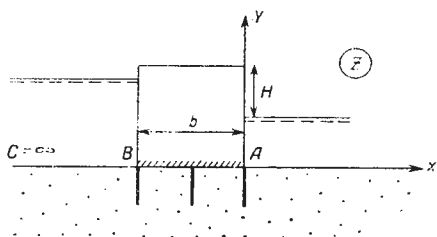


Рис. 10.

Рассматриваемая схема фильтрационного потока представлена на рис. 10. Длины всех шпунтов считаются равными единице. Требуется определить величину вектора скорости фильтрации в точке А. В соответствии с доказанными выше теоремами для оценки ин-

тересующей нас величины снизу достаточно подсчитать величину вектора скорости v при условии, что два левых шпунта охватываются какой-либо линией тока; для оценки сверху достаточно подсчитать величину вектора скорости \tilde{v} при отсутствии двух левых шпунтов.

Чтобы найти комплексные потенциалы w и \tilde{w} , соответствующие v и \tilde{v} , введем переменную $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = \sqrt{1+z^2}$. Образы двух левых шпунтов в плоскости ζ_1 будут лежать внутри прямоугольника, ограниченного

прямыми $\xi_1 = \frac{b}{2}$, $\xi_1 = \sqrt{1+b^2}$, $\eta_1 = 0$, $\eta_1 = 1$ (рис. 11). Для комплексного потенциала w , вводя постоянные $\beta = \frac{2\sqrt{1+b^2}+b}{4}$, $\gamma = \frac{2\sqrt{1+b^2}-b}{4}$,

$r = \sqrt{1+\gamma^2}$ и промежуточные переменные $\zeta_2 = \zeta_1 - \beta$, $\zeta_3 = \frac{\zeta_2+r}{\zeta_2-r}$, $\zeta_4 = \zeta_3^2$,

$\zeta = \frac{\zeta_4 + 1 - 2\frac{1+\beta-r}{1+\beta+r}}{1-\zeta_4}$ (рис. 12), получаем

$$w = \frac{kH}{\pi} \text{arc sin } \zeta.$$

Имеем

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_A = - \frac{kH}{\pi} \frac{\sqrt{2}(1+\beta-r)}{(1+\beta)(1+\beta+r)} \frac{z}{\sqrt{1-\zeta}} \Big|_{z=0}$$

Выражая z и ζ через ζ_1 , имеем

$$\left. \frac{z}{\sqrt{1-\zeta}} \right|_{z=0} = \left. \frac{\sqrt{\zeta_1^2-1}}{\sqrt{1-\zeta}} \right|_{\zeta_1=-1} = -i \sqrt{\frac{(1+\beta)(1+\beta+r)}{1+\beta-r}},$$

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = i \frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2(1+\beta-r)}{(1+\beta)(1+\beta+r)}}$$

и, следовательно,

$$v = \frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2(1+\beta-r)}{(1+\beta)(1+\beta+r)}}$$

Для комплексного потенциала \tilde{w} , очевидно, будем иметь

$$\tilde{w} = \frac{kH}{\pi} \operatorname{arcsin} \zeta, \quad \zeta = \frac{1}{1 + \sqrt{1+b^2}} (\sqrt{1+b^2} - 1 - 2\zeta_1).$$

Имеем

$$\frac{d\tilde{w}}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{kH}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{1+b^2}} \frac{z}{\sqrt{1-\zeta}} \Big|_{z=0},$$

$$\frac{z}{\sqrt{1-\zeta}} \Big|_{z=0} = -i \sqrt{1 + \sqrt{1+b^2}}, \quad \frac{d\tilde{w}}{dz} \Big|_{z=0} = i \frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1+b^2}}}$$

и, следовательно,

$$\tilde{v} = \frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1+b^2}}}$$

и для искомой выходной скорости $v|_A$ имеем оценки

$$\frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2(1+\beta-r)}{(1+\beta)(1+\beta+r)}} \leq v|_A \leq \frac{kH}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1+b^2}}}$$

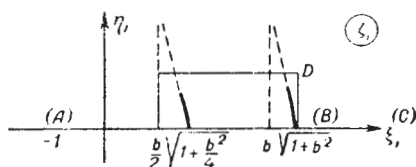


Рис. 11.

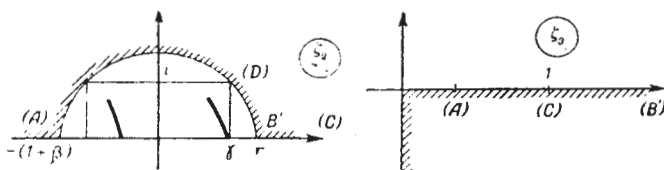


Рис. 12

Например, при ширине флютбета $b = 4$ имеем

$$\sqrt{1+b^2} = 4,1231, \quad \beta = 3,06155, \quad r = 1,4584,$$

$$\tilde{v} = \frac{kH}{\pi} 0,6248, \quad v = \frac{kH}{\pi} 0,4818$$

и, приняв за приближенное значение выходной скорости $v|_A$ среднее арифметическое $v^* = \frac{kH}{\pi} 0,5533$, будем иметь погрешность, не превосходящую 12,92%.

3. Определение расхода жидкости при фильтрации без подпора из некольматированного канала

произвольного сечения, подстилаемого высокопроницаемым горизонтальным ложем. Соответствующая схема области фильтрации представлена на рис. 13. Контурные условия для определения комплексного потенциала $w = u + iv$ ($u = -k \left(\frac{P}{\gamma} + y \right)$) имеют вид

$$u|_{ABC} = 0, \quad u|_{DE} = kT, \quad v|_{CD} = \text{const}, \quad v|_{AE} = \text{const}, \\ p|_{CD} = 0, \quad p|_{AE} = 0,$$

при этом сечение канала ABC и глубина T задаются, а вид депрессионных кривых CD и AE заранее не задается. Требуется определить расход жидкости из канала Q^* .

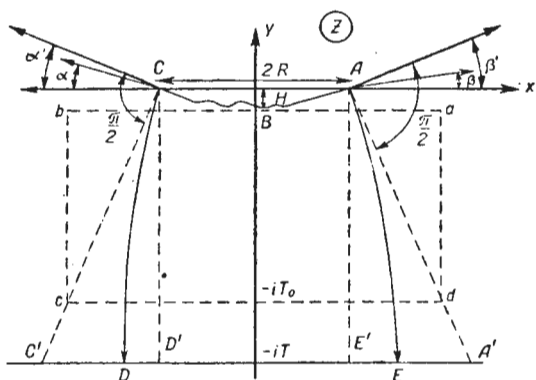


Рис. 13.

Пусть H — глубина канала, $2R$ — его ширина, β и α — правый и, соответственно, левый углы заложения (рис. 13). Введем еще важное для дальнейшего понятие параметра канала

$$\delta = \sqrt{\frac{H \operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \beta'}{R} \frac{1}{2}},$$

где

$$\operatorname{tg} \beta' = \max_{-R < x < R} \frac{dF(x)}{dx}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = - \min_{-R < x < R} \frac{dF(x)}{dx},$$

$y = F(x)$ — уравнение сечения канала ABC , $F(x)$ — любая кусочно дифференцируемая функция. Чтобы применить к поставленной задаче метод мажорантных областей, достаточно построить комплексные потенциалы \tilde{w} и \underline{w} , соответствующие которым расходы жидкости \tilde{Q} и \underline{Q} были бы такими, что $\underline{Q} \leq Q \leq \tilde{Q}$.

Для построения комплексного потенциала \tilde{w} прежде всего из рассмотрения годографа вектора скорости замечаем, что независимо от вида сечения канала ABC депрессионные кривые CD и AE представляют собой кривые, удаляющиеся от оси y с убыванием y , но гораздо медленнее,

* Для некоторых сечений каналов, для трапециoidalного, треугольного и некоторых других частных случаев известно точное решение этой задачи [7, 10, 11]. Для произвольно заданного сечения канала точное решение этой задачи представляет принципиальные трудности, поскольку метод Н. Е. Жуковского здесь оказывается неприменимым.

чем прямые AA' и CC' , составляющие с осью x соответственно углы $\beta' - \frac{\pi}{2}$ и $-\alpha' - \frac{\pi}{2}$ и проходящие соответственно через точки A и C (рис. 13). Отсюда в силу теорем § 1 в качестве нижней оценки для Q можем взять расход жидкости \bar{Q} при фильтрации в прямоугольнике $ACD'E'$ (рис. 13) при следующих контурных условиях

$$u|_{AC} = 0, \quad u|_{D'E'} = kT, \quad v|_{CD} = \text{const}, \quad v|_{AE'} = \text{const}.$$

Следовательно, имеем

$$Q \geq \bar{Q} = 2kR.$$

Пусть G и $w = u + iv$ обозначают то же самое, что и в § 1, причем

$$u|_{AB} = 0, \quad v|_{BC} = \text{const}, \quad u|_{CD} = f(z) \geq 0, \quad v|_{DA} = \text{const},$$

где $f(z)$ — заданная функция точки дуги CD . Тогда точно так же, как и в § 1, из теоремы о движении граничных точек [6] вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. При неизменной области фильтрации G и неизменных граничной потенциальной линии AB и граничных линиях тока BC и DA расход жидкости уменьшается, если положить

$$u|_{CD} = f_1(z) \leq \min_{z \in CD} f(z),$$

где $f_1(z)$ — функция точки z дуги CD .

В силу этой теоремы и теорем § 1 в качестве верхней оценки для Q можем взять расход жидкости \bar{Q} при фильтрации в прямоугольнике $abcd$ (рис. 13) при следующих контурных условиях

$$u|_{ab} = 0, \quad u|_{cd} = kT_0, \quad v|_{bc} = \text{const}, \quad v|_{da} = \text{const} \quad (T_0 \leq T).$$

Легко получаем

$$\bar{Q} = \frac{kT_0}{T_0 - H} (2R + T_0 \operatorname{tg} \alpha' + T_0 \operatorname{tg} \beta').$$

Обозначая теперь через \bar{Q}_0 минимальное значение \bar{Q} при $T_0 \leq T$, имеем

$$\bar{Q}_0 = \bar{Q}|_{T_0=H(1+\sqrt{1+\delta^2})} = 2kR \frac{1+\sqrt{1+\delta^2}}{1+\delta^2} [1+\delta^2(1+\sqrt{1+\delta^2})]$$

и, следовательно, при T , удовлетворяющем условию

$$T \geq T^* = H(1+\sqrt{1+\delta^2}),$$

будем иметь

$$2kR \leq Q \leq 2kR(1+2\delta\sqrt{1+\delta^2}+2\delta^2)$$

и при приближенном значении Q , равном среднему арифметическому

$$Q^* = 2kR(1+\delta\sqrt{1+\delta^2}+\delta),$$

погрешность в процентах определяется величиной $\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} 100$. При тех же условиях, взяв за длину промежутка высачивания величину

$$2L^* = R(1+\delta\sqrt{1+\delta^2}+\delta^2),$$

для погрешности в процентах будем иметь величину $\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} 100$.

Ясно, что для довольно широкого класса каналов произвольных сечений параметр канала δ будет достаточно малой величиной. Это, например, будет при малых углах α' и β' или при малой величине $\frac{H}{L}$. Для этого класса каналов очевидно, что полученные оценки для расхода жидкости и длины промежутка высачивания определяют их с достаточно высокой степенью точности. Так, например, для треугольного сечения канала, симметричного относительно оси y , имеем

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha, \quad |Q - Q^*| \frac{1}{Q^*} \leq \sin \alpha$$

и, следовательно, при $T > H + \frac{H}{\sin \alpha}$ среднее арифметическое величин Q и Q^* дает значение расхода с погрешностью, не превышающей 5,3%, при $\alpha \leq 3^\circ$ и не превышающей 10,5% — при $\alpha \leq 6^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, Об устойчивости решения задачи Дирихле, ИАН, серия мат. (1937), 551—596.
2. М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, ДАН СССР, 18 (1938), 315—318.
3. М. В. Келдыш, О задаче Дирихле, ДАН СССР (1941), 308—309.
4. М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук, 8 (1941), 171—231.
5. М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, Гостехиздат, Москва (1946).
6. Г. Н. Положий, О движении граничных точек отображаемых областей, Успехи матем. наук, т. 7, в. 6 (52), (1952).
7. П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, Москва (1952).
8. А. М. Сенков, П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы расчета стационарного движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, Изд-во АН УССР, Киев (1952).
9. Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Фильтрация в однородной среде, Москва (1949).
10. В. В. Ведерников, Фильтрация из каналов, Госстройиздат, Москва (1934).
11. Ю. Д. Соколов, О расчете фильтрации из канала трапециoidalного сечения, ДАН СССР, т. 79 (1951), 759—762.

Получена 3 июня 1953 г.

Киев.