

Некоторые приложения конформных отображений близких областей с неподвижными точками на границе в теории фильтрации

В. Е. Шаманский

В настоящей статье приводятся выражения для главных частей функций, отображающих заданную область на области, близкие к ней, при условии, что три точки на границе остаются неподвижными; затем даются некоторые приложения полученных формул к задачам теории фильтрации.

Вопрос об отображениях близких областей с одной и двумя неподвижными точками на границе и их приложениях к теории струйного течения жидкости рассматривался акад. М. А. Лаврентьевым [1, 2]. Свойства неподвижных точек в случае двух и трех неподвижных точек были рассмотрены Г. Н. Положим [3].

Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться основными обозначениями и терминами монографии акад. М. А. Лаврентьева [2].

Для вывода основных формул ограничимся рассмотрением класса односвязных областей $D(\Gamma)$ с правильными границами Γ . Под правильной кривой будем понимать кривую, обладающую непрерывной кривизной. При этих условиях, как известно, модуль производной функции, осуществляющей однолистное конформное отображение области $D(\Gamma)$ на область $D(\tilde{\Gamma})$, непрерывен и отличен от нуля в замкнутой области $\overline{D(\Gamma)}$.

С целью упрощения выкладок рассмотрим области, близкие к кругу $|z| < 1$. Установим сначала оценку для граничной производной, отображающей функции и вариации ее аргумента. Через $\alpha(\varphi)$ обозначим угол между касательной к границе Γ и касательной к окружности $|z| = 1$ в точках с аргументом φ . Тогда имеет место следующее вспомогательное предложение.

Л е м м а. Если область $D(\Gamma)$ ограничена правильным контуром Γ и

$$1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon \quad \text{при } z \in \Gamma; \quad |\alpha(\varphi)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{d\alpha}{d\varphi} \right| < \varepsilon,$$

то граничная производная функции

$$w = f(z, \Gamma), \quad f(e^{i\varphi_k}, \Gamma) = e^{i\varphi_k} \quad (k=1, 2, 3), \quad (\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3),$$

осуществляющей конформное отображение области $D(\Gamma)$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяет неравенству

$$1 - M\varepsilon - O(\varepsilon^2) < |f'(z, \Gamma)| < 1 + M\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где

$$M = M(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{9\pi}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}},$$

а $O(\varepsilon^2)$ — величины второго порядка малости относительно ε .

Доказательство. Пусть функция $\zeta = F(z, \Gamma)$, $F(0, \Gamma) = 0$, $F'(0, \Gamma) > 0$ отображает конформно область $D(\Gamma)$ на круг $|\zeta| < 1$. Пусть при этом отображении точки $z_k = e^{i\varphi_k}$ ($k=1, 2, 3$) переходят соответственно в точки $\zeta_k = e^{i\psi_k}$ ($k=1, 2, 3$). Дополнительным отображением

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} \cdot \frac{\zeta_2 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_1} \quad (1)$$

переведем точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ в z_1, z_2, z_3 . Тогда

$$f'(z, \Gamma) = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} \quad (2)$$

Но по теореме М. А. Лаврентьева ([2], § 48, гл. V)

$$1 - 3\varepsilon - O(\varepsilon^2) < \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| < 1 + 3\varepsilon + O(\varepsilon^2);$$

следовательно, остается оценить $\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|$ на окружности $|\zeta| = 1$. Замечая,

что при малом ε $\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{|\zeta|=1} = \frac{d\theta}{d\psi}$, где θ, ψ — аргументы точек окружностей $|w| = 1$, $|\zeta| = 1$ и $|\psi_i - \varphi_i| = |\eta_i| < 4\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ($i=1, 2, 3$) [2], получим, полагая в (1) $\zeta = e^{i\psi}$, $w = e^{i\theta}$ и дифференцируя:

$$\frac{d\theta}{d\psi} = 1 + \frac{\eta_3 - \eta_1}{2} \cdot \frac{\cos\left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}} + N \cdot \frac{\sin\left(\psi - \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}} + O(\varepsilon^2),$$

где

$$N = \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Оценивая сверху, приходим к неравенству

$$\frac{d\theta}{d\psi} < 1 + \frac{8\pi\varepsilon}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2}} + O(\varepsilon^2).$$

Аналогично оценивая снизу и учитывая (2), мы и получим утверждение леммы.

Из приведенной леммы легко получаются следующие заключения

1. Если $z = g(w)$, $g(e^{if^k}) = e^{if^k}$ ($k=1, 2, 3$) — функция, обратная функции $w = f(z, \Gamma)$, то всюду на окружности $|w| = 1$ имеет место неравенство

$$1 - M\varepsilon - O(\varepsilon^2) < |g'(w)| < 1 + M\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где M имеет указанное выше значение.

2. При условиях леммы в любой точке $z = re^{i\varphi}$ контура Γ имеет место следующая оценка:

$$|\arg f(z) - \varphi| < (M+1)\varepsilon \cdot \max \left\{ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}; \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}; \pi - \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2} \right\} + O(\varepsilon^2) < (M+1)\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Для частного случая $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ последнее неравенство принимает вид

$$|\arg f(z) - \varphi| < \frac{5\pi+1}{4}\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

3. Пусть $w = \rho e^{i\theta}$. Если ε достаточно мало, то контур Γ можно представить уравнением

$$r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi),$$

где $\delta(\varphi)$ — однозначная функция и $\delta(\varphi) = \delta(\varphi + 2\pi)$,

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon, \quad \delta(\varphi_1) = \delta(\varphi_2) = \delta(\varphi_3) = 0.$$

Тогда на контуре Γ

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |f'(z, \Gamma)| = [1 + \delta(\varphi)] \frac{d\theta}{d\varphi} + O(\varepsilon^2),$$

а следовательно, имеют место оценки

$$\left| \frac{d\theta}{d\varphi} - 1 \right| < (M+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$\left| \frac{d\varphi}{d\theta} - 1 \right| < (M+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Теорема 1. Если область $D(\Gamma)$ ограничена правильной кривой Γ , заданной уравнением

$$r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi),$$

удовлетворяющим условиям:

$$\delta(\varphi) = \delta(\varphi + 2\pi), \quad |\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon,$$

$$\delta(m) = \delta(-m) = \delta(\alpha) = 0,$$

то функция $z = g(w)$, $g(e^{\pm im}) = e^{\pm im}$, $g(e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}$, конформно отображающая круг $|w| < 1$ на область $D(\Gamma)$, имеет вид

$$g(w) = w - \frac{1}{8\pi i} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t-\alpha}{2}} \times \\ \times \frac{we^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{we^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} dt + O(\varepsilon^2),$$

где $O(\varepsilon^2)$ — малые второго порядка относительно ε .

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(w) = \frac{g(w) - w}{(w - e^{im})(w - e^{-im})}.$$

Эта функция непрерывна в замкнутом круге $|w| \leq 1$, так как

$$\lim_{w \rightarrow w_1} G(w) = \frac{g'(e^{im}) - 1}{2i \cdot \sin m},$$

$$\lim_{w \rightarrow w_2} G(w) = \frac{1 - g'(e^{-im})}{2i \cdot \sin m},$$

а производная $g'(w)$ в точках $e^{\pm im}$ существует. Поэтому функцию $G(w)$ можно представить в круге $|w| < 1$ интегралом Шварца

$$\operatorname{Re} G(e^{i\theta}) = \frac{\delta(\theta) + \eta(\theta)}{4 \sin \frac{\theta - m}{2} \cdot \sin \frac{\theta + m}{2}} = \frac{\chi(\theta)}{4 \sin \frac{\theta - m}{2} \cdot \sin \frac{\theta + m}{2}},$$

где $\eta(\theta) = 1 - \delta(\theta) - [1 - \delta(\varphi)] \cos(\varphi - \theta)$, $\chi(\theta) = \delta(\theta) + \eta(\theta)$, причем $\eta(\theta)$, $\eta'(\theta)$, $\chi(\theta)$, $\chi'(\theta)$ допускают оценки:

$$|\eta(\theta)| < \left[1 + \frac{\pi(M+1)}{2} \right] \pi(M+1) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = k_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$|\eta'(\theta)| < [1 + (M+2)\pi] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) < k_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3)$$

$$|\chi(\theta)| < \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$|\chi'(\theta)| < \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{и} \quad \chi(\pm m) = 0.$$

Записывая интеграл Шварца для функции $G(w)$, найдем отсюда выражение для $g(w)$:

$$g(w) = w + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \chi(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t+m}{2}} \cdot \frac{1 + we^{-it}}{1 - we^{-it}} dt + \\ + iC(w^2 - 2w \cos m + 1). \quad (4)$$

Обозначим интеграл через $\Phi(w)$ и займемся его оценкой. Функция $\Phi(w)$ — аналитическая в круге $|w| < 1$, поэтому по принципу максимума имеем неравенство

$$|\Phi(w)| \leq \left| \chi(\theta) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \chi(t) \frac{\sin \frac{\theta-m}{2} \sin \frac{\theta+m}{2} - \chi(\theta) \sin \frac{t-m}{2} \sin \frac{t+m}{2}}{\sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t+m}{2}} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt \right|.$$

Мы приняли во внимание, что главное значение интеграла $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} dt$ равно нулю.

Далее имеем:

$$|\Phi(w)| < \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|\chi(t)|}{|\cos m - \cos t|} + \max |\chi'(t)| \right) \times \\ \times \left| (t-\theta) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \right| dt + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

Оценим теперь функцию $\mu(t) = \frac{\chi(t)}{\cos m - \cos t}$.

Замечая, что оценку достаточно получить на промежутке $[0, \pi]$, найдем ее, например, следующим образом. Разобьем промежуток $0, \pi$ на три части: $\left[0, \frac{m}{k}\right]$, $\left[\frac{m}{k}, \pi - \frac{m}{k}\right]$, $\left[\pi - \frac{m}{k}, \pi\right]$, где k — целое и $k > 1$, $k > \frac{m}{\pi - m}$. В промежутках $\left[0, \frac{m}{k}\right]$, $\left[\pi - \frac{m}{k}, \pi\right]$ функция $\frac{1}{|\cos m - \cos t|}$ монотонна, поэтому соответственно

$$|\mu(t)| < \frac{\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\sin \frac{m(k+1)}{2k} \cdot \sin \frac{m(k-1)}{2k}}; \quad |\mu(t)| < \frac{\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\cos \frac{m(k+1)}{2k} \cdot \cos \frac{m(k-1)}{2k}}.$$

В промежутке $\left[\frac{m}{k}, \pi - \frac{m}{k}\right]$ экстремальные точки $\mu(t)$ найдутся из равенства

$$\chi'(t) \cdot (\cos m - \cos t) = \chi(t) \sin t,$$

поэтому здесь, если максимум достигается внутри промежутка,

$$|\mu(t)| < \left| \frac{\chi'(t)}{\sin t} \right| < \frac{\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\sin \frac{m}{k}}.$$

Следовательно, вообще на $[0, \pi]$

$$|\mu(t)| < k_2 \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\frac{1}{k_2} \geq \min \left\{ \sin \frac{m}{k}; \sin \frac{m(k+1)}{2k} \cdot \sin \frac{m(k-1)}{2k}; \cos \frac{m(k+1)}{2k} \cdot \cos \frac{m(k-1)}{2k} \right\}.$$

При $m = \frac{\pi}{2}$, например, $k_2 \leq 2\sqrt{2}$.

Неравенство (5) теперь можно представить в следующем виде:

$$|\Phi(w)| < K\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

где $K = 1 + k_3(k_2 + 1)$, а

$$k_3 = \max \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (t-\theta) \cdot \operatorname{ctg} \frac{t-\theta}{2} \right| dt.$$

Представляя интеграл $\Phi(w)$ в виде двух интегралов:

$$\Phi(w) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t+m}{2}} \cdot \frac{1 + we^{-it}}{1 - we^{-it}} dt + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t+m}{2}} \cdot \frac{1 + we^{-it}}{1 - we^{-it}} dt = I_1(w) + I_2(w)$$

и учитывая оценку (6), придем к неравенствам

$$|I_1(w)| < K\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$|I_2(w)| < N\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

где $N = k_1 + k_3(k_1 + k_2)$.

Поэтому выражение для функции $g(w)$ можно записать теперь в виде

$$g(w) = w + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t-m}{2} \sin \frac{t+m}{2}} \cdot \frac{1 + we^{-it}}{1 - we^{-it}} dt + \\ + iC(w^2 - 2w \cos m + 1) + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

В полученной формуле определим постоянную C так, чтобы точка $e^{i\alpha}$ осталась неподвижной. Полагая $g(w) = w = e^{i\alpha}$, получим:

$$C = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t)}{\sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t+m}{2}} \operatorname{ctg} \frac{t-\alpha}{2} dt + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя значение C в (7) и упрощая результат, находим окончательную формулу для функции $g(w)$:

$$g(w) = w - \frac{1}{8\pi i} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t+m}{2} \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t-\alpha}{2}} \times \\ \times \frac{we^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{we^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} dt + O(\varepsilon^2). \quad (8)$$

Отбрасывая малые второго порядка относительно ε , получим главную часть функции $g(w)$, которой и будем пользоваться в дальнейшем. Полагая в формуле для главной части функции $g(w)$ $w = e^{i\theta}$, $z = g(w) = re^{i\varphi}$ и пользуясь разложением в ряд показательной функции, найдем зависимость между φ и θ :

$$\varphi = \theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) \sin \frac{m+\theta}{2} \sin \frac{\theta-m}{2} \sin \frac{\theta-\alpha}{2} - \delta(\theta) \sin \frac{t+m}{2} \sin \frac{t-m}{2} \sin \frac{t-\alpha}{2}}{\sin \frac{t+m}{2} \sin \frac{t-m}{2} \sin \frac{t-\alpha}{2} \sin \frac{t-\theta}{2}} dt. \quad (9)$$

Дифференцируя по θ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} = & 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{\sin \theta \cdot \sin \frac{\theta - \alpha}{2}}{\sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t-\alpha}{2} \cdot \sin \frac{t-\theta}{2}} dt + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{\sin \frac{\theta+m}{2} \sin \frac{\theta-m}{2} - \delta(\theta) \sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cos \frac{t-\theta}{2}}{\sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin^2 \frac{t-\theta}{2}} dt. \quad (10) \end{aligned}$$

Если же в выражении (4) положить $g(w) = re^{i\varphi}$, $w = e^{i\theta}$, взять логарифмическую производную от обеих частей и отделить мнимую часть, то можно видеть, что главная часть полученного выражения для $\frac{d\varphi}{d\theta}$ совпадает с формулой (10). А так как на окружности $|w| = 1$

$$\left| \frac{dz}{dw} \right| = [1 - \delta(\varphi)] \frac{d\varphi}{d\theta} + O(\varepsilon^2),$$

то главная часть модуля граничной производной функции $g(w)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} |g'(e^{i\theta})| = & 1 - \delta(\theta) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{\sin \theta \cdot \sin \frac{\theta - \alpha}{2}}{\sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin \frac{t-\alpha}{2} \cdot \sin \frac{t-\theta}{2}} dt + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{\sin \frac{\theta+m}{2} \cdot \sin \frac{\theta-m}{2} - \delta(\theta) \sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cos \frac{t-\theta}{2}}{\sin \frac{t+m}{2} \cdot \sin \frac{t-m}{2} \cdot \sin^2 \frac{t-\theta}{2}} dt. \end{aligned}$$

Под интегралами здесь понимается их главное значение.

Возвратимся теперь к формуле (9). Так как здесь модуль разности аргументов $|\theta_1 - \theta_2|$ и модуль разности интегралов от этих же аргументов являются величинами разных порядков малости относительно ε , то при достаточно малом $\delta(\varphi)$ θ будет однозначной функцией φ . Поэтому главная часть функции $g(w)$, определяемая формулой

$$g(w) = w - \frac{1}{8\pi i} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{w^2 - 2w \cos m + 1}{\sin \frac{t-m}{2} \sin \frac{t+m}{2} \sin \frac{t-\alpha}{2}} \cdot \frac{we^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{we^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} dt, \quad (11)$$

согласно принципу соответствия границ, осуществляет конформное однолистное отображение круга $|w| < 1$ на некоторую область $D(\tilde{\Gamma})$, граница которой отличается от границы Γ на малые второго порядка относительно ε в том смысле, что модуль разности между комплексными координатами соответственных точек границ Γ , $\tilde{\Gamma}$ и угол между касательными

к границам в этих же точках представляют собой величины второго порядка малости относительно ε .

Получение приближенных формул для функций, конформно отображающих произвольную область $D(\Gamma)$ на области, близкие к ней, сводится к нахождению конформного отображения области $D(\Gamma)$ на круг $|w| < 1$.

Определим таким способом главную часть функции, отображающей полуполосу на область, близкую к ней. Полуполоса является областью комплексного потенциала для бесконечно глубокого фильтрационного потока под непроницаемым гидротехническим сооружением, поэтому искомая формула даст возможность получить качественные выводы относительно изменения характеристик потока при вариации границы области течения.

Пусть w, z — соответственно плоскости полуполосы и области $D(\Gamma)$, близкой к ней. Через ω, ζ обозначим соответственно плоскости единичного круга $|\omega| < 1$ и области $D(\Gamma^*)$, близкой к нему.

Функция, реализующая конформное отображение круга $|\omega| < 1$ на полуполосу $0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > 0$, имеет вид

$$\omega = \frac{i + \cos \pi w}{i - \cos \pi w}. \quad (12)$$

При этом отображении точкам $w = 1, w = 0, w = i\infty$ соответствуют точки $\omega = i, \omega = -i, \omega = -1$, поэтому в формуле (11) нужно положить $m = \frac{\pi}{2}, a = \pi$. Тогда функцию (11) можно представить следующим образом:

$$\zeta = g(\omega) = \omega + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{(\omega^2 + 1)(\omega + 1)}{\cos t \cdot \cos \frac{t}{2}} \cdot \frac{dt}{\omega e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}}. \quad (13)$$

Будем считать, что граница области $D(\Gamma)$ задана следующими уравнениями:

а) участок I (луч $x = 0, y > 0$): $x = x_1(y)$, где

$$|x_1(y)| < \varepsilon, \quad |x_1'(y)| < \varepsilon, \quad |x_1''(y)| < \varepsilon, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0;$$

б) участок II (луч $x = 1, y > 0$): $x = x_2(y)$, где

$$|x_2(y) - 1| < \varepsilon, \quad |x_2'(y)| < \varepsilon, \quad |x_2''(y)| < \varepsilon, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = 0;$$

в) участок III (отрезок $0 < x < 1, y = 0$): $y = y(x)$, где

$$|y(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x)| < \varepsilon, \quad |y''(x)| < \varepsilon, \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

Полагая

$$\delta(\varphi) \approx x_1(y) \cdot \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=i y} \quad \text{на участке I,}$$

$$\delta(\varphi) \approx [1 - x_2(y)] \cdot \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=1+i y} \quad \text{на участке II,}$$

$$\delta(\varphi) \approx y(x) \cdot \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=x} \quad \text{на участке III}$$

и производя замену переменных в формуле (13) с помощью функции (12) и функции

$$\zeta = \frac{i + \cos \pi z}{i - \cos \pi z},$$

мы и найдем выражение для главной части искомой функции. Оно запишется в виде

$$g(w) = w + \int_0^1 y(t) \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \cos \pi t} dt - \int_0^\infty x_1(t) \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \operatorname{ch} \pi t} dt - \int_0^\infty [1 - x_2(t)] \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w + \operatorname{ch} \pi t} dt. \quad (14)$$

Пользуясь принципом соответствия границ, можно показать, что при достаточно малом ε функция (14) действительно реализует конформное отображение полуполосы $0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > 0$ на область $D(\bar{\Gamma})$, которая отличается от области $D(\Gamma)$ на малые второго порядка относительно ε .

Таким образом, можно сформулировать следующее предложение.

Теорема 2. Пусть область $D(\Gamma)$ ограничена правильным контуром Γ , заданным выражениями: $y = y(x), 0 < x < 1; x = x_1(y), y > 0; x = x_2(y), y > 0$, где

$$\begin{aligned} |y(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x)| < \varepsilon, \quad |y''(x)| < \varepsilon, \quad |x_1(y)| < \varepsilon, \\ |x_1'(y)| < \varepsilon, \quad |x_1''(y)| < \varepsilon, \quad |1 - x_2(y)| < \varepsilon, \quad |x_2'(y)| < \varepsilon, \\ |x_2''(y)| < \varepsilon, \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = x_1(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0, \\ x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$g(w) = w + \int_0^1 y(t) \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \cos \pi t} dt - \int_0^\infty x_1(t) \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \operatorname{ch} \pi t} dt - \int_0^\infty [1 - x_2(t)] \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w + \operatorname{ch} \pi t} dt$$

конформно отображает полуполосу $0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > 0$ на область $D(\bar{\Gamma})$ с контуром $\bar{\Gamma}$, определяемым выражениями:

$$y = \tilde{y}(x), \quad 0 < x < 1; \quad x = \tilde{x}_1(y), \quad y > 0; \quad x = \tilde{x}_2(y), \quad y > 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= y(x) + O(\varepsilon^2), & \tilde{x}_1(y) &= x_1(y) + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{x}_2(y) &= x_2(y) + O(\varepsilon^2), & \tilde{y}'(x) &= y'(x) + O(\varepsilon^2), \\ \tilde{x}_1'(y) &= x_1'(y) + O(\varepsilon^2), & \tilde{x}_2'(y) &= x_2'(y) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

и

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = \tilde{x}_1(0) = 0; \quad \tilde{x}_2(0) = 1.$$

Для получения качественных выводов формулу (14) достаточно взять для того случая, когда $y(x) \neq 0$, $x_1(y) \neq 0$, $x_2(y) \neq 1$ лишь в малых окрестностях точек x_0 , iy_0 , $1 + iy_1$ (вариация в этом случае называется локальной). Считая, что $y(x)$, $x_1(y)$, $1 - x_2(y)$ сохраняют знак в упомянутых окрестностях, а точка w находится на конечном расстоянии от точек x_0 , iy_0 , $1 + iy_1$, формулу (14) можно записать в следующем виде:

$$g(w) = w + \sigma_1 \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \cos \pi x_0} - \sigma_2 \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \operatorname{ch} \pi y_0} - \sigma_3 \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w + \operatorname{ch} \pi y_1}, \quad (15)$$

где σ_1 , σ_2 , σ_3 — площади между варьированной границей и соответствующими прямыми, ограничивающими полуполосу, причем знаки σ_1 , σ_2 , σ_3 совпадают со знаками $y(x)$, $x_1(y)$, $1 - x_2(y)$. Функцию, обратную $g(w)$, с той же степенью точности можно записать так:

$$w = z - \sigma_1 \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z - \cos \pi x_0} + \sigma_2 \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z - \operatorname{ch} \pi y_0} + \sigma_3 \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z + \operatorname{ch} \pi y_1}.$$

Эта формула также верна на конечном расстоянии от центров вариации — точек x_0 , iy_0 , $1 + iy_1$. Отсюда непосредственным дифференцированием можно найти модуль граничной производной функции, отображающей локально варьированную полуполосу на полуполосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

Анализируя формулы для граничных производных, можно получить следующие качественные результаты.

1. После установки шпунта скорость на всем подземном контуре флюتبета вне шпунта уменьшается.

2. Рассмотрим симметричный флютбет. Пусть разность напоров на линиях верхнего и нижнего бьефов равна H . Тогда, если шпунт установлен к нижнему бьефу ближе, чем была расположена точка с напором $h = \frac{H}{2}$, то существует линия Γ_1 (рис. 1), соединяющая одну из точек шпунта с конечной точкой на линии нижнего бьефа, и линия Γ_2 , начинающаяся на шпунте и простирающаяся на бесконечность в сторону верхнего бьефа, выше которых скорость фильтрационного потока после установки шпунта уменьшается, а ниже — увеличивается. На линиях Γ_1 , Γ_2 скорость потока остается неизменной.

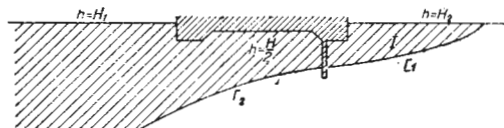


Рис. 1.

Если же шпунт установлен к верхнему бьефу ближе, чем была расположена точка $h = \frac{H}{2}$, то линия Γ_1 простирается на бесконечность, а линия Γ_2 имеет один из концов на линии верхнего бьефа.

На прямой, являющейся продолжением шпунта, скорость везде больше, чем до установки шпунта. При заданной длине шпунта область Γ (рис. 1) уменьшается с приближением шпунта к линии нижнего бьефа.

Если флютбет несимметричный, то такая же картина течения будет относительно точки $h = h_0$, где h_0 — некоторое неизвестное вначале значение напора.

3. При углублении дна нижнего бьефа скорость на всей линии нижнего бьефа вне места вариации уменьшается. На контуре флютбета вблизи точки соединения его с нижним бьефом скорость уменьшается, а в точках, где напор $h \geq \frac{H}{2}$, скорость всегда увеличивается. На линии верхнего бьефа скорость везде увеличивается.

Если дно нижнего бьефа поднимать, то там, где скорость при углублении увеличивалась, она будет уменьшаться и наоборот.

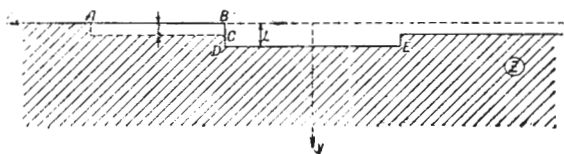


Рис. 2.

4. При углублении дна верхнего бьефа скорость по всей линии верхнего бьефа вне места вариации уменьшается. На контуре флютбета вблизи точки соединения его с верхним бьефом скорость уменьшается, а в точках с напором $h \leq \frac{H}{2}$ — всегда увеличивается. На линии нижнего бьефа скорость везде увеличивается.

При поднимании дна верхнего бьефа получаются обратные заключения.

В качестве примера приближенных вычислений при помощи формулы (14) рассмотрим характер изменения напора на флютбете при утолщении понура.

Пусть известна функция $w_1 = \xi + i\eta$, представляющая собой комплексный потенциал фильтрационного потока под флютбетом заданной формы при бесконечно тонком понуре AB (рис. 2). Водопроницаемый грунт мы предполагаем бесконечно глубоким.

Увеличим толщину понура до $l < L$, где L — толщина флютбета со стороны верхнего бьефа. Искомый комплексный потенциал запишется в виде:

$$\zeta = \Phi(w) = \Phi\left(\frac{w_1}{H}\right),$$

где

$$\zeta = w - \int_c^1 \delta(t) \frac{\sin \pi w}{\cos \pi w - \cos \pi t} dt,$$

а $\psi = \delta(\varphi)$ — уравнение понура на плоскости w (рис. 3), определяемое из системы

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{H} \xi(x, l) \\ \psi = \frac{1}{H} \eta(x, l), \end{cases}$$

где x изменяется на отрезке AB , а c — образ точки C на плоскости w .

Так как мы будем искать значения ζ только в точках отрезка ed , которые находятся на некотором удалении от деформированного участка границы, то мы будем пренебрегать тем обстоятельством, что на некоторых участках (весьма малых) производная $\delta'(\varphi)$ не мала.

Пусть $\zeta = u + iv$. Тогда на отрезке ed

$$u = \varphi - \int_c^1 \delta(t) \frac{\sin \pi \varphi}{\cos \pi \varphi - \cos \pi t} dt$$

и, следовательно, напор определится формулой

$$h(x, y) = h_0(x, y) -$$

$$- H \int_c^1 \delta(t) \frac{\sin \frac{\pi h_0(x, y)}{H}}{\cos \frac{\pi h_0(x, y)}{H} - \cos \pi t} dt, \quad (16)$$

где $h_0(x, y)$ — напор на контуре флютбета DE до утолщения понура.

Интеграл в формуле (16) можно представить тригонометрическим рядом, а именно, имеет место формула:

$$h(x, y) = h_0(x, y) - H \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi h_0(x, y)}{H};$$

здесь

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi c}^{\pi} \delta\left(\frac{t}{\pi}\right) \cos nt dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, О некоторых свойствах однолистных функций с приложением к теории струй, Мат. сб., н. с., т. 4, в. 3, 1938.
2. М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, М.—Л., 1946.
3. Г. Н. Положий, О движении граничных точек отображаемых областей, УМН, г. VII, в. 6 (52), 1952.

Получена 6 января 1953 г.

Киев.