1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. V, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Оценка радиуса сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих периодические решения систем дифференциальных уравнений

А. А. Круминг

Пусть дана система

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(t, X_1, \ldots, X_n, \lambda); \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

имеющая при $\lambda = 0$ изолированное периодическое решение $\{\varphi_i(t)\}$ с периодом 2π, правые части которой можно разложить в ряды по степеням $(X_i - \varphi_i(t))$ и λ при $|X_i - \varphi_i| \leqslant r_i$, $|\lambda| \leqslant r_0$, причем коэффициенты разложения будут непрерывные и периодические функции t с периодом 2π. Как было установлено Пуанкаре [1], такая система при известных условиях имеет единственное периодическое решение при отличных от нуля значениях λ, заключенных в некотором интервале; решение это разлагается в ряд по степеням λ. В настоящей работе дается оценка радиуса сходимости этих рядов по параметру λ для случая, когда детерминант Пуанкаре отличен от нуля.

Подстановкой

$$X_i = x_i + \varphi_i(t)$$

эта система приводится к системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n} f_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} \lambda^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} \equiv f_i(x_1, \ldots, x_n, \lambda), \tag{1'}$$

не содержащей в правых частях членов нулевого порядка, причем решению $X_i = \varphi_i(t)$ системы (1) будет соответствовать решение $x_i \equiv 0$ системы (1′). Правые части системы (1′) будут сходиться при

$$|x_i| \leqslant r_i, \quad |\lambda| \leqslant r_0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Относительно систем вида (1′) Перроном доказана следующая теорема [2].

Если в системе (1) коэффициенты $f_{k\nu_0} \ldots {}_{\nu_n}(t)$ непрерывны на отрезке $0 \leqslant t \leqslant a$ и удовлетворяют неравенствам

$$|f_{k\nu_0, \nu_1 \ldots \nu_n}(t)| \leqslant \frac{(\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n)!}{\nu_0! \, \nu_1! \ldots \nu_n!} \frac{Mr_k}{r_0^{\nu_0} r_1^{\nu_1} \ldots r_n^{\nu_n}},$$

то решение, удовлетворяющее условиям

$$x_k(0) = c_k; \quad k = 1, \ldots, n,$$

можно разложить в ряды по степеням λ, $c_1, \ldots, c_n$;

$$x_k = \sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n} \varphi_{k\nu_0, \ldots, \nu_n}(t) \lambda^{\nu_0} c_1^{\nu_1} \ldots c_n^{\nu_n} \tag{3}$$

эти ряды сходятся абсолютно в области, определяемой неравенством

$$\frac{|\lambda|}{r_0} + \frac{|c_1|}{r_1} + \cdots + \frac{|c_n|}{r_n} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} e^{-\nu(nMa+1)}. \tag{4}$$

Число M можно принять равным

$$M = \frac{\max|f_k|}{\min|r_i|}; \quad k=1, \ldots, n; \quad i=0, 1, \ldots, n,$$

где $\max|f_k|$ берется в комплексной области, определенной условиями (2), $a = 2\pi$ и $r_0, r_1, \ldots, r_n$ те же, что в условии (2). В этом случае функции

$$\sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n} \frac{(\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_n)!}{\nu_0! \nu_1! \ldots \nu_n!} \frac{M r_k}{r_0^{\nu_0} r_1^{\nu_1} \ldots r_n^{\nu_n}} \lambda^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$$

будут мажорантами правых частей системы (1′).

Фактическое вычисление коэффициентов разложения (3) производится по способу неопределенных коэффициентов. Эта задача сводится к решению систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для оценки сходимости рядов, представляющих периодические решения системы (1), достаточно вычислить, как мы покажем, лишь коэффициенты при первых степенях разложения (3); при этом, очевидно,

$$\varphi_{i\,\underset{k\text{-тое место}}{0 0 \ldots 1 \ldots 0}}(t) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial c_k}\right|_{\substack{c_1=c_2=\ldots=c_n=0 \\ \lambda=0}}.$$

Для удобства записи мы положим

$$\varphi_{i\,\underset{k\text{-тое место}}{0 0 \ldots 1 \ldots 0}}(t) \equiv \varphi_{ik}(t).$$

Необходимые и достаточные условия периодичности решения системы (1′) с начальными данными $x_k(0) = c_k$ запишутся так:

$$x_k(2\pi, c_1, \ldots, c_n, \lambda) - x_k(0, c_1, \ldots, c_n, \lambda) \equiv \psi_k(c_1, \ldots, c_n, \lambda) = 0 \tag{5}$$
$$(k=1, \ldots, n).$$

Функции $\psi_k(c_1, \ldots, c_n, \lambda)$ будут аналитическими в той же области, что и $X_k(t, c_1, \ldots, c_n, \lambda)$. Пусть r и ϱ — два числа, удовлетворяющие условию

$$\frac{r}{r_0} + \frac{n\varrho}{\min r_i} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} e^{-\nu(2\pi nM+1)};$$

тогда функции $x_i(t, c_1, \ldots, c_n, \lambda)$ и, следовательно, и $\psi_i(c_1, \ldots, c_n, \lambda)$ будут аналитическими при $|\lambda| \leqslant r$; $|c_i| \leqslant \varrho$.

Введем обозначения

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial c_j}\right] = \frac{\partial x_i(2\pi, c_1, \ldots, c_n, \lambda)}{\partial c_j} - \frac{\partial x_i(0, c_1, \ldots, c_n, \lambda)}{\partial c_j}.$$

Если

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial c_1}\dots\frac{\partial\psi_n}{\partial c_1}\\ \dots\dots\dots\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial c_n}\dots\frac{\partial\psi_n}{\partial c_n}\end{vmatrix}_{\substack{c_1=0\\ \dots\\ c_n=0\\ \lambda=0}}=\begin{vmatrix}\left[\frac{\partial x_1}{\partial c_1}\right]\dots\left[\frac{\partial x_n}{\partial c_1}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left[\frac{\partial x_1}{\partial c_n}\right]\dots\left[\frac{\partial x_n}{\partial c_n}\right]\end{vmatrix}_{\substack{c_1=0\\ \dots\\ c_n=0\\ \lambda=0}}=$$

$$=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(2\pi)-\varphi_{11}(0)\dots\varphi_{n1}(2\pi)-\varphi_{n1}(0)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_{1n}(2\pi)-\varphi_{1n}(0)\dots\varphi_{1n}(2\pi)-\varphi_{nn}(0)\end{vmatrix}\neq 0,$$

то из уравнений (5) мы можем определить c_i как функции λ.

Разлагая функции ψ_k в ряды, получим

$$\psi_k=\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{ki}(2\pi)-\varphi_{ki}(0)]c_i+\Psi_k,$$

где Ψ_k не содержат c_i в первых степенях.

Положим

$$\overline{\psi}_k=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\psi_j$$

и подберем α_{kj} так, чтобы

$$\overline{\psi}_k=-c_k+\overline{\Psi}_k, \tag{6}$$

где $\overline{\Psi}_k$ не содержат c_i в первых степенях.

Для определения α_{kj} мы получим системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}[\varphi_{ji}(2\pi)-\varphi_{ji}(0)]\alpha_{kj}=-\delta_{ik},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Определитель этих систем равен $\Delta\neq 0$ и

$$\alpha_{ik}=\frac{-\Delta_{ik}}{\Delta},$$

где Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента $\varphi_{ik}(2\pi)-\varphi_{ik}(0)$ определителя Δ.

Условия периодичности могут быть теперь записаны так:

$$\overline{\psi}_k=0$$

или

$$c_k=\overline{\Psi}_k. \tag{7}$$

Функции $\overline{\Psi}_k$ допускают мажоранту

$$\frac{N}{\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\varrho}\right)}-N\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\varrho}\right),$$

где N — число, превосходящее или равное максимуму модуля функций $\overline{\Psi}_k$. Максимум модуля $\overline{\Psi}_k$ можно оценить так:

$$\max|\overline{\Psi}_k| \leqslant \varrho + \max|\overline{\psi}_k| \leqslant n \cdot \max|\alpha_{ik}|\max|\psi_k| + \varrho =$$
$$= n \cdot \frac{\max|\Delta_{ik}|}{|\Delta|} \cdot \max|x_k(2\pi, c_1, \ldots, c_n, \lambda) - x_k(0, c_1, \ldots, c_n, \lambda)| + \varrho \leqslant$$
$$\leqslant n \cdot \frac{\max|\Delta_{ik}|}{|\Delta|} 2\max|x_k(t, c_1, \ldots, c_n, \lambda)| + \varrho \leqslant$$
$$\leqslant 2n\frac{\max|\Delta_{ik}|}{|\Delta|}(2\pi \cdot \max|f_k| + \max|c_i|) + \varrho \leqslant$$
$$\leqslant 2n\frac{\max|\Delta_{ik}|}{|\Delta|}(2\pi M \min r_i + \max r_i) + \varrho.$$

Уравнения (7) можно сравнивать с уравнением

$$c = \frac{N}{\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)\left(1 - \frac{nc}{\varrho}\right)} - M\left(1 + \frac{nc}{\varrho}\right); \tag{8}$$

правая часть уравнений (7) мажорируется правой частью уравнения (8). Следовательно, корни уравнений (7) будут аналитичными, по крайней мере, в той же области, что и корень уравнения (8).

Решая уравнение (8), мы получим

$$c^2\left(\frac{n^2N}{\varrho^2} + \frac{n}{\varrho}\right) - c + \frac{\frac{\lambda}{r}N}{1 - \frac{\lambda}{r}} = 0,$$

$$c = \frac{\varrho^2}{2n^2N + n\varrho} \pm \sqrt{1 - 4\frac{(n^2N + n\varrho)N\frac{\lambda}{r} \cdot \varrho^2}{\varrho^2\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) \cdot 2(n^2N + n\varrho)}} =$$

$$= \frac{\varrho^2}{2(n^2N + n\varrho)}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\lambda}{r} + \frac{4n^2N^2 + 4nN\varrho\lambda}{\varrho^2 r}}{1 - \frac{\lambda}{r}}}\right) =$$

$$= \frac{\varrho^2}{2(n^2N + n\varrho)}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\lambda}{r[\varrho(\varrho + 2nN)^{-1}]^2}}{1 - \frac{\lambda}{r}}}\right) =$$

$$= \frac{\varrho^2}{2(n^2N + n\varrho)}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\lambda}{s}}{1 - \frac{\lambda}{r}}}\right), \tag{9}$$

где

$$s = r\left(\frac{\varrho}{\varrho + 2nN}\right)^2.$$

Перед корнем следует брать знак минус, чтобы при $\lambda=0$ c обращалось в 0.

Выражение (9) является аналитической функцией λ при $|\lambda|<s$, и, следовательно, решения уравнений (7) будут также аналитическими функциями λ при тех же значениях λ. Таким образом, при $|\lambda|<s$ система (1') и, следовательно, система (1) обладает единственным периодическим решением для каждого значения λ, взятого из указанного промежутка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, 1892.
2. Perron O., Math. Annallen, B. 113, s. 300, 1936.

Получена 18 мая 1953 г.
Москва.