О некоторых многозначных соответствиях в проективной геометрии

А. И. Мандзюк

В настоящей статье дается критический обзор работ по проективной геометрии К. А. Андреева [1], А. К. Власова [2] и А. А. Глаголева [3] [1], относящихся к многозначным соответствиям.

Попутно автором впервые строго устанавливается, что предложенное К. А. Андреевым трех-трехзначное соответствие действительно является соответствием общего вида и в связи с этим дается новое построение трех-трехзначного соответствия по 15 парам соответственных элементов.

К построению полярных систем высших порядков А. К. Власова нами применяются методы современной многомерной геометрии, что делает эти системы более обозримыми для читателя.

В этой же статье намечается новый план, отличный от предложенного А. А. Глаголевым, решения задач линейной геометрии четырехмерного пространства, приводящий к исследованию системы нормальных кривых трехмерного пространства, в которую можно отобразить все прямые четырехмерного пространства.

Так как работа А. К. Власова является продолжением исследований К. А. Андреева, а работа А. А. Глаголева является продолжением и дальнейшим развитием исследований Власова, то автору представляется естественным начать статью с рассмотрения работы К. А. Андреева.

Работа К. А. Андреева „О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий" *посвящается вопросу построения алгебраических кривых по достаточному числу данных точек, принадлежащих этим кривым.*

Основная мысль этого исследования заключается в следующем: автор считал, что построение кривой второго порядка по ее пяти точкам осуществляется особенно просто, если определять коническое сечение как геометрическое место точек пересечения двух проективных пучков прямых. В самом деле, если даны пять точек A, B, C, D, E, то, взяв любые две

[1] Работы этих русских синтетических геометров почти совсем не освещены в нашей научной литературе. Мне известна только одна статья А. А. Глаголева [4], в которой дается более или менее подробный обзор работ К. А. Андреева. Что же касается работ А. К. Власова, то они мало известны как у нас, так и за границей. Не удивительно поэтому, что некоторые важные результаты А. К. Власова были значительно позже вновь получены иностранными учеными.

точки, например A и B, за центры двух пучков прямых и заставив лучам AC, AD, AE пучка (A) соответствовать лучи BC, BD, BE пучка (B), мы вполне определим проективное соответствие между пучками (A) и (B), так как проективное соответствие вполне определяется тремя парами соответственных элементов.

Проводя же прямые пучка (A) и строя соответственные прямые пучка (B), мы, очевидно, построим сколько угодно точек кривой второго порядка, проходящей через заданные точки A, B, C, D, E.

Совершенно по такому же плану К. А. Андреев предполагал строить и кривые высших порядков по достаточному числу точек.

Но чтобы осуществить этот план, предварительно нужно определять кривые высших порядков при помощи двух прямолинейных пучков, приведенных уже не в проективное, а в многозначное соответствие.

Так, например, кривую третьего порядка согласно этому плану нужно определять как геометрическое место точек пересечения двух прямолинейных пучков прямых (A) и (B), приведенных в двух-двузначное соответствие, причем лучу AB пучка (A) должен соответствовать тот же луч AB в пучке (B).

Ясно: чтобы таким образом определять кривую третьего порядка, необходимо предварительно изучить свойства двух-двузначного соответствия, подобно тому как, прежде чем определять коническое сечение при помощи двух проективных пучков прямых, предварительно изучают свойства проективного соответствия и, например, доказывают, что такое соответствие вполне определяется тремя соответствующими элементами.

Естественно поэтому, что свою докторскую диссертацию К. А. Андреев начал с чисто геометрического изучения двух-двузначного соответствия. Это изучение дало возможность К. А. Андрееву решить следующую важную задачу: даны восемь пар соответствующих лучей двух пучков прямых (A) и (B), приведенных в двух-двузначное соответствие. Требуется произвольно взятому лучу пучка (A) построить два соответствующих луча в пучке (B) или, наоборот, произвольному лучу пучка (B) требуется построить два соответствующих луча в пучке (A).

Решение последней задачи позволяет построить кривую третьего порядка по ее девяти произвольно заданным точкам A, B, C, D, E, K, L, M, N.

В самом деле, если мы заставим восьми лучам AB, AC, AD, AE, AK, AL, AM, AN пучка (A) соответствовать восемь лучей BA, BC, BD, BE, BK, BL, BM, BN пучка (B), то мы приведем эти пучки в двух-двузначное соответствие, так как такое соответствие вполне определяется восемью парами соответствующих элементов.

Проведя теперь произвольный луч X в пучке (A), мы можем построить ему два соответствующих луча в пучке (B), которые пересекут луч X в двух точках искомой кривой третьего порядка, проходящей через заданные девять точек.

Кроме двух-двузначного соответствия, К. А. Андреев исследует еще трех-трехзначное и четырех-четырехзначное соответствие и приходит к следующему результату: „*Если между двумя прямолинейными пучками устанавливается взаимно трехзначное соответствие посредством пятнад-*

цати пар соответственных лучей или взаимно четырехзначное соответствие посредством двадцати четырех пар соответственных лучей, то группа лучей, соответствующих всякому произвольно взятому лучу того или другого пучка, находится с помощью вполне определенного построения, требующего только линейки и одной известной всеми своими точками кривой третьего порядка и третьего класса или линейки, циркуля и одного конического сечения, которое не есть круг" ([1], стр. 152).

Последний результат позволяет построить *общую кривую четвертого порядка* по данным ее четырнадцати простым точкам, подобно тому как была построена выше *общая кривая третьего порядка* по ее девяти точкам.

Тот же результат позволяет построить и *общую кривую пятого порядка* по данным ее двадцати простым точкам.

Общую кривую шестого порядка этим методом построить уже нельзя, а потому К. А. Андреев ограничился здесь построением некоторых кривых шестого, седьмого и восьмого порядков *частного вида.*

А. А. Глаголев *впервые* обнаружил существенные пробелы в рассуждениях К. А. Андреева и вследствие этого пришел к такому выводу: „Вследствие такого рода неточных заключений К. А. Андреева предложенные им способы построения кривой третьего порядка по ее девяти заданным точкам и кривой четвертого порядка по 14 заданным точкам и т. д. остаются, строго говоря, недоказанными в его работе, и мы до сих пор не знаем, верны ли эти способы или нет" ([4], стр. 22). А. А. Глаголев пишет там же далее: „Выяснение этого последнего вопроса с практической точки зрения не представляет интереса, так как, следуя методу К. А. Андреева, например, нужно было бы провести не менее 1500 прямых для построения десятой точки кривой третьего порядка по ее девяти данным точкам".

Нам представляется, однако, что выяснение вопроса общности построений К. А. Андреева представляет большой интерес, если не с практической, то с теоретической точки зрения. В самом деле, прежде чем приступить к построению кривых по точкам, К. А. Андреев посвящает свои исследования вопросу о чисто геометрическом построении многозначных соответствий в формах первой ступени. Эти последние исследования особенно интересуют К. А. Андреева, как это непосредственно видно из следующей фразы, взятой из введения к его докторской диссертации: *„На место вопроса о построении кривых, имеющего более или менее частный характер, выступает таким образом вопрос более общий, долженствующий иметь, без сомнения, важное значение для науки, вопрос о геометрическом исследовании высших родов соответствия*" ([1], стр. 4). Вопрос о геометрическом построении многозначных соответствий общего вида принадлежит к трудным и малоизученным областям проективной геометрии, а потому нам представляется особенно интересным исследовать вопрос, являются ли соответствия К. А. Андреева соответствиями общего вида или нет [1].

---

[1] Как известно, при доказательстве *общности* своих построений К. А. Андреев допустил существенные ошибки (см. [4], стр. 21, 22).

Здесь необходимо отметить, что вопрос о построении многозначных соответствий между лучами двух пучков (A) и (B) К. А. Андреев сводил к вопросу построения многозначного соответствия между точками двух конических сечений следующим образом: через вершину A пучка (A) проводится произвольное коническое сечение P, а через вершину B пучка (B) проводится произвольное коническое сечение T.

Тогда любой луч пучка (A) определяет единственную точку на коническом сечении P, а именно ту точку, в которой этот луч, кроме точки A, второй раз пересекает коническое сечение P. Очевидно и обратное положение, а именно: любая точка конического сечения P определяет *однозначно* луч в пучке (A), причем если точка конического сечения P совпадает с точкой A, вершиной пучка (A), то в этом случае соответствующий луч в пучке (A) будет касательной к коническому сечению P в точке A. Понятно поэтому, что если между точками конических сечений P и T установить многозначное соответствие, то такое же многозначное соответствие установится и между лучами пучков (A) и (B), если условиться, конечно, считать соответствующими те лучи пучков (A) и (B), которые пересекают конические сечения P и T в соответствующих точках.

К. А. Андреев очень просто осуществил двух-двузначное соответствие между точками двух конических сечений следующим образом:

„Положим, что мы имеем две плоскости Π и Π', между элементами которых установлено каким-нибудь образом коррелятивное соответствие, так что каждой точке одной плоскости соответствует прямая на другой и обратно. Вообразим, кроме того, что на плоскости Π начерчено какое-нибудь коническое сечение S, а на плоскости Π' коническое сечение S'. Всякой точке кривой S, как принадлежащей плоскости Π, будет соответствовать на плоскости Π' некоторая прямая, которая пересечением своим с кривой S' определит на последней две действительные или мнимые точки. Также и обратно, всякой точке кривой S', как принадлежащей плоскости Π', будет соответствовать на плоскости Π прямая, которая своим пересечением с кривой S определит на последней две действительные или мнимые точки. Таким образом, мы видим, что, как скоро установлено между плоскостями Π и Π' коррелятивное соответствие, то этим самым устанавливается между точками двух каких бы ни было конических сечений S и S', находящихся последовательно на этих плоскостях, некоторое взаимно двузначное соответствие“ ([1], стр. 17).

Здесь, конечно, подразумевается, но, к сожалению, не оговаривается, что конические сечения S и S' *не соответствуют* друг другу в коррелятивном соответствии, установленном между элементами плоскостей Π и Π', так как если бы коническому сечению S, рассматриваемому как кривая второго порядка, соответствовало бы коническое сечение S' как кривая второго класса, то в этом случае, очевидно, между точками кривых S и S' не установилось бы двух-двузначное соответствие.

Общее взаимное двузначное соответствие между лучами двух пучков определяется уравнением, зависящим, как известно, от восьми параметров. Отсюда следует, что для синтетического доказательства общности приведенного выше взаимно двузначного соответствия необходимо установить, что это соответствие вполне определяется восемью парами соответствующих элементов.

Нетрудно видеть также, что решение этого вопроса равносильно утверждению, что коррелятивное соответствие между двумя плоскостями вполне определяется восемью парами сопряженных в этом соответствии точек (две точки называются сопряженными в коррелятивном соответствии, если прямая, соответствующая одной точке, проходит через другую).

К. А. Андреев доказал эту теорему путем непосредственного построения коррелятивного соответствия по восьми парам сопряженных точек.

Задача построения коррелятивного соответствия по восьми парам сопряженных точек принадлежит к очень трудным конструктивным задачам проективной геометрии и, кроме решения, предложенного К. А. Андреевым, известны еще решения, данные Рейе, Шретер, Лондон и Штурмом [6].

Отсюда следует, что, независимо от правильности рассуждений К. А. Андреева, о которых упоминал А. А. Глаголев в своей статье, рассмотренное выше взаимно двузначное соответствие является взаимно двузначным соответствием самого общего вида.

Заметим, что установленное в 1879 г. К. А. Андреевым взаимно двузначное соответствие было позднее вновь получено другими геометрами, не знавшими, повидимому, работ К. А. Андреева (см., например, Штурм, Геометрические преобразования, т. I, 1908). Если построенное им взаимно двузначное соответствие было получено позднее и другими геометрами, то построенное К. А. Андреевым взаимно трехзначное соответствие и взаимно четырехзначное соответствие, насколько мне известно, никем еще не рассматривалось.

Необходимо отметить, что прежде чем приступить к построению взаимно трехзначного и взаимно четырехзначного соответствия, К. А. Андреев посвятил целую большую главу линейным системам конических сечений (глава IV, „О сетях конических сечений“).

Если рассматривать содержание этой главы с современной точки зрения, то можно сказать, что в этой главе осуществлена первая по времени попытка построения проективной геометрии пятимерного пространства, точками которого являются конические сечения плоскости, прямыми — пучки конических сечений, плоскостями — сети конических сечений, трехмерными пространствами — сети второго рода конических сечений и четырехмерными пространствами — сети третьего рода (мы сохраняем терминологию К. А. Андреева, согласно которой линейная система третьего измерения — сеть второго рода, а линейная система четвертого измерения — сеть третьего рода).

Здесь впервые доказаны некоторые из основных теорем проективной многомерной геометрии.

Например, теорема о том, что коллинеарное соответствие между двумя пятимерными пространствами определяется семью парами соответствующих точек, формулируется так: *„Коллинеарное соответствие между* *коническими сечениями двух плоскостей определяется вполне посредством семи пар соответственных кривых*“ (К. А. Андреев [1], стр. 127).

Теорема о том, что коррелятивное соответствие между двумя пятимерными пространствами определяется заданием 35 пар сопряженных четырехмерных пространств, формулируется следующим образом: „*Коррелятивное соответствие систем всех возможных конических сечений на двух плоскостях определяется вполне посредством тридцати пяти пар сопряженных сетей третьего рода*“ ([1], стр. 147).

Необходимо отметить, что все эти теоремы доказываются путем непосредственного построения коллинеарного и коррелятивного соответствия по указанным в теоремах данным, причем все эти построения осуществляются при помощи циркуля, линейки и одного известного всеми своими точками конического сечения, которое не есть круг.

Чтобы наиболее просто получить взаимно трехзначное соответствие, установленное К. А. Андреевым, между точками двух конических сечений, мы воспользуемся следующим построением А. А. Глаголева.

В пространстве S_3 возьмем неподвижную линейную поверхность Φ второго порядка, на ней зафиксируем некоторую точку O, и, кроме того, возьмем еще неподвижную плоскость P.

Полярная плоскость точки X пространства S_3, взятая относительно Φ, пересечет Φ по коническому сечению X'; проектируя из O коническое сечение X' на плоскость P, мы получим на P некоторое коническое сечение X'', которое мы будем считать соответствующим точке X пространства S_3.

Коническое сечение X'', очевидно, пройдет через точки A и B плоскости P, в которых образующие a и b поверхности Φ, проходящие через O, пересекают плоскость P.

Ясно, что приведенное построение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками X пространства S_3 и коническими сечениями X'' плоскости P, проходящими через две постоянные точки A и B.

Из приведенного построения непосредственно видно, что точки прямой пространства S_3 отображаются в конические сечения плоскости P, проходящие через A и B и образующие пучок, а точки плоскости пространства S_3 отображаются в конические сечения плоскости P, проходящие через A и B и образующие сеть, и обратно, коническим сечениям сети, проходящим через точки A и B, соответствует плоскость пространства S_3.

Воспользуемся теперь приведенным построением для получения взаимно трехзначного соответствия К. А. Андреева. Для этой цели возьмем две плоскости P и P_1, причем пусть A и B — две произвольные точки первой плоскости, а A_1 и B_1 — две произвольные точки второй плоскости. Пусть, далее, при помощи приведенного выше построения установлено взаимно однозначное соответствие Σ между коническими сечениями плоскости P, проходящими через точки A и B и точками пространства S_3, и пусть аналогичное соответствие Σ_1 установлено между точками пространства S_3' и коническими сечениями плоскости P_1, проходящими через точки A_1 и B_1.

Допустим, далее, что между пространствами S_3 и S_3' в свою очередь установлено некоторое коррелятивное соответствие, которое мы обозначим символом T.

Пусть M^2 — произвольное коническое сечение плоскости P, проходящее через точку A, но не проходящее через точку B, а M_1^2 — произвольное коническое сечение плоскости P_1, проходящее через точку A_1 и не проходящее через точку B_1.

Если X — произвольная точка конического сечения M^2, то она определяет сеть конических сечений с тремя базисными точками A, B, X.

Этой сети (A, B, X) в пространстве S_3 в силу соответствия Σ будет соответствовать некоторая плоскость α_x. В силу корреляции T плоскости α_x в пространстве S_3' будет соответствовать некоторая точка X_1, которой в силу соответствия Σ_1 на плоскости P_1 будет соответствовать некоторое коническое сечение X_1'', проходящее через точки A_1 и B_1 плоскости P_1.

Кривая X_1'' пересекает коническое сечение M_1^2, кроме точки A_1, еще в трех точках: y_1, y_2, y_3. Ясно, что эти три точки конического сечения M_1^2 можно считать соответствующими точке X конического сечения M^2.

Совершенно таким же способом можно построить три точки конического сечения M^2, соответствующие точке y_1 конического сечения M_1^2.

Отсюда следует, что при помощи нашего построения устанавливается взаимно трехзначное соответствие между точками конических сечений M^2 и M_1^2.

Это самое соответствие и получил К. А. Андреев, иным, более сложным способом, не прибегая к пространственным построениям.

К. А. Андреев для доказательства общности полученного им трех-трехзначного соответствия строит это соответствие по 15 парам соответствующих элементов.

Но, как показал А. А. Глаголев, обоснование этих построений К. А. Андреева не вполне корректно, а потому желательно найти новое доказательство общности рассматриваемого взаимно трехзначного соответствия, т. е. желательно найти новое построение рассматриваемого трех-трехзначного соответствия по 15 парам соответствующих элементов.

Нам представляется, что это новое решение последней задачи может быть получено следующим образом.

Мы видели выше, что три точки — y_1, y_2, y_3 — конического сечения M_1^2, соответствующие точке X конического сечения M^2, высекались на M_1^2 коническим сечением X_1'', соответствующим в силу Σ_1 точке X_1 пространства S_3'.

Но коническое сечение X_1'' принадлежит сети конических сечений плоскости P_1, определенной тремя точками: y_1, A_1, B_1. Отсюда следует, что плоскость α_x', соответствующая в пространстве S_3', в силу Σ_1 сети (y_1, A_1, B_1) пройдет через точку X_1, которая соответствует в силу корреляции T плоскости α_x. А это означает, что плоскости α_x и α_x' являются сопряженными плоскостями в коррелятивном соответствии T.

Таким образом, задавая пару точек X, y_1, соответствующих в трех-трехзначном соответствии, мы при помощи соответствия Σ и Σ_1 получаем две плоскости — α_x и α_x', сопряженные в коррелятивном соответствии T, установленном между пространствами S_3 и S_3'.

Как известно, коррелятивное соответствие между двумя пространствами третьего измерения вполне определяется, если заданы 15 сопряженных плоскостей.

Отсюда следует, что и рассматриваемое нами трех-трехзначное соответствие вполне определяется, если заданы 15 пар соответственных точек этого соответствия,— мы видим, таким образом, что наше взаимно трехзначное соответствие будет самого общего вида, так как уравнение общего взаимно трехзначного соответствия содержит 16 членов.

Построение коррелятивного соответствия в пространстве по 15 парам сопряженных плоскостей является, как известно, линейным построением, а потому, отображая это построение при помощи Σ и Σ_1 на плоскости P и P_1, мы получим построение взаимно трехзначного соответствия, которое не требует пространственных построений.

Аналогично, отображая полученное К. А. Андреевым построение взаимно четырехзначного соответствия в пространство четырех измерений, мы аналогичным образом убедимся, что это соответствие будет взаимно четырехзначным соответствием самого общего вида.

Заканчивая рассмотрение диссертации К. А. Андреева, можно сделать следующее замечание общего характера.

Как известно, построение проективного соответствия по трем соответствующим элементам очень просто, а потому, сведя задачу построения конического сечения по пяти точкам к построению проективного соответствия по трем соответствующим элементам, мы получаем очень простое построение конического сечения по заданным точкам.

Между тем построение взаимно двузначного соответствия по восьми заданным элементам является весьма сложным и трудным построением, а сведя несложную конструктивную задачу построения кривой третьего порядка по ее девяти точкам к построению взаимно двузначного соответствия по восьми соответствующим элементам, мы, в сущности, не упрощаем, а усложняем решение поставленной задачи.

Возникает вопрос — нельзя ли применить построенные К. А. Андреевым многозначные соответствия к решению каких-либо других задач, относящихся к алгебраическим кривым высших порядков?

Переходим теперь к рассмотрению работ А. К. Власова.

Основная работа А. К. Власова озаглавлена „Полярные системы высших порядков в формах первой ступени. Опыт построения геометрической теории, соответствующей теории алгебраических уравнений и форм“.

Это название докторской диссертации А. К. Власова показывает, что полярные системы высших порядков должны быть, по мысли А. К. Власова, геометрическим эквивалентом алгебраических уравнений и форм. Но что такое полярные системы высших порядков А. К. Власова? Нам представляется, что этот вопрос проще всего осветить с точки зрения современной проективной геометрии многомерного пространства. Пусть C^n — нормальная кривая n-мерного пространства S_n. Если X — произвольная точка пространства S_n, то, как известно, из точки X можно провести n соприкасающихся гиперповерхностей к кривой C^n, которые на C^n определят n точек соприкосновения: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Обратно, если на кривой C^n даны n произвольных точек $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, то, проведя в каждой из этих точек соприкасающуюся гиперплоскость к кривой C^n, мы получим n соприкасающихся гиперплоскостей, которые пересекутся в определенной точке X пространства S_n. Таким образом, рассматриваемое построение позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства S_n и группами в n точек кривой C^n. Так как точки кривой C^n можно привести во взаимно однозначное соответствие с точками конического сечения C^2, то можно говорить и о взаимно однозначном соответствии между точками n-мерного пространства и группами в n точек конического сечения C^2.

Если мы возьмем в пространстве S_n некоторую гиперплоскость, произвольно расположенную относительно кривой C^n, то ∞^{n-1} ее точек отобразятся в ∞^{n-1} групп точек на кривой C^n по n точек в каждой группе; отображая полученное на кривой C^n точечное множество на коническое сечение C^2, мы получим на последнем точечное множество, состоящее из ∞^{n-1} групп точек по n точек в каждой группе. Последнее точечное множество и будет *полярной системой* n-го порядка А. К. Власова. Необходимо отметить, что в своей работе А. К. Власов рассматривает полярные системы не выше шестого порядка, причем он строит полярные системы и исследует их свойства совершенно иным способом. Нам представляется, однако, что если иметь в виду *неконструктивные* вопросы, относящиеся к полярным системам высших порядков, то лучше всего исследовать свойства этих полярных систем при помощи приведенного выше построения. В самом деле, это построение наглядно показывает, что полярную систему n-го порядка можно рассматривать как гиперплоскость n-мерного пространства, каждая точка которого является группой в n точек конического сечения C^2. Легко видеть, что, став на такую точку зрения, мы весьма просто получаем доказательства целой группы теорем А. К. Власова, которые в его труде доказываются весьма сложным способом. Например, гиперплоскость пространства S_n вполне определяется n независимыми точками, а потому полярная система n-го порядка вполне определяется n независимыми группами точек, по n точек в каждой группе. Полагая $n = 3$, 4, 5 и 6, мы получаем теоремы А. К. Власова о том, что *„полярная система третьего порядка вполне определяется тремя тройками точек, четвертого порядка — четырьмя четверками точек и т. д.“* ([2], стр. 7, 41, 169, 183). Точно так же, принимая во внимание, что n гиперплоскостей n-мерного пространства пересекаются в одной точке и, полагая $n = 5$, мы получаем теорему А. К. Власова о том, что *„пять полярных систем имеют одну, и только одну, общую пятерку“* и т. д.

Как известно, свойства нормальной кривой многомерного пространства являются простым обобщением всем знакомых свойств конического сечения и пространственной кривой третьего порядка, причем эти свойства легко доказываются как аналитическим, так и синтетическим методом. Естественно поэтому применить эти свойства нормальной кривой многомерного пространства не только к определению, но и к исследованию полярных систем высших порядков А. К. Власова.

Для этой цели заметим прежде всего, что если точка X будет лежать на нормальной кривой C^n n-мерного пространства, при помощи которой мы установили взаимно однозначное соответствие между точками пространства S_n и группами в n точек кривой C^n, то в этом случае точке X будет соответствовать группа, состоящая из n точек, слившихся в одну точку. Если в полярной системе n-го порядка какая-нибудь группа ее точек сливается в одну точку, то такая n-кратная точка называется корнем полярной системы. Всякая гиперплоскость пересекает нормальную кривую C^n пространства S_n в n точках, а потому мы можем сказать, что полярная система n-го порядка имеет n корней, так как точки гиперплоскости отображаются в группы точек кривой C^n (или конического сечения C^2), причем точки пересечения гиперплоскости с кривой C^n, и только они, отобразятся в корни полярной системы. Отсюда, полагая n равным 3, 4, 5 и 6, мы получаем теоремы А. К. Власова о том, что „*полярная система третьего порядка имеет три корня, полярная система четвертого порядка имеет четыре корня* и т. д.“ ([2], стр. 5, 40, 163, 183).

Совершенно таким же образом, используя свойства кривой C^n пространства S_n, можно в обобщенном виде доказать и ряд других теорем А. К. Власова относительно полярных систем высших порядков.

Нужно отметить также, что, определяя полярные системы А. К. Власова приведенным выше способом, мы непосредственно видим, что эти полярные системы являются инволюциями, порядок которых на единицу выше их измерения. Так, например, обычная квадратная инволюция будет полярной системой, так как ее порядок (2) на единицу больше ее измерения, равного единице. Естественно поэтому полярную систему n-го порядка обозначать символом I_n^{n-1}, при помощи которого обычно обозначают инволюцию n-го порядка и $(n-1)$-го измерения.

Теория полярных систем высших порядков, т. е. теория инволюций I_n^{n-1} кладется А. К. Власовым в основу построения полярного соответствия в формах первой ступени. Эта остроумная идея состоит в следующем: положим, что мы имеем полярную систему I_3^2 третьего порядка, нанесенную на коническое сечение C^2. Обозначим буквами E_1, E_2, E_3 корни полярной системы I_3^2, т. е. такие точки конического сечения C^2, в которых тройка точек полярной системы I_3^2 сливается в одну точку. Полярная система третьего порядка состоит из ∞^2 троек точек конического сечения C^2, причем если X_1 — произвольная точка кривой C^2, то ∞^1 пар точек X_2, X_3, которые дополняют точку X_1 до троек полярной системы I_3^2, образуют квадратную инволюцию $I^1{}_2$. Тогда, как это установил А. К. Власов, двойные точки P_1, P_2 инволюции I_2^1 будут представлять собой первую поляру точки X_1 по отношению группы из трех точек: E_1, E_2, E_3 — корней инволюции I_3^2. Аналогично, если E_1, E_2, E_3, E_4 — корни полярной системы четвертого порядка, то ∞^2 троек точек кривой C^2, которые дополняют некоторую точку X_1 конического сечения C^2 до четверок полярной системы I_4^3 образуют полярную систему третьего порядка I_3^2, причем тройка корней этой последней полярной системы I_3^2 будет первой полярой точки X_1 по отношению группы из четырех точек E_1, E_2, E_3, E_4 и т. д. Нужно заметить, что эти важные теоремы А. К. Власова были позже вновь „открыты“ французским геометром Л. Помэй [5].

Кроме построения полярного соответствия в образах первой ступени А. К. Власов применяет инволюции I_n^{n-1} для установления нового понятия о сопряженности двух групп точек, которое можно рассматривать как обобщение понятия гармонической сопряженности двух пар точек.

Обобщение это естественно вытекает из сравнения обычной квадратной инволюции I_2^1 с полярными системами высших порядков. В самом деле, простейшей полярной системой является обычная квадратная инволюция I_2^1, так как ее порядок на единицу выше ее измерения.

Эта полярная система второго порядка I_2^1 имеет, как известно, два корня (две двойные точки), причем все остальные пары точек инволюции I_2^1 гармонически разделяют пару ее корней.

Естественно поэтому, как это и делает А. К. Власов, каждую тройку кубической полярной системы называть[1] *сопряженной* с тройкой ее корней, каждую четверку точек инволюции I_4^3 считать сопряженной с четверкой ее корней и т. д.

Как мы видели выше, полярная система n-го порядка вполне определяется заданием n ее корней.

Это обстоятельство дало возможность А. К. Власову доказать (для случая $n=3$, 4, 5) важную теорему о взаимной сопряженности двух групп точек.

Это доказательство различно для случаев $n=3$, 4, 5 и даже для случая $n=3$ очень сложное.

Самый же план доказательства для случая $n=3$ состоит в следующем.

Пусть на коническом сечении C^2 даны две сопряженные тройки точек M, N, P и X, Y, Z. Это означает, что одна из троек, например M, N, P, является тройкой корней кубической полярной системы, и тройка X, Y, Z принадлежит к тройкам этой системы.

Ясно, что для доказательства взаимной сопряженности данных троек точек необходимо рассмотреть новую кубическую полярную систему, определяемую тремя корнями X, Y, Z и доказать, что тройка M, N, P будет одной из троек этой новой системы.

А. К. Власов ([2], стр. 8) придавал очень большое значение теореме о взаимной сопряженности двух троек точек и считал ее важнейшей теоремой из всех теорем относительно кубической полярной системы.

Действительно, теорема о взаимной сопряженности двух троек точек дает возможность, например, всю теорию нуль-системы свести к теории кубической полярной системы, как это и осуществляется в работе А. К. Власова.

Теория кубической полярной системы, предложенная А. К. Власовым, очень сложна.

По мнению А. А. Глаголева ([4], стр. 31), эта сложность проистекает от того обстоятельства, что более простой геометрический образ, состоящий из двух сопряженных троек точек, определяется при помощи инволюции I_3^2, т. е. при помощи более сложного геометрического образа.

[1] А. К. Власов говорит „кубически сопряженной“.

Как известно, гармоническая сопряженность двух пар точек синтетически очень просто определяется при помощи полного четырехсторонника и, исходя из такого определения, мы получаем очень простую синтетическую теорию квадратной инволюции, так как здесь более сложный геометрический образ (инволюция $\dot{I}_2^1$) определяется при помощи более простого геометрического образа (гармонической сопряженности).

Естественно поэтому, что на путях отыскания более простой синтетической теории кубической полярной системы возникла потребность найти новое синтетическое определение сопряженности двух троек точек, независимое от понятия кубической инволюции I_3^2.

Последняя задача была разрешена А. А. Глаголевым, который впервые дал синтетическое определение сопряженности двух троек точек, независимое от понятия кубической полярной системы и состоящее в следующем.

Две тройки X, $У$, Z и X', $У'$, Z' конического сечения C^2 называются кубически сопряженными, или аполярными, если вершины и брианшоновы точки D и D' двух треугольников ABC и $A'B'C'$, образованных касательными в X, $У$, Z и X', $У'$, Z', лежат на одном и том же коническом сечении $ABCDA'B'C'D'$.

Это определение как бы вскрывает конструктивную сущность понятия сопряженности двух троек точек и потому делает ясными те вопросы, выяснение которых до появления работы А. А. Глаголева было сопряжено с известными трудностями.

Например, так сложно доказываемая в работе А. К. Власова теорема о взаимной сопряженности двух троек точек непосредственно вытекает из приведенного выше определения А. А. Глаголева и поэтому не требует никаких доказательств.

Основываясь на своем определении сопряженности двух троек точек, А. А. Глаголев не только построил весьма простую синтетическую теорию инволюции I_3^2, но и расширил самое понятие сопряженности двух троек точек. А именно, он ввел новое понятие о сопряженности двух троек точек относительно конического сечения, состоящее в следующем.

Две тройки точек X, $У$, Z и X', $У'$, Z' конического сечения C^2 сопряжены относительно конического сечения M^2, если касательные в X, $У$, Z и X', $У'$, Z' к C^2 образуют соответственно треугольники ABC и $A'B'C'$, обладающие тем свойством, что их вершины A, B, C, A', B', C' и их полярные относительно M^2 точки D и D' лежат на одном и том же коническом сечении.

Это определение можно рассматривать как обобщение прежнего определения сопряженности. В самом деле, если коническое сечение M^2 совпадает с коническим сечением C^2, то мы приходим к определению сопряженности двух троек точек в обычном смысле.

Новое понятие о сопряженности двух троек точек относительно конического сечения M^2 дало возможность А. А. Глаголеву обобщить ряд классических теорем относительно кубической полярной системы, что в свою очередь позволило весьма расширить сферу применения теории кубических инволюций к решению задач линейной геометрии трехмерного пространства.

Основные результаты, полученные им в этом направлении, состоят в следующем: дается простое построение, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками точек конического сечения C^2.

Каждая тройка точек конического сечения C^2 может рассматриваться как тройка прикосновения сторон треугольника, описанного около конического сечения C^2, а потому взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками точек конического сечения C^2 непосредственно приводит к взаимно однозначному соответствию между точками пространства и треугольниками, описанными около C^2.

Последнее соответствие обладает следующими особенностями: точкам прямой пространства соответствуют треугольники, описанные около C^2 и вписанные в одно и то же коническое сечение, которое можно считать соответствующим прямой пространства; всем же прямым пространства будет соответствовать ∞^4 конических сечений, образующих некоторую нелинейную квадратичную систему, которую А. А. Глаголев обозначает буквой $\boldsymbol{T}$.

Введенное А. А. Глаголевым новое понятие о сопряженности двух троек точек относительно конического сечения и обобщенные им в связи с этим понятием классические теоремы относительно кубической полярной системы дали ему возможность осуществить преобразование системы $\boldsymbol{T}$ в саму себя, причем любое коническое сечение плоскости, отличное от основного конического сечения C^2, однозначно определяет такое преобразование системы $\boldsymbol{T}$ в саму себя.

Так как конические сечения системы $\boldsymbol{T}$ отображаются в прямые пространства, то взаимно однозначное соответствие между коническими сечениями системы $\boldsymbol{T}$ отображается во взаимно однозначное соответствие между прямыми пространства, которое синтетически здесь впервые осуществляется, независимо от понятия нуль-коррелятивного соответствия (нуль-системы).

Если между кривыми системы $\boldsymbol{T}$ при помощи некоторого конического сечения $\boldsymbol{M}^2$ установлено взаимно однозначное соответствие, то, оказывается, в этом соответствии существует $\propto^3$ кривых, которые соответствуют сами себе.

Эти сами себе соответствующие кривые системы T отображаются в пространстве в ∞^3 прямых, образующих линейный комплекс.

Если на плоскости конического сечения C^2 мы возьмем два конических сечения $\boldsymbol{M}^2$ и $\boldsymbol{M}^{2\prime}$, то они определят два преобразования системы $\boldsymbol{T}$ в саму себя и, следовательно, определят два комплекса Γ и Γ' в пространстве, причем оказывается, что кривые ряда конических сечений, определяемого кривыми $\boldsymbol{M}^2$ и $\boldsymbol{M}^{2\prime}$, определяют в пространстве комплексы, принадлежащие пучку комплексов, определяемому комплексами Γ и Γ'.

Последнее обстоятельство позволило А. А. Глаголеву свести задачи, относящиеся к теории линейных систем линейных комплексов, к задачам, относящимся к теории тангенциальных линейных систем конических сечений.

Как известно, единственная до появления работы А. А. Глаголева синтетическая теория линейных систем линейных комплексов была разработана только Штурмом в его линейной геометрии.

Эта теория Штурма поражала своей сложностью и некоторой искусственностью.

Понятно поэтому, что, сведя теорию линейных комплексов к хорошо синтетически разработанной А. К. Власовым теории тангенциальных систем конических сечений, А. А. Глаголев получил весьма простую синтетическую теорию линейных систем линейных комплексов.

В заключение своих исследований А. А. Глаголев пишет следующее: „Как известно (Николадзе, Диссертация, Париж, 1928), если мы опишем около конического сечения C^2 два полных четырехсторонника, то их 12 вершин будут лежать на одной и той же кривой K третьего порядка, причем существует ∞^1 полных четырехсторонников, вписанных в K и описанных около C^2.

Ясно, что эта теорема вполне аналогична теореме о треугольниках Понселе и она может быть положена в основу определения инволюции I_4^1, причем кривую K можно принять за отображение прямой четырехмерного пространства, и система кривых K, в которую отображаются все прямые четырехмерного пространства, может быть также использована для решения задач линейной геометрии четырехмерного пространства, подобно тому как была использована система для решения задач линейной геометрии трехмерного пространства“.

Нам кажется, однако, что такой путь решения задач линейной геометрии четырехмерного пространства более сложен, чем указанный выше.

В самом деле, для исследования задач линейной геометрии трехмерного пространства с успехом применялась система T, состоящая из нормальных кривых двухмерного пространства.

Естественно поэтому для решения задач линейной геометрии четырехмерного пространства исследовать систему нормальных кривых трехмерного пространства, в которую, как это легко доказать, можно отобразить все прямые четырехмерного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Андреев, О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий, М., 1879.
2. А. К. Власов, Полярные системы высших порядков в формах первой ступени, М., 1909.
3. А. А. Глаголев, О сопряженности двух троек точек, ДАН СССР, т. LIV, № 4, 1946.
4. А. А. Глаголев, Синтетическая геометрия в трудах В. Я. Цингера, Н. Д. Брашмана и К. А. Андреева, Номографический сборник, изд. Московского гос. ун-та, М., 1951.
5. L. Pomey, Journal de L'Ecole Polytechnique, Paris, 1923, 1937.
6. R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Bd. I, II, III Leipzig und Berlin, 1908.

Получена 6 марта 1953 г.
Киев.