О методе Н. П. Романова получения тождеств для арифметических функций

Д. М. Котелянский

В работе „Пространство Гильберта и теория чисел" [1] Н. П. Романов указал метод, позволяющий по одной данной ортонормированной последовательности элементов $\{\alpha_n\}$ гильбертова пространства H строить в H бесконечное множество ортонормированных последовательностей $\{\beta_n\}$ арифметического характера. При этом полнота первоначальной последовательности в некотором подпространстве $H' \varepsilon H$ влечет за собой полноту в H' каждой из построенных последовательностей. Взяв произвольные два элемента из H и приравняв друг другу выражения для их скалярного произведения в системах $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, Н. П. Романов пришел к тождеству ([1], стр. 31)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)B(n)}{\varphi_s(n)} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, b(n). \tag{1}$$

Здесь:

$$\operatorname{Re}(s) > 1; \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}; \quad \varphi_s(n) = n^s \prod_{\frac{p}{n}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

где p пробегает все простые делители n, $a(n)$ и $b(n)$ — произвольные функции n, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty.$$

$A(n)$ и $B(n)$ связаны с $a(n)$ и $b(n)$ соответственно равенствами

$$\sum_{\frac{d}{n}} A(d) = n^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(nk)}{k^s}; \quad \sum_{\frac{d}{n}} B(d) = n^{\frac{s}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(nk)}{k^s}. \tag{2}$$

В настоящей статье тождество (1) применяется к некоторым специальным типам арифметических функций, что позволяет получить, пользуясь общим методом, как некоторые известные, так и многие новые тождества теории чисел [1].

В целях удобства записи дальнейших формул положим:

$$a(n) = \frac{F(n)}{n^{\frac{s}{2}}}; \quad b(n) = \frac{G(n)}{n^{\frac{s}{2}}}.$$

---

[1] Из известных тождеств отметим тождества Рамануджана (см. ниже формулу (14)).

Тогда тождество (1) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)\,B(n)}{\varphi_s(n)} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)\,G(n)}{n^s}, \tag{3}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G(n)|^2}{n^s} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F(n)|^2}{n^s} < \infty,$$

причем связь между $A(n)$, $B(n)$ и $F(n)$, $G(n)$ соответственно дается формулами

$$\sum_{\frac{d}{n}} A(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(nk)}{k^s}; \quad \sum_{\frac{d}{n}} B(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(nk)}{k^s}. \tag{4}$$

Пользуясь функцией Мебиуса и правилом обращения суммы по делителям ([2], стр. 37), можно представить формулы (4) в виде

$$A(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(dk)}{k^s}; \quad B(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(dk)}{k^s}. \tag{5}$$

Рассмотрим сперва класс A — класс мультипликативных функций, т. е. функций, удовлетворяющих условию $F(n_1 n_2) = F(n_1) F(n_2)$ при любых взаимно простых n_1 и n_2.

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — разложение n на степени простых множителей, а π пробегает все простые числа, не делящие n. Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(nk)}{k^s} = \prod_{\pi} \left(1 + \frac{F(\pi)}{\pi^s} + \frac{F(\pi^2)}{\pi^{2s}} + \ldots\right) \cdot \prod_{\frac{p}{n}} \left[F(p^\alpha) + \frac{F(p^{\alpha+1})}{p^s} + \ldots\right]$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(nk)}{k^s} = M \prod_{\frac{p}{n}} \frac{F(p^\alpha) + \frac{F(p^{\alpha+1})}{p^s} + \ldots}{1 + \frac{F(p)}{p^s} + \frac{F(p^2)}{p^{2s}} + \ldots}, \tag{6}$$

где

$$M = \prod_{q} \left(1 + \frac{F(q)}{q^s} + \frac{F(q^2)}{q^{2s}} + \ldots\right),$$

а q пробегает все простые числа.

Отсюда следует, что $\dfrac{1}{M} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{F(nk)}{k^s}$ есть мультипликативная функция от n, а так как согласно (5)

$$\frac{A(n)}{M} = \sum_{\frac{d}{n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(dk)}{k^s},$$

то $\dfrac{A(n)}{M}$ также мультипликативная функция от n ([2], стр. 35).

Таким образом, вычислив значение $\dfrac{A(n)}{M}$ для n, равного p^α, мы легко получим значение $\dfrac{A(n)}{M}$ при любом n. Но в силу свойств функции $\mu(n)$

$$\frac{1}{M} A(p^\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(p^\alpha k) - F(p^{\alpha-1} k)}{k^s}. \tag{7}$$

Согласно (6)

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(p^{\alpha}k)}{k^s}=\frac{F(p^{\alpha})+\frac{F(p^{\alpha+1})}{p^s}+\ldots}{1+\frac{F(p)}{p^s}+\frac{F(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}$$

и, значит, в силу (7)

$$\frac{1}{M}A(p^{\alpha})=\frac{F(p^{\alpha})-F(p^{\alpha-1})+\frac{F(p^{\alpha+1})-F(p^{\alpha})}{p^s}+\ldots}{1+\frac{F(p)}{p^s}+\frac{F(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}. \tag{8}$$

Положим $F(n)=\sum\limits_{\frac{d}{n}}f(d)$, чем однозначно определяется $f(n)$. Тогда формула (8) примет вид

$$\frac{1}{M}A(p^{\alpha})=\frac{f(p^{\alpha})+\frac{f(p^{\alpha+1})}{p^s}+\ldots}{1+\frac{1+f(p)}{p^s}+\frac{1+f(p)+f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}=$$

$$=\frac{f(p^{\alpha})+\frac{f(p^{\alpha+1})}{p^s}+\ldots}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots\right)}.$$

Отсюда в силу мультипликативности $\frac{A(n)}{M}$ имеем

$$\frac{A(n)}{M}=\prod_{\frac{p}{n}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\frac{f(p^{\alpha})+\frac{f(p^{\alpha+1})}{p^s}+\ldots}{1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}. \tag{9}$$

Выразим теперь M через $f(n)$. Согласно (6)

$$M=\prod_{q}\left(1+\frac{1+f(q)}{q^s}+\frac{1+f(q)+f(q^2)}{q^{2s}}+\cdots\right)=$$

$$=\zeta(s)\cdot\prod_{q}\left(1+\frac{f(q)}{q^s}+\frac{f(q^2)}{q^{2s}}+\ldots\right),$$

где q пробегает все простые числа.

Отсюда и из (9) следует

$$A(n)=\zeta(s)\cdot\prod_{q}\left(1+\frac{f(q)}{q^s}+\frac{f(q^2)}{q^{2s}}+\ldots\right)\times$$

$$\times\prod_{\frac{p}{n}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\frac{f(p^{\alpha})+\frac{f(p^{\alpha+1})}{p^s}+\ldots}{1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots}.$$

Но в силу мультипликативности $f(n)$

$$\prod_{q}\left(1+\frac{f(q)}{q^{s}}+\frac{f(q^{2})}{q^{2s}}+\dots\right)\cdot\prod_{\frac{p}{n}}\frac{f(p^{\alpha})+\frac{f(p^{\alpha+1})}{p^{s}}+\dots}{1+\frac{f(p)}{p^{s}}+\frac{f(p^{2})}{p^{2s}}+\dots}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(nk)}{k^{s}} \tag{10}$$

и, следовательно,

$$A(n)=\zeta(s)\frac{\varphi_{s}(n)}{n^{s}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(nk)}{k^{s}}. \tag{11}$$

Перейдем теперь к рассмотрению класса Б логарифмов мультипликативных функций, удовлетворяющих, очевидно, условию $F(n_1 n_2)=F(n_1)+F(n_2)$ для взаимно простых n_1 и n_2.

Докажем, что $A(n)=0$, если $n>1$ и неравно степени простого числа.

Полагая, как и ранее, $F(n)=\sum\limits_{\frac{d}{n}}f(d)$, а $n=n_1\ n_2$, где n_1 и n_2 взаимно просты и >1, будем иметь

$$f(n_1\ n_2)=\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(d)=\sum_{\frac{d_1}{n_1}}^{\frac{d_2}{n_2}}\mu\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\mu\left(\frac{n_2}{d_2}\right)[F(d_1)+F(d_2)]=$$

$$=\sum_{\frac{d_1}{n_1}}\mu\left(\frac{n_1}{d_1}\right)F(d_1)\sum_{\frac{d_2}{n_2}}\mu\left(\frac{n_2}{d_2}\right)+\sum_{\frac{d_2}{n_2}}\mu\left(\frac{n_2}{d_2}\right)F(d_2)\sum_{\frac{d_1}{n_1}}\mu\left(\frac{n_1}{d_1}\right)=0$$

в силу известного свойства $\mu(n)$.

Согласно (5)

$$A(n)=\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(dk)}{k^{s}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{s}}\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(dk). \tag{12}$$

Если k и n взаимно просты, то последняя сумма равна

$$F(k)\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(d)=f(n)=0$$

по доказанному выше.

Если же k и $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ имеют общий наибольший делитель $p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}$, то в силу свойств $\mu(n)$ можно ограничиться при суммировании в (12) значениями $d=p_1^{\alpha_1-1}\dots p_r^{\alpha_r-1}\cdot d'$, где d' пробегает все делители $p_1\dots p_r=n'$. Тогда, обозначив $\frac{n'}{p_j}=n_j$, имеем

$$\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)F(dk)=\sum_{\frac{d'}{n'}}\mu\left(\frac{n'}{d'}\right)F(p_1^{\alpha_1+\beta_1-1}\dots p_r^{\alpha_r+\beta_r-1}d')=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\mu(p_j)F(p_j^{\alpha_j+\beta_j-1})\sum_{\frac{d_j}{n_j}}\mu\left(\frac{n_j}{d_j}\right)+\sum_{j=1}^{r}F(p_j^{\alpha_j+\beta_j})\sum_{\frac{d_j}{n_j}}\mu\left(\frac{n_j}{d_j}\right)=0,$$

что и доказывает наше утверждение для $A(n)$.

При $n = p^\alpha$ имеем

$$A(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{\frac{d}{p^\alpha}} \mu\left(\frac{p^\alpha}{d}\right) F(dk) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(p^\alpha k) - F(p^{\alpha-1} k)}{k^s}.$$

Очевидно также, что $A(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{k^s}$.

Не выписывая всех тождеств, которые легко получаются из основного тождества (3) в предположении, что функции $F(n)$, $G(n)$ или одна из них взяты из классов А либо Б, мы отметим некоторые тождества как примеры приложения рассматриваемого метода.

Для случая, когда $F(n)$ и $G(n)$ мультипликативные функции, имеем согласно (3) и (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)\, G(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_s(n)}{n^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(nk)}{k^s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(nl)}{l^s}, \tag{13}$$

где $F(n) = \sum_{\frac{d}{n}} f(d)$ и $G(n) = \sum_{\frac{d}{n}} g(d)$.

Рассмотрим частные случаи этого тождества.

1) Положим $f(n) = \varphi_u(n)$; $g(n) = \varphi_v(n)$. Тогда $F(n) = n^u$ и $G(n) = n^v$. Согласно (10) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(nk)}{k^s} = \prod_q \left(1 + \frac{\varphi_u(q)}{q^s} + \frac{\varphi_u(q^2)}{q^{2s}} + \ldots\right) \times$$

$$\times \prod_{\frac{p}{n}} \frac{\varphi_u(p^\alpha) + \frac{\varphi_u(p^{\alpha+1})}{p^s} + \ldots}{1 + \frac{\varphi_u(p)}{p^s} + \frac{\varphi_u(p^2)}{p^{2s}} + \ldots} =$$

$$= \frac{\zeta(s-u)}{\zeta(s)} n^u \prod_{\frac{p}{n}} \left(1 - \frac{1}{p^u}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{\zeta(s-u)}{\zeta(s)} \frac{\varphi_u(n)}{\varphi_s(n)} \cdot n^s.$$

Аналогично получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{g(nl)}{l^s} = \frac{\zeta(s-v)}{\zeta(s)} \frac{\varphi_v(n)}{\varphi_s(n)} n^s,$$

что после подстановки в (13) дает тождество, полученное Н. П. Романовым в [1] (стр. 33),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_v(n)\, \varphi_u(n)}{\varphi_s(n)} = \frac{\zeta(s)\, \zeta(s-u-v)}{\zeta(s-u)\, \zeta(s-v)}.$$

2) Положим $f(n) = n^a$, $g(n) = n^b$. Тогда $F(n) = \sigma_a$; $G(n) = \sigma_b$, где $\sigma_\alpha = \sum_{\frac{d}{n}} d^\alpha$, и подстановка в (13) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\, \sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\, \zeta(s-a)\, \zeta(s-b)\, \zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}. \tag{14}$$

Это тождество дано без доказательства Рамануджаном в [3] и доказано Вильсоном в [4].

Частный случай этого тождества можно найти у Ингама [5] (стр. 116) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{\gamma i}(n)|^2}{n^s}=\frac{\zeta^2(s)\zeta(s+\gamma i)\zeta(s-\gamma i)}{\zeta(2s)}\qquad (s>1).$$

3) Пусть $f(n)$ — произвольная, вполне мультипликативная функция, т. е. $f(n_1 n_2)=f(n_1)f(n_2)$ при любых целых n_1 и n_2, и пусть $g(n)=\frac{1}{f(n)}$. Обозначим $G(n)=\sum_{\frac{d}{n}}\frac{1}{f(d)}$ через $F_{-1}(n)$.

Тогда тождество (13) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)F_{-1}(n)}{n^s}=\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(k)}{k^s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f(k)k^s}.$$

4) Пусть $F(n)=\frac{\lambda(n)}{n^s}$, где $\lambda(n)$ функция Лиувилля, определяемая условием $\lambda(n)=(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}$ при $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$, а $G(n)=\ln n$. Тогда

$$A(n)=\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(dk)}{k^s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(k)}{k^s}\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\lambda(d)=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\lambda(n)2^r;$$

$$B(n)=\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(dk)}{k^s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^s}\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\sum_{\frac{d}{n}}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\ln d.$$

Отсюда следует, что при $n>1$ $B(n)=\zeta(s)\Lambda(n)$, где $\Lambda(n)$ — известная функция Мангольдта, а $B(1)=-\zeta'(s)$.

Подставляя найденные значения $A(n)$ и $B(n)$ в тождество (3), после элементарных преобразований получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\Lambda(n)\cdot 2^r}{\varphi_s(n)}=2\frac{\zeta'(s)\zeta(2s)-\zeta(s)\zeta'(2s)}{\zeta(s)\cdot\zeta(2s)};$$

здесь r есть число различных простых делителей n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Романов, Пространство Гильберта и теория чисел, Известия АН СССР, серия мат., т. 10 (1946), 3—34.
2. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд. 5, ГТТИ, М.—Л., 1949.
3. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers, Messenger of Math., 46 (1915), 81—84.
4. B. M. Wilson, Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London. Math. Soc., vol. 21 (1922), 235—255.
5. А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, Гостехиздат, М.—Л., 1926.

Получена 23 марта 1953 г.

Одесса.