Условие гиперболичности одного класса римановых поверхностей

Д. Б. Потягайло

1. Пусть функция $f(z)$ производит квазиконформное отображение круга $|z|<R\leqslant\infty$ на данную открытую односвязную риманову поверхность F. Если $F^*\subset F$ двусвязная часть F, соответствующая кольцу $r_0<|z|<R$, то, как известно из работы Л. И. Волковыского, имеет место следующая оценка для модуля F^*:

$$2\pi\int\limits_{r_0}^{R}\frac{d\ln r}{\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\sin\gamma}\frac{ds}{d\lambda}dt}\leqslant\ln\mu(F^*)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{r_0}^{R}\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\lambda}{ds}d\ln r, \tag{1}$$

где γ — угол между линиями Γ_r и P_t на F, соответствующими окружностям $|z|=r$, $0<r<1$, и отрезкам $\arg z=t$, $0<t<2\pi$, в круге $|z|<r$, а $d\lambda$ и ds — сопряженные полудиаметры бесконечно малого эллипса на F, совпадающие по направлению с кривыми P_t и Γ_r. Предположим теперь, что мы имеем некоторую риманову поверхность Φ^* с заданным на ней распределением характеристик p и θ. Осуществляя (p, θ) квазиконформное отображение Φ на F так, чтобы бесконечно малый эллипс переходил в бесконечно малый кружок, можно получить для модуля двусвязной части $\Phi^*\subset\Phi$ оценку, аналогичную предыдущей. А именно, исходя из неравенства

$$\frac{d\lambda_1}{\sin\gamma_1 ds_1}=\frac{\pi\, d\lambda_1^2}{\pi\, ds_1\, d\lambda_1\sin\gamma_1}\leqslant\frac{\pi\, d\lambda^2|f'|^2}{\pi\, ds\, d\lambda\sin\gamma\frac{|f'|^2}{p}}=\frac{p\, d\lambda}{\sin\gamma\, ds},$$

где $d\lambda_1$, ds_1 и γ_1 — соответственно полудиаметры бесконечно малого эллипса и угол между ними на поверхности Φ, получаем:

$$2\pi\int\limits_{r_0}^{R}\frac{d\ln r}{\int\limits_0^{2\pi}\frac{p}{\sin\gamma}\frac{ds}{d\lambda}dt}\leqslant\ln\mu(\Phi^*)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_{r_0}^{R}\frac{p}{\sin\gamma}\frac{d\lambda}{ds}d\ln r. \tag{2}$$

* Здесь, как и в дальнейшем, мы рассматриваем только открытые односвязные поверхности.

Из последней оценки непосредственно вытекают достаточные условия для гиперболического или параболического типа поверхности Φ. В частности, для гиперболичности Φ достаточна сходимость интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} dt \int_{r_0}^{R} \frac{p}{\sin\gamma}\frac{d\lambda}{ds}\, d\ln r$$

или, что то же самое, интеграла

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{2\pi} dt \int_{P_t} p\frac{dt}{dn}\, d\lambda,$$

где dn обозначает элемент нормали, а $d\lambda$ — элемент дуги на кривой P_t.

2. Оценка (1) позволяет установить признак для гиперболического типа склеивания полуплоскости $I(z) \geqslant 0$ с некоторой функцией склеивания. Как известно [1], для этого достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f'(t_0)f'(t_1)\ldots f'(t_{k-1})},$$

где $f(t)$— соответствующая функция склеивания для полосы s, к которой переходим с помощью преобразования $w = \ln z$. В качестве линий P_t $(0 < t < 1)$ при этом берется бесконечная последовательность вертикальных сечений P_{tk} полосы s, проведенных из точек t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Значения t_1, t_2, ... определяются из соотношения

$$t_{i+1} = f(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

а t_0 — некоторая линейная функция от t.

Аналогично из (2) получается следующий признак гиперболического типа склеивания для полуплоскости $I(z) \geqslant 0$ с заданным на ней распределением характеристик $p(z)$, $\theta(z)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{f'(t_0)f'(t_1)\ldots f'(t_{k-1})} < \infty, \tag{3}$$

где

$$L_k = \int_{P_{tk}} p\, d\lambda,$$

а $f(t)$ и t_0, t_1, ... — величины, определенные выше.

3. Рассмотрим теперь класс В * римановых поверхностей, получаемых следующим образом. На плоскости w (лист H_0) из точек $w_k = v_k i$ $w_k' = -v_k' i$, $0 \leqslant k < \infty$, расположенных на мнимой оси, проводим разрезы, параллельные действительной оси, в сторону $-\infty$. К каждому такому разрезу подклеивается экземпляр плоскости w (листы H_k и H_k'), на котором предварительно проводится один разрез, расположенный над лучом, идущим из w_k или w_k'. После указанного склеивания получаем риманову поверхность F, имеющую над w_k и w_k' алгебраические точки ветвления первого порядка и в бесконечности точку ветвления бесконечного порядка.

Совокупность поверхностей F, соответствующих всевозможным значениям v_k и v_k', образует класс В *.

Представляется интересным следующий вопрос: в какой мере характер структуры поверхности класса В * влияет на ее тип? Установлено, что в случае полной симметрии[1], т. е. при $\overline{w}_k = w_k'$, и при некоторых дополнительных ограничениях относительно роста

$$|w'_{k+1} - w_k'|$$

поверхность F является поверхностью параболического типа. Однако при известном нарушении симметрии это свойство для поверхности класса В * уже не сохраняется. Так, например, в случае сильной асимметрии, когда $w_k' = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, а $w_k = ki$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, поверхность F превращается в поверхность гиперболического типа (см. ниже). Спрашивается, не сохраняется ли гиперболический тип и в том случае, когда попрежнему $w_k = ki$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а величины $|w_k'|$ возрастают достаточно быстро. Оказывается, что это действительно так, а именно, имеет место следующая теорема.

Если для поверхности F из класса В * $w_k = ki$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *а последовательность* $\{|w'_k|\}$ *возрастает не медленнее, чем геометрическая прогрессия, т. е.*

$$\frac{|w'_{k+1}|}{|w_k'|} \geqslant q^k, \quad q > 1,$$

то F — гиперболического типа.

Не ограничивая общности доказательства, предположим, что

$$w_k = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad |w'_{k+1} - w_k'| > 2\pi.$$

Отобразим указанную поверхность квазиконформно на плоскость с разрезом с некоторой функцией склеивания, которую определим ниже.

Проведем для этого на листе H_0 поверхности F через точки $x = 0$, $y = \frac{2k+1}{2}\pi$, $1 \leqslant k < \infty$, прямые a_k, идущие параллельно оси x.

Часть F, расположенную над верхней полуплоскостью при помощи разрезов на листе H_0 вдоль a_k, рассекаем на области G_k, $1 \leqslant k < \infty$, где каждая из областей G_k состоит из двух симметричных областей E_k^1 и E_k^2, склеенных вдоль бесконечного прямолинейного разреза b_k (рис. 1). С помощью преобразования

$$z^{-1}(w) = (e^w + w)^{-1}$$

отобразим каждую область G_k на полосу S_k, $1 \leqslant k < \infty$ ширины 2π. Отображающая функция, как нетрудно видеть, при достаточно больших значениях $|x|$ справа ведет себя, как $\ln x$, слева, как x. Склеивая тождественно полосу S_k с полосой S_{k+1} вдоль края, расположенного над прямой a_k, мы получим отображение рассматриваемой части F на верхнюю полуплоскость. Остальную часть поверхности отобразим на нижнюю полуплоскость с бесконечным числом

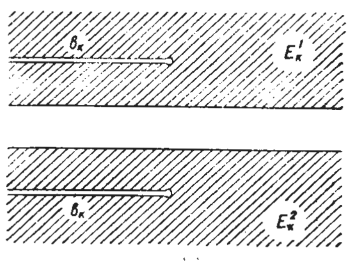

Рис. 1.

[1] Симметрии с точностью до Q — квазиконформного отображения.

непересекающихся областей квазиконформности, соответствующих листам H_k', $1 \leqslant k < \infty$. Построить указанное отображение можно следующим способом. Поставим в соответствие каждой точке w_k' бесконечную горизонтальную полосу B_k на листе H_0 ширины 2π. При помощи конформного отображения, указанного выше, преобразуем сначала каждую полосу B_k с приклеенным к ней листом H_k' в полосу S_k' ширины 2π, затем полученную полосу отождествляем с нижней полуплоскостью: справа — после предварительного растяжения с характеристикой $p(w)$, растущей как u, где $w = u + iv$, слева — после некоторой ограниченной квазиконформной деформации. Склеивая обе полуплоскости по отрицательной действительной полуоси, получаем окончательно искомую плоскость с разрезом и функцией склеивания, которая асимптотически ведет себя как e^x.

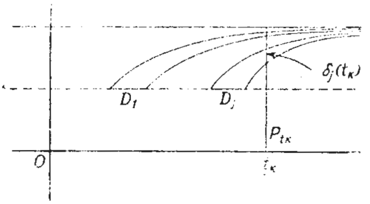

Рис. 2.

Переходя затем к полосе, воспользуемся критерием (3). Стоящая там под знаком характеристика в нашем случае имеет разрыв первого рода вдоль каждой линии, в которую переходит граница правой полуполосы B_k, $1 \leqslant k < \infty$, а всюду вне областей D_k, соответствующих S_k', $k = 1, 2, \ldots$, она непрерывна и не превосходит некоторой константы μ (рис. 2). Поэтому

$$L_k = \int_{p_{t_k}} p\, d\lambda \leqslant \mu + \sum_{j=1}^{m_k} p_j(t_k)\, \delta_j(t_k),$$

где $\delta_j(t_k)$ — длина части сечения p_{t_k}, расположенной в D_j, а $p_j(t_k) = \max p(\zeta)$ — на этом же участке кривой p_t.

Подставим последнее неравенство в (3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{f'(t_0) f'(t_1) \ldots f'(t_{k-1})} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \sum_{j=1}^{m_k} p_j(t_k)\, \delta_j(t_k)}{f'(t_0) f'(t_1) \ldots f'(t_{k-1})}.$$

Легко доказать, что произведение $p_j(t_k)\,\delta_j(t_k)$ равномерно ограничено для всех t_k. Действительно, переходя вновь к плоскости w, замечаем, что

$$[\delta_j(t_k)]_w \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{|w_j'| + \pi}{u}.$$

Следовательно, при достаточно больших u величина $[\delta_j(t_k)]_w$ убывает, как $\frac{1}{u}$, а произведение $[p_j(t_k)\,\delta_j(t_k)]_w$ остается равномерно ограниченным для всех u.

Отсюда следует, что

$$p_j(t_k)\,\delta_j(t_k) < O(1)$$

равномерно относительно t_k.

Полагая теперь $|w_m'| = a^m$, $a \geqslant q > 1$, получаем для m_k следующую оценку:

$$m_k \leqslant \frac{t_k}{\ln a}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu + \sum\limits_{j=1}^{m_k} p_j(t_k)\,\delta_j(t_k)}{f'(t_0)\ldots f'(t_{k-1})} < \left[\mu + \frac{O(1)}{\ln a}\right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f'(t_0)\ldots f'(t_{k-1})}. \tag{4}$$

Последний ряд быстро сходится, так как $f(t)$ растет как e^t. Из неравенства (4) следует сходимость ряда (3), а следовательно, и гиперболический тип рассматриваемой поверхности $F \subset B^*$.

ЛИТЕРАТУРА

Волковыский Л. И., Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, Труды Математ. ин-та им. Стеклова, т. XXXIV, 1950.

Получена 25 марта 1952 г.
Львов.