DOI: 10.3842/umzh.v76i2.7763

УДК 517.5

Сергій Вакарчук[1] (Університет імені Альфреда Нобеля, Дніпро),
Михайло Вакарчук (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)

НАБЛИЖЕННЯ В СЕРЕДНЬОМУ СУМАМИ ФУР'Є – БЕССЕЛЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ $L_2[(0,1);x]$ ТА ОЦІНКИ ЗНАЧЕНЬ ЇХ n-ПОПЕРЕЧНИКІВ

In the space $L_2[(0,1);x]$, by using a system of functions $\left\{\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\nu\geq 0$, orthonormal with weight x and formed by the Bessel function of the first kind of index ν and its positive roots, we construct the generalized finite differences of the mth order $\Delta^m_{\gamma(h)}(f)$, $m\in\mathbb{N}$, $h\in(0,1)$, and the generalized characteristics of smoothness $\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)=(1/t)\displaystyle\int_0^t\|\Delta^m_{\gamma(\tau)}(f)\|d\tau$. For the classes $\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m,\Psi)$ defined by using the differential operator D^r_ν, the function $\Phi^{(\gamma)}_m(f)$, and the majorant Ψ, we establish estimates from the lower and upper of the values of a series of n-widths. A condition for Ψ, which allows us to compute the exact values of n-widths is established. To illustrate our exact results, we present several specific examples. We also consider the problems of absolute and uniform convergence of Fourier – Bessel series on the interval $(0,1)$.

У просторі $L_2[(0,1);x]$ завдяки ортонормованій з вагою x системі функцій $\left\{\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\nu\geq 0$, яка утворена з функції Бесселя першого роду індексу ν та з її додатних коренів, побудовано узагальнені скінченні різниці m-го порядку $\Delta^m_{\gamma(h)}(f)$, $m\in\mathbb{N}$, $h\in(0,1)$, й узагальнені характеристики гладкості $\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)=(1/t)\displaystyle\int_0^t\|\Delta^m_{\gamma(\tau)}(f)\|d\tau$. Для класів $\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m,\Psi)$, означених за допомогою диференціального оператора D^r_ν, функції $\Phi^{(\gamma)}_m(f)$ та мажоранти Ψ, отримано оцінки знизу та зверху значень низки n-поперечників. Знайдено умову на Ψ, яка дозволяє обчислювати точні значення n-поперечників. Для ілюстрації точних результатів наведено кілька конкретних прикладів. Також розглянуто питання щодо абсолютної та рівномірної збіжності рядів Фур'є – Бесселя на інтервалі $(0,1)$.

1. Вступ. ***1.1.*** Існує не так багато методів отримання розв'язків задач математичної фізики в явному вигляді. Серед них важливе місце належить методу Фур'є, який базується на теоремах про розклади за різними ортогональними системами функцій. Проаналізувавши зазначені системи, можна дійти висновку, що серед них практично не зустрічаються ортогональні розклади, які не є розкладами за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля або не є аналогами таких розкладів.

Нагадаємо, що майже всі спеціальні функції (в тому числі і циліндричні), які мають застосування в математичній фізиці, виникають у зв'язку з вивченням власних функцій задачі Штурма – Ліувілля та її аналогів.

Розглянемо у цьому зв'язку множину $L_2[(0,1);x]$ функцій $f\colon(0,1)\to\mathbb{R}$, для кожної з яких функція $\sqrt{x}f(x)$ є сумовною з квадратом на інтервалі $(0,1)$. Ця множина є лінійною. Після введення скалярного добутку $(f,g)=\displaystyle\int_0^1 xf(x)g(x)dx$, де $f,g\in L_2[(0,1);x]$, і норми $\|f\|:=\|f\|_{L_2[(0,1);x]}=\sqrt{(f,g)}$ ця множина перетворюється в гільбертів простір. Очевидно, що $\|f\|=\|\sqrt{x}f(x)\|_{L_2[(0,1)]}$. Далі будемо використовувати також звичайний простір $L_2[(0,1)]$.

Нагадаємо, що вираз

[1] Відповідальний за листування, e-mail: sbvakarchuk@gmail.com.

$$J_\nu(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}, \tag{1.1}$$

де $\nu \geq 0$, а Γ — гамма-функція, є функцію Бесселя першого роду з невід'ємним індексом ν. Ряд у правій частині (1.1) є збіжним при будь-яких значеннях $x \in \mathbb{R}$, а корені рівняння

$$J_\nu(x) = 0 \tag{1.2}$$

є дійсними та простими, окрім, можливо, значення 0. Вони розташовані симетрично щодо точки 0 і не мають скінченних граничних точок. Додатні корені рівняння (1.2) можна пронумерувати, розташувавши їх у порядку зростання, тобто $0 < \mu_{1,\nu} < \mu_{2,\nu} < \ldots < \mu_{n,\nu} < \ldots$, оскільки, як відомо [1, гл. V, § 23, пункти 1, 4], їх множина є зліченною. З асимптотичного виразу функції Бесселя (1.1), а саме

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-3/2}), \quad x \to +\infty,$$

випливає наближена формула для коренів рівняння (1.2): $\mu_{k,\nu} \approx \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\nu + k\pi$.

1.2. Нехай $\nu \geq 0$. Розглянемо оператор

$$\mathcal{L}_\nu u(x) := -(xu'(x))' + \frac{\nu^2}{x}u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1.3}$$

областю визначення якого є множина двічі неперервно диференційовних на інтервалі $(0,1)$ функцій $u(x)$, для яких

$$u(x) = O(x^\rho) \quad \text{при} \quad x \to 0+ \quad \text{і} \quad u(1) = 0, \tag{1.4}$$

де $\rho := \min(\nu, 1)$. При цьому виконується умова $x^{-1/2}\mathcal{L}_\nu u(x) \in L_2[(0,1)]$.

Для крайової задачі на власні значення

$$\mathcal{L}_\nu u(x) = \lambda\, x\, u(x), \quad 0 < x < 1,$$

при виконанні граничних умов (1.4) кожне власне значення $\lambda_{k,\nu}$ дорівнює $\mu^2_{k,\nu}$. Нагадаємо, що $\{\mu_{k,\nu}\}_{k\in\mathbb{N}}$ є зліченною множиною додатних коренів рівняння (1.2), розташованих у порядку зростання їх величин. Таким чином, маємо $0 < \lambda_{1,\nu} < \lambda_{2,\nu} < \ldots < \lambda_{n,\nu} < \ldots$.

Елементи послідовності $\{J_\nu(\mu_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, утворені за допомогою функції Бесселя (1.1), є власними функціями зазначеної вище крайової задачі й утворюють ортогональну систему у просторі $L_2[(0,1);x]$, тобто

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\mu_{k,\nu}x)J_\nu(\mu_{n,\nu}x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad k \neq n, \\ \dfrac{1}{2}(J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu}))^2, & \text{якщо} \quad k = n, \end{cases}$$

яка є повною (див., наприклад, [1, гл. V, § 23, пункти 5, 7]). Очевидно, що тоді система функцій

$$\Big\{\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\Big\}_{k\in\mathbb{N}}, \tag{1.5}$$

де $\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x) := J_\nu(\mu_{k,\nu}x)/\|J_\nu(\mu_{k,\nu}(x)\|$, буде ортонормованою та повною у просторі $L_2[(0,1);x]$ (див., наприклад, [2, гл. 4, § 1, теорема 5]).

Використовуючи вказані факти, розглянемо низку питань, пов'язаних з розв'язанням екстремальних задач оптимізаційного змісту в гільбертовому просторі $L_2[(0,1);x]$.

2. Найкраще наближення функцій у просторі $L_2[(0,1);x]$ та побудова характеристики гладкості його елементів. ***2.1.*** Довільній функції $f \in L_2[(0,1);x]$ поставимо у відповідність її ряд Фур'є – Бесселя за ортонормованою системою (1.5)

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x), \tag{2.1}$$

де

$$\widehat{c}_{k,\nu}(f) := \int\limits_0^1 xf(x)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)dx, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

— коефіцієнти Фур'є – Бесселя функції f. Запишемо частинну суму перших n членів ряду (2.1), тобто

$$S_n(f,x) := \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x).$$

З повноти ортонормованої системи (1.5) у просторі $L_2[(0,1);x]$ випливає, що для довільної функції f з цього простору її ряд Фур'є – Бесселя (2.1) збігається до неї в середньому, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\| = 0 \tag{2.3}$$

і виконується рівність Парсеваля (див., наприклад, [3, гл. 1, § 4, пункт A])

$$\|f\| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{c}^{\,2}_{k,\nu}(f).$$

Нехай

$$\mathcal{T}_{n,\nu} := \left\{ q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x) : a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \nu \geq 0,$$

— підпростір „поліномів" розмірності n, побудований за допомогою перших n функцій системи (1.5). Для довільної функції $f \in L_2[(0,1);x]$ символом $E_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо її найкраще наближення елементами підпростору $\mathcal{T}_{n,\nu}$ в $L_2[(0,1);x]$, тобто

$$E_n(f) := \inf\{\|f - q_n\| : q_n \in \mathcal{T}_{n,\nu}\}.$$

Згідно з теоремою Теплера [2, гл. 4, § 1] маємо

$$E_n(f) = \|f - S_n(f)\| = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}\,(k\geq n+1)} \widehat{c}^{\,2}_{k,\nu}(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

Наближення фіксованої множини $\mathfrak{M} \subset L_2[(0,1);x]$ підпростором $\mathcal{T}_{n,\nu}$ дорівнює

$$E_n(\mathfrak{M}) := \sup\{E_n(f) : f \in \mathfrak{M}\}$$

і характеризує відхилення $\mathfrak{M}$ від $\mathcal{T}_{n,\nu}$ у метриці простору $L_2[(0,1);x]$.

Нагадаємо означення поперечників, які будемо використовувати далі. Нехай $\mathfrak{M}$ — опукла центрально-симетрична множина функцій у просторі $L_2[(0,1);x]$; $\mathbb{B}$ — одинична куля в цьому просторі; $\mathcal{L}_n \subset L_2[(0,1);x]$ — n-вимірний підпростір; $\mathcal{L}^n \subset L_2[(0,1);x]$ — підпростір ковимірності n; $V : L_2[(0,1);x] \to \mathcal{L}_n$ — неперервний лінійний оператор; $V^{\perp} : L_2[(0,1);x] \to \mathcal{L}_n$ — неперервний оператор лінійного проєктування; $\{v_j\}_{j=1}^n$ — ортонормована система функцій у просторі $L_2[(0,1);x]$. Тоді величини

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2[(0,1);x]\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f-g\| : g \in \mathcal{L}_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}_n \subset L_2[(0,1);x]\},$$

$$\begin{aligned}&\delta_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \\ &\quad= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - V(f)\| : f \in \mathfrak{M}\} : VL_2[(0,1);x] \subset \mathcal{L}_n\} : \mathcal{L}_n \subset L_2[(0,1);x]\},\end{aligned}$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) = \inf\{\sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n\} : \mathcal{L}^n \subset L_2[(0,1);x]\},$$

$$\begin{aligned}&\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \\ &\quad= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - V^{\perp}(f)\| : f \in \mathfrak{M}\} : V^{\perp}L_2[(0,1);x] \subset \mathcal{L}_n\} : \mathcal{L}_n \subset L_2[(0,1);x]\},\end{aligned}$$

$$\varphi_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) = \inf\left\{\sup\left\{\left\|f - \sum_{j=1}^{n}(f, v_j)_{\gamma} v_j\right\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \{v_j\}_{j=1}^n \subset L_2[(0,1);x]\right\}$$

є відповідно бернштейнівським, колмогоровським, лінійним, гельфандівським, проєкційним n-поперечниками множини $\mathfrak{M}$ у просторі $L_2[(0,1);x]$, а величина φ_n — n-ортопоперечником (або n-поперечником Фур'є) для $\mathfrak{M}$ в $L_2[(0,1);x]$ (див., наприклад, [4]). Оскільки $L_2[(0,1);x]$ з введеним у ньому скалярним добутком є гільбертовим простором, то перераховані екстремальні характеристики множини $\mathfrak{M} \subset L_2[(0,1);x]$ пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}b_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) &\le d^n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \\ &= \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \\ &= \varphi_n(\mathfrak{M}, L_2[(0,1);x]) \le E_n(\mathfrak{M}). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

2.2. Важливого змісту в наших подальших дослідженнях набуває формування характеристик гладкості функцій у просторі $L_2[(0,1);x]$, за допомогою яких можна отримати нерівності типу Джексона, а також побудувати низку класів, заснованих на використанні цих характеристик, та обчислити значення (бажано точні) різних n-поперечників таких класів.

Відомою характеристикою структурних властивостей функції є величина, яку називають модулем неперервності. Нагадаємо, що у 1911 році Д. Джексон вперше оцінив найкраще рівномірне наближення неперервної 2π-періодичної функції тригонометричними поліномами порядку не вищого n–1 через її модуль неперервності. Пізніше, у 1951 році, С. Б. Стечкін отримав нерівність вказаного типу, але вже для модуля неперервності m-го порядку, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$. У подальшому зусиллями багатьох математиків нерівності типу Джексона було розповсюджено на простори $L_p([0,2\pi])$, $1 \le p < \infty$, вимірних 2π-періодичних функцій та на певні простори функцій багатьох змінних, що задані як на класичних многовидах типу тор, гіперболоїд, сфера тощо, так і на многовидах достатньо загальної природи.

Роботи Дж. Бомана і Х. С. Шапіро [5] та Дж. Бомана [6] заклали основи для побудови більш узагальнених характеристик гладкості функцій, за допомогою яких вдалося отримати низку змістовних результатів при розв'язанні деяких екстремальних задач конструктивної теорії функцій. Це знайшло відображення у монографіях З. Дітціана та В. Тотіка [7] і Б. Сендова та В. Попова [8], а також у роботах багатьох математиків (див., наприклад, [7 – 39]). Аналізуючи за допомогою вказаних робіт різні підходи до побудови узагальнених характеристик гладкості, можна виокремити декілька напрямів, пов'язаних, зокрема, як з формуванням таких характеристик, так і з розв'язанням за їх участі низки екстремальних задач теорії апроксимації та з отриманням прямих та обернених теорем конструктивної теорії функцій тощо.

Це, по-перше, використання в якості характеристики гладкості функції її усередненого локального модуля гладкості або так званого τ-модуля [8, 10, 11, 20, 27 (пункт 8)].

По-друге, використання скінченних різниць (або їх узагальнень) шляхом усереднення без обчислення точної верхньої грані їх норм по параметру (кроку h) при побудові узагальнених модулів неперервності. Так, у [9] в якості такої характеристики було застосовано норму інтегрального усереднення по $h > 0$ звичайної скінченної різниці r-го порядку, $r \in \mathbb{N}$. У подальшому в роботах [13, § 3] та [14] було запроваджено кілька видів характеристик гладкості, заснованих на певних видах усереднень норм скінченних різниць функцій. Зазначені підходи отримали розвиток у роботах [21, 25, 27, 28, 30 (пункт 8), 33, 34].

По-третє, побудова у 2π-періодичному випадку узагальнених модулів неперервності заснована на певному узагальненні норм скінченних різниць шляхом використання неперервних, невід'ємних, ненульових 2π-періодичних функцій φ, таких що $\varphi(0) = 0$ [18, 29 (пункт 2), 32, 37 (пункт 2), 38 (пункт 2.2), 39 (пункт 2.2)].

По-четверте, використання узагальнених модулів неперервності, які породжені певними скінченно-різницевими операторами зі сталими коефіцієнтами [15, 17, 33, 35, 36].

По-п'яте, застосування узагальнених модулів неперервності першого та вищих порядків, в яких замість звичайного оператора зсуву $F_h(f, x) = f(x + h)$ використовують оператор Стєклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \quad h > 0,$$

тобто $F_h(f) = S_h(f)$ [19, 22, 23, 27, 29 (пункт 2), 33, 39].

По-шосте, використання у вагових гільбертових просторах узагальнених модулів неперервності першого та вищих порядків, побудованих за допомогою операторів узагальненого зсуву, які містять під знаком інтеграла як досліджувану і вагову функції, так і певну функцію двох змінних з параметром $h \in (0, 1)$ [4, 16, 26, 31].

Наведений перелік, звісно, не претендує на повноту, але, виходячи з аналізу перерахованих підходів до побудови узагальнених характеристик гладкості, найбільш придатним та перспективним, на нашу думку, в досліджуваному в цій статті випадку є шостий підхід, а також певна його композиція з другим підходом. Тому далі зосередимося на зазначеному та зробимо певне змістовне узагальнення в конструкції оператора узагальненого зсуву, яке буде пов'язане з параметром h.

2.3. Нехай $L_2[(0, 1); x]$ і $L_2[(0, 1); y]$ — два гільбертових простори функцій, залежних від x та y відповідно, а $\left\{\widehat{J}_\nu(\mu_{j,\nu} x)\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ і $\left\{\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu} y)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ — дві ортонормовані та повні системи функцій з цих просторів (див. пункт 1).

Поклавши $Q := \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$, позначимо через $L_2[Q; xy]$ гільбертів простір функцій двох змінних $f : Q \to \mathbb{R}$, для кожної з яких функція $\sqrt{xy} f(x, y)$ є сумовною з квадратом на множині Q, а скалярний добуток і норма визначаються за формулами

$$(f, g) := \iint_Q xyf(x, y)g(x, y)dxdy, \quad f, g \in L_2[Q; xy], \quad \text{і} \quad \|f\|_2 := \|f\|_{L_2[Q;xy]} = \sqrt{(f, f)}.$$

Система функцій

$$\left\{\widehat{J}_\nu(\mu_{j,\nu}x)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}y)\right\}_{j,k\in\mathbb{N}} \tag{2.6}$$

буде ортонормованою та повною у просторі $L_2[Q; xy]$. Справді, щоб переконатися в цьому, достатньо скористатися лемою з [1, гл. I, § 1, пункт 9], вважаючи $\psi_k(y) := \widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}y)$, $k \in \mathbb{N}$, і $\psi^*_{jk}(x) := \widehat{J}_\nu(\mu_{j,\nu}x)$, $j, k \in \mathbb{N}$. Оскільки при кожному $k \in \mathbb{N}$ маємо одну й ту ж систему функцій $\{\psi^*_{jk}(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$, яка є ортонормованою та повною у просторі $L_2[(0, 1); x]$, то у відповідності з зазначеною вище лемою система функцій

$$\left\{\psi^*_{jk}(x)\psi_k(y)\right\}_{j,k\in\mathbb{N}} \tag{2.7}$$

буде ортонормованою та повною у просторі $L_2[Q; xy]$. Неважко переконатися в тому, що системи функцій (2.6) і (2.7) тотожні між собою.

Розглянемо на відрізку $[0, 1]$ довільну неперервну, монотонно зростаючу функцію $\gamma(h)$, таку що $\gamma(0) = 0$ і $\gamma(1) = 1$. Далі вважаємо, що h належить інтервалу $(0, 1)$ і є довільним фіксованим числом. Позначимо через $T_{\gamma(h)}(x, y)$ функцію з простору $L_2[Q; xy]$, яка при розкладі в подвійний ряд Фур'є – Бесселя за системою функцій (2.6) має такі коефіцієнти Фур'є – Бесселя:

$$c_{jk,\nu}(T_{\gamma(h)}) = \begin{cases} (1 - \gamma(h))^k, & \text{якщо} \quad j = k, \\ 0, & \text{якщо} \quad j \neq k, \end{cases}$$

де $j, k \in \mathbb{N}$, тобто для майже всіх $(x, y) \in Q$ маємо відповідність

$$T_{\gamma(h)}(x, y) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 - \gamma(h))^k \widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}y). \tag{2.8}$$

З повноти системи (2.6) в $L_2[Q; xy]$ випливає її замкненість і, згідно з рівністю Парсеваля, з (2.8) отримуємо

$$\|T_{\gamma(h)}\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 - \gamma(h))^{2k} = \frac{(1 - \gamma(h))^2}{\gamma(h)(2 - \gamma(h))} < \infty,$$

оскільки $\gamma(h) \in (0, 1)$ для будь-якого $h \in (0, 1)$.

Символом $F_{\gamma(h)}$ позначимо оператор узагальненого зсуву, який для довільної функції $f \in L_2[(0, 1); x]$ визначається формулою

$$F_{\gamma(h)}(f, x) := \int_0^1 tf(t)T_{\gamma(h)}(x, t)dt. \tag{2.9}$$

Покажемо, що при будь-якому фіксованому значенні $h \in (0,1)$ лінійний оператор $F_{\gamma(h)}$ є обмеженим. Для цього, використовуючи (2.9) і нерівність Буняковського – Шварца, для довільного $f \in L_2[(0,1);x]$ отримуємо

$$\|F_{\gamma(h)}(f)\| = \left\{ \int_0^1 x \left[\int_0^1 (\sqrt{t} f(t))(\sqrt{t} T_{\gamma(h)}(x,t))dt \right]^2 dx \right\}^{1/2} \leq \|T_{\gamma(h)}\|_2 \, \|f\|,$$

де, як зазначено раніше, $\|T_{\gamma(h)}\|_2 < \infty$. Отримана вище нерівність вказує на те, що норма оператора зсуву $F_{\gamma(h)}$ при будь-якому фіксованому значенні параметра $h \in (0,1)$ є обмеженою, тобто

$$\|F_{\gamma(h)}\| = \sup\{\|F_{\gamma(h)}(f)\| : f \in L_2[(0,1);x], \|f\| \leq 1\} = C_h < \infty,$$

де стала C_h залежить від h.

Нагадаємо коротко необхідну для подальшого викладу інформацію. Якщо послідовність функцій $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є збіжною в середньому квадратичному до функції $f \in L_2[(0,1)]$, тобто

$$\int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то зазначена послідовність є збіжною до f і за мірою, що позначається так: $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$. При цьому, у відповідності з однією теоремою Ф. Рісса (див., наприклад, [40, гл. II, § 3, теорема 3]), маємо *якщо* f *і* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *є вимірними та майже скрізь* (*м.с.*) *скінченними функціями на множині* X, $\operatorname{mes}(X) < \infty$, *і* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$, *то існує підпослідовність* $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *послідовності* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *яка є збіжною до функції* f *майже скрізь на* X, *тобто* $f_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$ *м.с. на* X.

Лема 1. *Нехай функція* $f \in L_2[(0,1);x]$ *має розклад в ряд Фур'є – Бесселя* (2.1) *за ортонормованою системою функцій* (1.5). *Тоді майже скрізь на* $(0,1)$ *правильним є співвідношення*

$$F_{\gamma(h)}(f,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (1-\gamma(h))^k \, \widehat{c}_{k,\nu}(f) \widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu} x), \tag{2.10}$$

де $h \in (0,1)$ — *довільне фіксоване число.*

Доведення. Розглянемо довільну функцію $f \in L_2[(0,1);x]$ і послідовність її частинних сум Фур'є – Бесселя $\{S_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Оскільки оператор зсуву

$$F_{\gamma(h)} : L_2[(0,1);x] \to L_2[(0,1);x]$$

є лінійним та обмеженим при будь-якому фіксованому значенні $h \in (0,1)$, то, використовуючи (2.3), маємо

$$\|F_{\gamma(h)}(f) - F_{\gamma(h)}(S_n(f))\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Цей результат випливає з нерівності

$$\|F_{\gamma(h)}(f - S_n(f))\| \leq \|F_{\gamma(h)}\| \|f - S_n(f)\|.$$

Для зручності позначень покладемо

$$\lambda_n(f,x) := \sqrt{x}\, F_{\gamma(h)}(S_n(f),x), \quad \mathcal{F}(f,x) := \sqrt{x}\, F_{\gamma(h)}(f,x). \tag{2.11}$$

Тоді наведений вище результат запишемо у вигляді

$$\|\mathcal{F}(f) - \lambda_n(f)\|_{L_2[(0,1)]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Враховуючи, що звідси маємо $\lambda_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathcal{F}(f)$, у відповідності з теоремою Ф. Рісса виділяємо підпослідовність $\{\lambda_{n_j}(f)\}_{j\in\mathbb{N}}$ послідовності $\{\lambda_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$, для якої

$$\lambda_{n_j}(f) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f) \ \text{ м.с. на } \ (0,1). \tag{2.12}$$

З урахуванням наведених позначень (2.11) для майже всіх $x \in (0,1)$ записуємо

$$\sqrt{x}\, F_{\gamma(h)}(f - S_{n_j}(f), x) = \mathcal{F}(f,x) - \lambda_{n_j}(f,x). \tag{2.13}$$

Для функції $T_{\gamma(h)}(x,y)$, яка має розклад у подвійний ряд Фур'є – Бесселя (2.8), покладаємо

$$S_n(T_{\gamma(h)}; x, y) := \sum_{k=1}^{n} (1-\gamma(h))^k \widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що

$$\|T_{\gamma(h)} - S_n(T_{\gamma(h)})\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.14}$$

Нехай

$$\widetilde{S}_{m,n_j}(T_{\gamma(h)}) := S_{n_{j+m}}(T_{\gamma(h)}), \quad j, m \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

$$l_m(S_{n_j}(f), x) := \sqrt{x} \int_0^1 t S_{n_j}(f,t)\, \widetilde{S}_{m,n_j}(T_{\gamma(h)}; x, t) dt. \tag{2.16}$$

Використовуючи формули (2.9), (2.11), (2.15), (2.16), нерівність Буняковського – Шварца і співвідношення $\|S_{n_j}(f)\| \le \|f\|$, отримуємо

$$\|\lambda_{n_j}(f) - l_m(S_{n_j}(f)\|_{L_2[(0,1)]}$$

$$= \left\{ \int_0^1 x \left[\int_0^1 \sqrt{t} S_{n_j}(f,t) \left(T_{\gamma(h)}(x,t) - \widetilde{S}_{m,n_j}(T_{\gamma(h)}; x, t) \right) \sqrt{t} dt \right]^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\le \|S_{n_j}(f)\| \|T_{\gamma(h)} - \widetilde{S}_{m,n_j}(T_{\gamma(h)})\|_2 \le \|f\| \|T_{\gamma(h)}(x,t) - \widetilde{S}_{m,n_j}(T_{\gamma(h)})\|_2. \tag{2.17}$$

З (2.14), (2.15) і (2.17) маємо

$$\|\lambda_{n_j}(f) - l_m(S_{n_j}(f))\|_{L_2[(0,1)]} \to 0, \quad m \to \infty,$$

а це означає, що $l_m(S_{n_j}(f)) \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} \lambda_{n_j}(f)$. Звідси, за теоремою Ф. Рісса, випливає існування підпослідовності $\{l_{m_\rho}(S_{n_j}(f))\}_{\rho\in\mathbb{N}}$ послідовності $\{l_m(S_{n_j}(f))\}_{m\in\mathbb{N}}$, для якої

$$l_{m_\rho}(S_{n_j}(f)) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_{n_j}(f) \quad \text{м.с. на } \ (0,1), \tag{2.18}$$

де, беручи до уваги (2.8), (2.15), (2.16), маємо

$$l_{m_\rho}(S_{n_j}(f),x)=\sqrt{x}\sum_{k=1}^{n_j}(1-\gamma(h))^k\,\widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x), \tag{2.19}$$

оскільки $n_{j+m_\rho}>n_j,\ \rho\in\mathbb{N}$, а система функцій $\{\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ є ортонормованою у просторі $L_2[(0,1);x]$. Очевидно, що права частина формули (2.19) не залежить від $m_\rho,\ \rho\in\mathbb{N}$. Тому з (2.18) отримуємо $\lambda_{n_j}(f,x)=l_{m_\rho}(S_{n_j}(f),x)$ майже для всіх $x\in(0,1)$. Враховуючи зазначене і (2.11), (2.19), записуємо співвідношення, яке також має місце для майже всіх $x\in(0,1)$:

$$\sqrt{x}F_{\gamma(h)}(f,x)=[\mathcal{F}(f,x)-\lambda_{n_j}(f,x)]+\sqrt{x}\sum_{k=1}^{n_j}(1-\gamma(h))^k\,\widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x),\quad j\in\mathbb{N}.$$

Обчислюючи границю правої частини цього співвідношення при $j\to\infty$ і використовуючи формулу (2.12) для виразу у квадратних дужках, майже скрізь на інтервалі $(0,1)$ одержуємо (2.10).

Лему 1 доведено.

За допомогою (2.1) і (2.10) для функції $f\in L_2[(0,1);x]$ розглянемо узагальнені скінченні різниці першого та другого порядків. Для майже всіх $x\in(0,1)$ запишемо відповідності

$$\Delta^1_{\gamma(h)}(f,x):=F_{\gamma(h)}(f,x)-f(x)\sim\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big[(1-\gamma(h))^k-1\Big]\,\widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x),$$

$$\Delta^2_{\gamma(h)}(f,x):=\Delta^1_{\gamma(h)}(\Delta^1_{\gamma(h)}(f),x)\sim\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big[(1-\gamma(h))^k-1\Big]^2\,\widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x).$$

Використовуючи метод математичної індукції, при $m=3,4,\ldots$ для майже всіх $x\in(0,1)$ отримуємо відповідність

$$\Delta^m_{\gamma(h)}(f,x):=\Delta^1_{\gamma(h)}(\Delta^{m-1}_{\gamma(h)}(f),x)\sim\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big[(1-\gamma(h))^k-1\Big]^m\,\widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x). \tag{2.20}$$

За допомогою рівності Парсеваля з (2.20) одержуємо

$$\|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|^2=\sum_{k\in\mathbb{N}}\Big[1-(1-\gamma(h))^k\Big]^{2m}\,\widehat{c}^{\,2}_{k,\nu}(f). \tag{2.21}$$

З (2.21) і зазначених вище властивостей функції γ випливає, що величина $\|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|$ є монотонно зростаючою функцією h, для якої

$$\lim\{\|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|: h\to 0+\}=0\quad \text{і}\quad \lim\{\|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|: h\to 1-\}=\|f\|.$$

У зв'язку із застосуванням у формулах (2.8) – (2.10), (2.20), (2.21) замість h функції $\gamma(h)$ нагадаємо, що раніше З. Дітціан та В. Тотік (див., наприклад, [7]) запропонували розглядати специфічні модулі неперервності $\omega^r_\varphi(f,t)_p,\ r\in\mathbb{N},\ 1\le p\le\infty$, при розв'язанні низки задач конструктивної теорії функцій у просторах $L_p[(a,b)]$. При формуванні зазначених характеристик гладкості використовувались специфічні скінченні різниці r-го порядку $\Delta^r_{h\varphi(x)}(f)$, сформовані за участі функцій φ, на які накладались певні умови, тобто для майже всіх x на (a,b)

$$\Delta^r_{h\varphi(x)}(f,x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}f\Big(x+\Big(\frac{r}{2}-k\Big)h\varphi(x)\Big),$$

де $\Delta^r_{h\varphi(x)}(f,x):=0$, якщо $x+rh\varphi(x)/2$ або $x-rh\varphi(x)/2$ не належать (a,b). Очевидно, що при $\varphi(x)\equiv 1$ отримуємо звичайну скінченну різницю r-го порядку $\Delta^r_h(f)$ з кроком h.

У якості узагальненої характеристики гладкості для функції $f\in L_2[(0,1);x]$ розглянемо величину

$$\widetilde{\Omega}^{(\gamma)}_m(f,t):=\sup\{\|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|: 0<h\le t\}, \tag{2.22}$$

де $t\in(0,1)$, $m\in\mathbb{N}$. Оскільки, за означенням, функція γ є монотонно зростаючою на інтервалі $(0,1)$, то з (2.21) та (2.22) маємо

$$\widetilde{\Omega}^{(\gamma)}_m(f,t)=\|\Delta^m_{\gamma(t)}(f)\|,\quad t\in(0,1). \tag{2.23}$$

Слід зазначити, що у частинному випадку, коли $\gamma(h)=\gamma_{1,1}(h):=h$, з (2.23) отримуємо характеристику гладкості $\Omega_m(f,t)$, яку вперше було запропоновано у [26], тобто $\Omega_m(f)=\widetilde{\Omega}^{(\gamma_{1,1})}_m(f)$. У подальшому цю величину було використано, зокрема, в роботах [4, 31].

На нашу думку, певною перевагою узагальненого модуля неперервності m-го порядку $\widetilde{\Omega}^{(\gamma)}_m(f)$ є відсутність у формулі (2.23) точної верхньої межі. Це значно розширює можливості для отримання точних значень низки апроксимаційних характеристик класів функцій, визначених за його участі.

2.4. У цій статті в якості характеристики гладкості функції $f\in L_2[(0,1);x]$ будемо розглядати усереднення норми її узагальненої скінченної різниці m-го порядку (2.20), тобто

$$\Phi^{(\gamma)}_m(f,t):=\frac{1}{t}\int_0^t\|\Delta^m_{\gamma(\tau)}(f)\|d\tau,\quad t\in(0,1],\quad m\in\mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Зазначимо, що у (2.24) вважаємо $\|\Delta^m_{\gamma(1)}(f)\|=\|f\|$. Згідно з (2.23) формула (2.24) фактично означає усереднення величини $\widetilde{\Omega}^{(\gamma)}_m(f)$. У проанонсованих у підпункті 2.2 роботах [21, 24, 27, 30, 33, 34] подібний ефект взагалі не спостерігається.

У випадку, коли $\gamma=\gamma_{1,1}$, будемо вважати, що $\Phi_m(f):=\Phi^{(\gamma_{1,1})}_m(f)$.

Розглянемо деякі властивості величини (2.24) вважаючи, що функції f,f_1,f_2 є довільними елементами простору $L_2[(0,1);x]$:

1) $\lim_{t\to 0+}\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)=0$,

2) *величина* $\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)$ *є неперервною та монотонно зростаючою на множині* $0<t\le 1$,

3) $\Phi^{(\gamma)}_m(f_1+f_2,t)\le\Phi^{(\gamma)}_m(f_1,t)+\Phi^{(\gamma)}_m(f_2,t)$,

4) $\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)\le\|f\|$.

Перш ніж сформулювати наступну властивість, розглянемо одне поняття. *Будемо вважати, що введена в підпункті* 2.3 *функція* γ *належить множині* $\mathfrak{N}$, *якщо для довільного значення* $n\in\mathbb{N}$ *і* $h\in(0,1/n)$ *виконується нерівність*

$$\gamma(nh)\le n^c\gamma(h), \tag{2.25}$$

де $c=c(\gamma)$ — *додатна константа, яка залежить лише від* γ.

Наведемо кілька прикладів таких функцій. Так, для $\gamma_{1,\eta}(h) := h^\eta$, $\eta \in (0,\infty)$, правильність співвідношення (2.25), в якому $c = \eta$, є очевидною. Зазначимо, що у випадку $\eta = 1$ маємо $\gamma_{1,1} = h$.

Нехай $\gamma_{2,\eta}(h) := \sin(\pi h^\eta/2)$, $\eta \in (0,\infty)$. Розглянемо допоміжну функцію

$$l(h) := n^\eta \gamma_{2,\eta}(h) - \gamma_{2,\eta}(nh)$$

і обчислимо її першу похідну на інтервалі $0 < h < 1/n$, тобто

$$l'(h) = \frac{1}{2}\pi\eta n^\eta h^{\eta-1}\left[\cos\left(\frac{\pi h^\eta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi n^\eta h^\eta}{2}\right)\right] > 0.$$

Оскільки $l(0) = 0$, то це означає, що $l(h) > 0$, якщо $h \in (0, 1/n)$, і нерівність (2.25), де $c = \eta$, виконується для $\gamma_{2,\eta}$ теж.

5) *Нехай функція γ належить множині $\mathfrak{N}$ і f є довільною функцією з простору $L_2[(0,1);x]$. Тоді для будь-якого $t \in (0,1/n)$ має місце нерівність*

$$\Phi_m^{(\gamma)}(f, nt) \le n^{cm}\Phi_m^{(\gamma)}(f,t). \tag{2.26}$$

6) *Для довільного $t \in (0,1]$ виконується нерівність*

$$\Phi_m^{(\gamma)}(f,t) \le \|\Delta_{\gamma(t)}^m(f)\|.$$

Зазначимо, що властивість 1 випливає з першого правила Лопіталя; властивість 2 — з формули (2.21) та невід'ємності першої похідної функції (2.24) завдяки монотонному зростанню по τ величини $\|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(f)\|$; властивість 3 — з лінійності оператора узагальненої скінченної різниці m-го порядку $\Delta_{\gamma(\tau)}^m$ та нерівності трикутника для норми; властивість 4 — з формули (2.21); властивість 6 — з монотонного зростання величини $\|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(f)\|$ по $\tau \in (0,t]$, $t \le 1$.

Доведемо властивість 5. Для цього нам знадобиться формула

$$1 - t^k = (1-t)(1 + t + \ldots + t^{k-1}),$$

де $k \in \mathbb{N}$, $t \in (0,1)$, з якої маємо

$$1 - (1-\gamma(t))^k = \gamma(t)\sum_{j=0}^{k-1}(1-\gamma(t))^j. \tag{2.27}$$

Використовуючи (2.27) і враховуючи, що функція $\gamma(t)$ є монотонно зростаючою на інтервалі $(0,1)$ і такою, що $0 < \gamma(t) < 1$, для $0 < \tau \le t < 1$ записуємо

$$\frac{1-(1-\gamma(t))^k}{1-(1-\gamma(\tau))^k} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(\tau)}\frac{\sum_{j=0}^{k-1}(1-\gamma(t))^j}{\sum_{j=0}^{k-1}(1-\gamma(\tau))^j} \le \frac{\gamma(t)}{\gamma(\tau)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Покладаючи в (2.28) $t = n\tau$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0,1/n)$, і використовуючи (2.25), одержуємо

$$\left[1-(1-\gamma(n\tau))^k\right]^{2m} \le \left\{\frac{\gamma(n\tau)}{\gamma(\tau)}\left[1-(1-\gamma(\tau))^k\right]\right\}^{2m} \le n^{2cm}\left[1-(1-\gamma(\tau))^k\right]^{2m}. \tag{2.29}$$

Із співвідношень (2.21) і (2.29) отримуємо нерівність

$$\|\Delta^m_{\gamma(n\tau)}(f)\| \le n^{cm}\|\Delta^m_{\gamma(\tau)}(f)\|, \quad \tau \in (0,1/n). \tag{2.30}$$

Для $t \in (0,1/n)$ з (2.24) маємо

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\Delta^m_{\gamma(n\tau)}(f)\|d\tau = \frac{1}{nt}\int\limits_0^{nt} \|\Delta^m_{\gamma(h)}(f)\|dh = \Phi^{(\gamma)}_m(f,nt). \tag{2.31}$$

Інтегруючи по τ обидві частини нерівності (2.30) в межах від 0 до t, $t \in (0,1/n)$, помножуючи обидві частини отриманого таким чином співвідношення на величину $1/t$ і використовуючи формули (2.24), (2.31), одержуємо нерівність (2.26). Властивість 5 доведено.

Покладаючи скрізь далі $\Phi^{(\gamma)}_m(f,0) := 0$, будемо розглядати вже неперервну на множині $0 \le t \le 1$ характеристику гладкості $\Phi^{(\gamma)}_m(f,t)$ функції $f \in L_2[(0,1);x]$.

3. Формулювання основних результатів та наслідків до них. На інтервалі $(0,1)$ розглянемо диференціальний оператор Бесселя з індексом $\nu \ge 0$ (див., наприклад, [26])

$$D_\nu := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \tag{3.1}$$

покладаючи при цьому $D^r_\nu f := D_\nu(D^{r-1}_\nu f)$ для $r \in \mathbb{N}$, де $D^1_\nu := D_\nu$, $D^0_\nu = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ — одиничний оператор у просторі $L_2[(0,1);x]$. Символом $L^r_2[(0,1);x]$, $r \in \mathbb{N}$, позначимо множину функцій $f \in L_2[(0,1);x]$, які мають абсолютно неперервні похідні $(2r-1)$-го порядку і для яких функції $D^r_\nu f$ належать простору $L_2[(0,1);x]$. У випадку, коли $r = 0$, будемо вважати, що $L^0_2[(0,1);x] \equiv L_2[(0,1);x]$.

Нехай $\Psi(t)$, $0 \le t \le 1$, — неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\Psi(0) = 0$, яку скрізь далі будемо називати *мажорантою*. За допомогою характеристики гладкості (2.24) введемо до розгляду класи $\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu \ge 0$, до яких належать функції $f \in L^r_2[(0,1);x]$, що задовольняють умову $\Phi^{(\gamma)}_m(D^r_\nu f, t) \le \Psi(t)$ при будь-якому $t \in (0,1)$. У випадку, коли $r = 0$, будемо писати $\mathcal{W}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi)$ замість $\mathcal{W}^{0,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi)$.

Сформулюємо основні результати статті.

Теорема 1. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \ge 0$ і функція Ψ є мажорантою. Тоді має місце співвідношення*

$$\frac{1}{(n+1)^m \mu^{2r}_{n+1,\nu}} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} \le p_n\Big(\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi), L_2[(0,1);x]\Big)$$

$$\le E_n(\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi)) \le \frac{1}{(n+1)^m \mu^{2r}_{n+1,\nu}} \varlimsup_{t\to 0+} \frac{t\Psi(t)}{\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}, \tag{3.2}$$

де $p_n(\mathcal{W}^{r,\nu}_2(\Phi^{(\gamma)}_m, \Psi), L_2[(0,1);x])$ є будь-яким з n-поперечників, перерахованих у підпункті 2.1, *тобто колмогоровським, гельфандівським, бернштейнівським, лінійним, проєкційним ортопоперечником.*

***Наслідок* 1.** *Нехай виконано умови теореми* 1 *і мажоранта* Ψ *задовольняє умову*

$$\inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} = \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{3.3}$$

Тоді справджуються рівності

$$p_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi), L_2[(0,1);x]) = E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi))$$
$$= \frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}, \tag{3.4}$$

де $p_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi), L_2[(0,1);x])$ *є будь-яким з* n*-поперечників, перерахованих у теоремі* 1.

Теорема 2. *Нехай* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \nu\geq 0$ *і функція* Ψ *є мажорантою. Тоді має місце співвідношення*

$$\frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} \leq \sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f)$$
$$\leq \frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{3.5}$$

***Наслідок* 2.** *Нехай виконано умови теореми* 2 *і мажоранта* Ψ *задовольняє умову* (3.3). *Тоді для довільного* $n\in\mathbb{N}$ *правильною є рівність*

$$\sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) = \frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{3.6}$$

На наш погляд, одним з вагомих результатів, сформульованих у цьому пункті, є точні значення низки екстремальних апроксимативних характеристик оптимізаційного змісту, отриманих для класів $\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 0$, а також знайдені точні значення певних лінійних функціоналів на цих класах. Слід зазначити також ту особливу роль, яку відіграли теореми 1 і 2 відповідно, щоб вказане вище стало можливим.

Ще одним важливим результатом, що випливає з теорем 1 і 2, є наступна теорема, в якій вказано умови, завдяки яким вдається встановити рівномірну та абсолютну збіжність рядів Фур'є – Бесселя (2.1) на інтервалі $(0,1)$. Для цього використовуємо лише інформацію про порядки коефіцієнтів Фур'є – Бесселя (2.2) функцій $f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$.

Теорема 3. *Нехай* $m,n,r\in\mathbb{N},\ \nu\geq 0$ *і функція* Ψ *є мажорантою, яка задовольняє умову* (3.3). *Тоді для довільної функції* $f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$ *її ряд Фур'є – Бесселя* (2.1) *є абсолютно та рівномірно збіжним на інтервалі* $(0,1)$. *При цьому для кожного* $x\in(0,1)$ *його сума дорівнює* $f(x)$.

4. Доведення теорем 1 і 2. ***4.1. Доведення теореми* 1.** Будемо вважати в першій його частині, що $r = 0$. Нехай $f \in L_2[(0,1);x]$ — довільна функція, яка ні при жодному $n \in \mathbb{N}$ не є елементом підпростору $\mathcal{T}_{n,\nu}$, означеного в підпункті 2.1. Тоді величина її найкращого наближення підпростором $\mathcal{T}_{n,\nu}$ в $L_2[(0,1);x]$ знаходиться за формулою (2.4). Виходячи з викладеного, для довільного $j \in \mathbb{Z}_+$ зазначену величину можна записати у вигляді

$$E_n^2(f) = \sum_{k=n+1}^{n+j+1} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f) + \zeta_{j,\nu}(f). \tag{4.1}$$

З (2.4) та (4.1) випливає, що для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$ існує єдине число $\zeta_{j,\nu}(f) > 0$, яке залежить лише від f. У випадку, коли $f \in \mathcal{T}_{l,\nu}$, де $l \in \mathbb{N}$ і $l > n$, тобто $f(x) = \sum_{k=1}^{l} \widehat{c}_{k,\nu}(f)\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x)$, $\widehat{c}_{l,\nu}(f) \neq 0$, у відповідності з (2.4) і (4.1) числа $\zeta_{j,\nu}(f)$ будуть дорівнювати нулю для всіх $j \geq l - n - 1$. Ці два випадки ми не будемо розглядати окремо. Для числової послідовності $\{\zeta_{j,\nu}(f)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, утвореної згідно з формулою (4.1), маємо $\zeta_{j,\nu}(f) \geq \zeta_{j+1,\nu}(f) \geq 0$ для будь-якого $j \in \mathbb{Z}_+$. При цьому

$$\lim_{j\to\infty} \zeta_{j,\nu}(f) = 0. \tag{4.2}$$

Нехай $\tau \in (0,1)$ — довільне число. Використовуючи формулу (2.21), оцінюємо зверху таку суму:

$$\sum_{k=n+1}^{n+j+1} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f) = \sum_{k=n+1}^{n+j+1} \frac{[1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m}}{[1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m}} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f)$$

$$\leq \frac{1}{[1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^{2m}} \sum_{k\in\mathbb{N}} [1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f) = \frac{\|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(f)\|^2}{[1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^{2m}}.$$

Із цього співвідношення отримуємо нерівність

$$[1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m \left\{ \sum_{k=n+1}^{n+j+1} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f) \right\}^{1/2} \leq \|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(f)\|. \tag{4.3}$$

Розглянемо допоміжну числову послідовність $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, яка визначається такими умовами: $v_j \in (0, 1/(n+j)]$ і $v_j > v_{j+1}$ для будь-якого $j \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, що при такій побудові послідовності

$$\lim_{j\to\infty} v_j = 0. \tag{4.4}$$

Далі виконаємо послідовно над обома частинами нерівності (4.3) такі дії: зінтегруємо по змінній τ в межах від 0 до v_j і помножимо утворене таким чином співвідношення на величину $1/v_j$. В результаті зазначеного та з урахуванням (2.24) одержимо

$$\left\{ \sum_{k=n+1}^{n+j+1} \widehat{c}_{k,\nu}^{\,2}(f) \right\}^{1/2} \frac{1}{v_j} \int_0^{v_j} [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau \leq \frac{1}{v_j} \int_0^{v_j} \|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(f)\| d\tau = \Phi_m^{(\gamma)}(f, v_j).$$

Піднесемо ліву і праву частини цієї нерівності до другого степеня й отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+j+1} \widehat{c}_{k,\nu}^2(f) \le \left\{ \frac{v_j}{\displaystyle\int_0^{v_j} [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau} \Phi_m^{(\gamma)}(f, v_j) \right\}^2. \tag{4.5}$$

За допомогою (4.5) запишемо оцінку зверху величини $E_n^2(f)$, використавши для цього формулу (4.1):

$$E_n^2(f) \le \left\{ \frac{v_j}{\displaystyle\int_0^{v_j} [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau} \Phi_m^{(\gamma)}(f, v_j) \right\}^2 + \zeta_{j,\nu}(f).$$

Оскільки ліва частина цієї нерівності не залежить від $j \in \mathbb{Z}_+$, то, переходячи в її правій частині до верхньої границі при $j \to \infty$ і враховуючи формули (4.2), (4.4), записуємо

$$E_n(f) \le \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{v_j \Phi_m^{(\gamma)}(f, v_j)}{\displaystyle\int_0^{v_j} [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau} \le \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t \Phi_m^{(\gamma)}(f, t)}{\displaystyle\int_0^{t} [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau}. \tag{4.6}$$

Вважаючи $\widetilde{g}_n(t) := \sum_{j=0}^n t^j$, $n \in \mathbb{N}$, записуємо формулу (2.27) у більш зручному для застосування вигляді

$$1-(1-\gamma(t))^{n+1} = \gamma(t)\widetilde{g}_n(1-\gamma(t)), \quad t \in (0,1). \tag{4.7}$$

Використовуючи першу теорему про середнє для означеного інтеграла Римана (див., наприклад, [41, гл. V, § 3, пункт 2]) і (4.7), отримуємо

$$\int\limits_0^t [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau = \widetilde{g}_n^{\,m}(1-\gamma(\xi_t)) \int\limits_0^t \gamma^m(\tau) d\tau, \tag{4.8}$$

де $\xi_t \in (0,t)$ — певне число, яке залежить від t. Очевидно, що $\xi_t \to 0+$ при $t \to 0+$. Для довільної функції $f \in \mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$ запишемо нерівність (4.6) з урахуванням формули (4.8):

$$E_n(f) \le \lim_{t\to 0+} \frac{1}{\widetilde{g}_n^m(1-\gamma(\xi_t))} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau) d\tau} = \frac{1}{(n+1)^m} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau) d\tau}.$$

З цієї нерівності отримуємо оцінку зверху

$$E_n(\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)) \le \frac{1}{(n+1)^m} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau) d\tau}. \tag{4.9}$$

Із співвідношення (2.5) випливає необхідність знаходження оцінки знизу бернштейнівського n-поперечника класу $\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$. Для цього скористаємося введеним у підпункті 2.1 підпростором $\mathcal{T}_{n+1,\nu}$ і розглянемо в ньому кулю $\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_1)$ радіуса

$$\widehat{\varepsilon}_1 := \frac{1}{(n+1)^m} \inf_{0<u<1} \frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u \gamma^m(\tau)d\tau}, \tag{4.10}$$

тобто

$$\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_1) := \widehat{\varepsilon}_1 \mathbb{B} \cap \mathcal{T}_{n+1,\nu} = \{q_{n+1} \in \mathcal{T}_{n+1,\nu} : \|q_{n+1}\| \leq \widehat{\varepsilon}_1\}, \tag{4.11}$$

де $\mathbb{B}$ — одинична куля у просторі $L_2[(0,1);x]$.

Покажемо, що куля (4.11) належить класу функцій $\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$. Нехай q_{n+1} — довільний елемент підпростору $\mathcal{T}_{n+1,\nu}$ і $\tau \in (0,1)$ — будь-яке число. Тоді, у відповідності з (2.21), маємо

$$\begin{aligned} \|\Delta^m_{\gamma(\tau)}(q_{n+1})\| &= \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} [1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m} \, \widehat{c}^{\,2}_{k,\nu}(q_{n+1}) \right\}^{1/2} \\ &\leq [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \widehat{c}^{\,2}_{k,\nu}(q_{n+1}) \right\}^{1/2} = [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m \|q_{n+1}\|. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Виконаємо над лівою і правою частинами співвідношення (4.12) такі дії: зінтегруємо їх по змінній τ в межах від 0 до t, $t \in (0,1)$, і помножимо отриману таким чином нерівність на $1/t$. Використовуючи формулу (2.24), для довільного елемента $q_{n+1} \in \sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_1)$ з отриманого вказаним чином співвідношення маємо

$$\Phi_m^{(\gamma)}(q_{n+1}, t) \leq \widehat{\varepsilon}_1 \frac{1}{t} \int_0^t [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m d\tau. \tag{4.13}$$

Враховуючи, що $\widetilde{g}_n(1-\gamma(\tau)) \leq n+1$, $\tau \in (0,1)$, за допомогою (4.7) і (4.10) з (4.13) отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(\gamma)}(q_{n+1}, t) &\leq \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \gamma^m(\tau) \widetilde{g}_n^{\,m}(1-\gamma(\tau)) d\tau \right\} \frac{1}{(n+1)^m} \inf_{0<u<1} \frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u \gamma^m(\tau)d\tau} \\ &\leq \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \gamma^m(\tau) d\tau \right\} \inf_{0<u<1} \frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u \gamma^m(\tau)d\tau}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Покладаючи у правій частині нерівності (4.14) $u = t$, чим, власне, посилюючи її, маємо $\Psi_m^{(\gamma)}(q_{n+1}, t) \leq \Psi(t)$. Оскільки ця нерівність виконується для будь-якого $t \in (0,1)$, то правильність включення

$$\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_1) \subset \mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi). \tag{4.15}$$

показано. Нехай скрізь далі $\mathcal{L}_{n+1}$ є довільним $(n+1)$-вимірним підпростором простору $L_2[(0,1);x]$. Використовуючи означення бернштейнівського n-поперечника і (4.10), (4.11), (4.15), отримуємо

$$\begin{aligned} & b_n(\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi), L_2[(0,1);x]) \\ & \quad = \sup\{\sup\{\varepsilon>0\colon \varepsilon\mathbb{B}\cap\mathcal{L}_{n+1}\subset\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)\}\colon \mathcal{L}_{n+1}\subset L_2[(0,1);x]\} \\ & \quad \geq \sup\{\varepsilon>0\colon \varepsilon\mathbb{B}\cap\mathcal{T}_{n+1,\nu}\subset\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)\} \geq \widehat{\varepsilon}_1 = \frac{1}{(n+1)^m}\inf_{0<t<1}\frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

За допомогою співвідношень (2.5), (4.9) і (4.16) одержуємо (3.2) у випадку $r=0$.

Розглянемо випадок, коли $r\in\mathbb{N}$. В роботі [4] показано, що для довільної функції $f\in L_2^r[(0,1);x]$ виконується нерівність

$$E_n(f)\leq\frac{1}{\mu_{n+1,\nu}^{2r}}E_n(D_\nu^r f). \tag{4.17}$$

Згідно з означенням класу $\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$ для будь-якого його елемента f функція $D_\nu^r f$ належить класу $\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$. З урахуванням зазначеного з (4.17) та (3.2), де $r=0$, отримуємо оцінку зверху

$$E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi))\leq\frac{1}{\mu_{n+1,\nu}^{2r}}E_n(\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi))\leq\frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}}\varlimsup_{t\to0+}\frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t\gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.18}$$

Наступним кроком доведення, у відповідності з (2.5), є знаходження оцінки знизу бернштейнівського n-поперечника класу $\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)$ у просторі $L_2[(0,1);x]$. Для цього розглянемо в підпросторі $\mathcal{T}_{n+1,\nu}$ кулю $\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_2)$ радіуса

$$\widehat{\varepsilon}_2:=\frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}}\inf_{0<u<1}\frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u\gamma^m(\tau)d\tau}, \tag{4.19}$$

тобто

$$\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_2):=\varepsilon_2\mathbb{B}\cap\mathcal{T}_{n+1,\nu}=\{q_{n+1}\in\mathcal{T}_{n+1,\nu}\colon\|q_{n+1}\|\leq\widehat{\varepsilon}_2\}. \tag{4.20}$$

В роботі [26] показано, що для довільної функції $f\in L_2^r[(0,1);x]$, $r\in\mathbb{N}$, мають місце рівності

$$\widehat{c}_{k,\nu}(f)=(-1)^r\frac{1}{\mu_{k,\nu}^{2r}}\widehat{c}_{k,\nu}(D_\nu^r f),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Використовуючи співвідношення (4.7), (4.12), (4.19) – (4.21), для довільного елемента $q_{n+1}\in\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_2)$ записуємо

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\gamma(\tau)}^m(D_\nu^r q_{n+1})\| &= \left\{\sum_{k=1}^{n+1}[1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m}\widehat{c}_{k,\nu}^2(D_\nu^r q_{n+1})\right\}^{1/2} \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{n+1}[1-(1-\gamma(\tau))^k]^{2m}\mu_{k,\nu}^{4r}\widehat{c}_{k,\nu}^2(q_{n+1})\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leq [1-(1-\gamma(\tau))^{n+1}]^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}\|q_{n+1}\|$$
$$\leq \gamma^m(\tau)\widetilde{g}_n^{\,m}(1-\gamma(\tau))\mu_{n+1,\nu}^{2r}\|g_{n+1}\| \leq \gamma^m(\tau)(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}\widehat{\varepsilon}_2$$
$$= \gamma^m(\tau) \inf_{0<u<1} \frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.22}$$

З (4.22) і (2.24) для будь-якого $t \in (0,1)$ отримуємо нерівність

$$\Phi_m^{(\gamma)}(D_\nu^r q_{n+1}, t) \leq \left\{\frac{1}{t}\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau\right\} \inf_{0<u<1} \frac{u\Psi(u)}{\displaystyle\int_0^u \gamma^m(\tau)d\tau}.$$

Покладаючи у правій частині цієї нерівності $u = t$, маємо $\Phi_m^{(\gamma)}(D_\nu^r q_{n+1}, t) \leq \Psi(t)$, де $t \in (0,1)$ — довільне число, тобто

$$\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_2) \subset \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi). \tag{4.23}$$

Тоді, з урахуванням (4.20) і (4.23), маємо оцінку знизу

$$b_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi), L_2[(0,1);x])$$
$$= \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2[(0,1);x]\}$$
$$\geq \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{B} \cap \mathcal{T}_{n+1,\nu} \subset \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)\}$$
$$\geq \widehat{\varepsilon}_2 = \frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.24}$$

Співвідношення (3.2) при $r \in \mathbb{N}$ випливають зі співвідношень (2.5), (4.18) і (4.24).

Теорему 1 доведено.

***4.2. Доведення теореми* 2.** Для коефіцієнтів Фур'є – Бесселя $\widehat{c}_{n,\nu}(f)$, $n = 2, 3, \ldots,$ функції $f \in L_2[(0,1);x]$ з формули (2.4) маємо

$$\widehat{c}_{n+1,\nu}(f) \leq |\widehat{c}_{n+1,\nu}(f)| \leq E_n(f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Оцінку зверху лінійного функціонала $\widehat{c}_{n+1,\nu}(f)$ на класі $\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, отримуємо за допомогою співвідношень (4.25) і (3.2), тобто

$$\sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) \leq E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)) \leq \frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.26}$$

Знайдемо оцінку знизу у випадку $r = 0$. Для цього розглянемо функцію $f_1(x) := \widehat{\varepsilon}_1\widehat{J}_\nu(\mu_{n+1,\nu}x)$, де величина $\widehat{\varepsilon}_1$ знаходиться за формулою (4.10). Оскільки, згідно з (4.11), функція f_1 належить кулі $\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_1)$ то, у відповідності з (4.15), $f_1 \in \mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$. Тоді

$$\sup_{f\in\mathcal{W}_2(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) \geq \widehat{c}_{n+1,\nu}(f_1) = \widehat{\varepsilon}_1 = \frac{1}{(n+1)^m} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.27}$$

У випадку $r \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію $f_2(x) := \widehat{\varepsilon}_2 \widehat{J}_\nu(\mu_{n+1,\nu}x)$, де величина $\widehat{\varepsilon}_2$ знаходиться за формулою (4.19). Оскільки f_2 належить кулі $\sigma_{n+1}(\widehat{\varepsilon}_2)$, яка визначається співвідношенням (4.20), то, згідно з (4.23), маємо $f_2 \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$. Таким чином,

$$\sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) \geq \widehat{c}_{n+1,\nu}(f_2) = \widehat{\varepsilon}_2 = \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}. \tag{4.28}$$

Співвідношення (3.5) отримуємо з формул (4.26) – (4.28).

Теорему 2 доведено.

5. Доведення теореми 3. Нехай функція f належить простору $L_2[(0,1);x]$. Ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_{k,\nu}(f) J_\nu(\mu_{k,\nu}x) \tag{5.1}$$

є її рядом Фур'є – Бесселя, побудованим за допомогою ортогональної та повної у вказаному просторі системи функцій $\{J_\nu(\mu_{k,\nu}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, а числа

$$c_{k,\nu}(f) = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\mu_{k,\nu})} \int_0^1 tf(t)J_\nu(\mu_{k,\nu}t)dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

— її коефіцієнтами Фур'є – Бесселя (див., наприклад, [42, гл. II, § 24]).

Сформулюємо, використавши введені в статті позначення, один результат, пов'язаний з порядками коефіцієнтів (5.2), який забезпечує рівномірну та абсолютну збіжність ряду (5.1) [43, гл. IX, § 4]: *якщо* $\nu \geq 0$ *і для всіх достатньо великих значень* k *виконуються нерівності*

$$\left|c_{k,\nu}(f)\right| \leq \frac{A}{\mu_{k,\nu}^{1+\varepsilon}}, \tag{5.3}$$

де $\varepsilon > 0$ *й* A *є сталими, то ряд* (5.1) *буде абсолютно та рівномірно збіжним на інтервалі* $(0,1)$.

Нам знадобиться наведена в пункті 1 наближена формула для обчислення значень коренів $\mu_{k,\nu}$ функції $J_\nu(x)$, тобто $\mu_{k,\nu} \approx \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\nu\pi}{2} + k\pi$, яка є правильною для *всіх достатньо великих чисел* $k \in \mathbb{N}$. Символом $\mathfrak{N}_1$ позначимо зліченну підмножину множини $\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{N}_1 := \left\{k \in \mathbb{N} \colon \mu_{k,\nu} - \frac{(\nu+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx k\pi \text{ і } \mu_{k,\nu} > k\pi\right\}. \tag{5.4}$$

Використовуючи співвідношення (5.2) і (2.2), де $\widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x) = \sqrt{2}J_\nu(\mu_{k,\nu}x)/J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu})$, $k \in \mathbb{N}$, отримуємо рівності

$$c_{k,\nu}(f) = \frac{\sqrt{2}}{J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu})} \widehat{c}_{k,\nu}(f), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Тоді з (5.5) і (5.1) маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_{k,\nu}(f) J_\nu(\mu_{k,\nu}x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{c}_{k,\nu}(f) \widehat{J}_\nu(\mu_{k,\nu}x). \tag{5.6}$$

Наведений у пункті 1 асимптотичний вираз функції Бесселя першого роду $J_\nu(x)$, який є правильним для *всіх достатньо великих додатних значень* x, запишемо в такому вигляді, використавши певне тлумачення символу O (див., наприклад, [44, гл. I, пункт 1.2]):

$$J_{\nu+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(\nu+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + z(x), \tag{5.7}$$

де $z(x) = O(x^{-3/2})$. Нагадаємо, що останнє співвідношення означає існування таких додатних сталих a й $\widetilde{A}$, для яких при всіх $x \in (a, \infty)$ виконується нерівність

$$|z(x)| \le \frac{\widetilde{A}}{x^{3/2}}. \tag{5.8}$$

Нехай

$$\mathfrak{N}_2 := \{k \in \mathbb{N} \colon a < \mu_{k,\nu} < \infty\}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{K}_1 := \inf\left\{\left|\cos\left(\mu_{k,\nu} - \frac{(\nu+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| \colon k \in \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2\right\}. \tag{5.10}$$

Спираючись на формули (5.4), (5.10) і не зменшуючи загальності, можемо вважати, наприклад, що

$$1/2 \le \mathcal{K}_1 \le 1. \tag{5.11}$$

Покладаючи

$$\mathfrak{N}_3 := \{k \in \mathbb{N} \colon k \ge [\widetilde{A}] + 1\}, \tag{5.12}$$

де $[\widetilde{A}]$ — ціла частина числа $\widetilde{A}$, з нерівності (5.8) *для всіх достатньо великих натуральних чисел*

$$k \in \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_3 \tag{5.13}$$

за допомогою формул (5.7) – (5.11) і (5.4) отримуємо оцінку знизу величини $|J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu})|$:

$$|J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu})| \ge \left| \sqrt{\frac{2}{\pi\mu_{k,\nu}}} \left|\cos\left(\mu_{k,\nu} - \frac{(\nu+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - |z(\mu_{k,\nu})| \right|$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{\mu_{k,\nu}}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{K}_1 - \frac{\widetilde{A}}{\mu_{k,\nu}}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{\mu_{k,\nu}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\widetilde{A}}{k\pi}\right).$$

Оскільки з (5.12), (5.13) випливає нерівність $k > \widetilde{A}$, то звідси маємо

$$|J_{\nu+1}(\mu_{k,\nu})| \ge \frac{\mathcal{K}_2}{\sqrt{\mu_{k,\nu}}}, \tag{5.14}$$

де $\mathcal{K}_2 := 1/\sqrt{2\pi} - 1/\pi$. Використовуючи формули (5.14) і (3.6), *для всіх достатньо великих натуральних чисел* k і функцій $f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$ з (5.5) отримуємо

$$|c_{k,\nu}(f)| \leq \frac{\sqrt{2\mu_{k,\nu}}}{\mathcal{K}_2}|\widehat{c}_{k,\nu}(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{(n+1)^m \mu_{k,\nu}^{2r-1/2}\mathcal{K}_2} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} \leq \frac{A}{\mu_{k,\nu}^{2r-1/2}}, \tag{5.15}$$

де

$$A := \frac{1}{\mathcal{K}_2} \inf_{0<t<1} \frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}.$$

Порівнюючи співвідношення (5.3) з (5.15) і використовуючи формулу (5.6), робимо висновок, що для довільної функції $f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$ її ряд Фур'є–Бесселя (2.1) буде абсолютно та рівномірно збіжним на інтервалі $(0,1)$. Оскільки, за означенням, кожна функція $f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi)$ має абсолютно неперервну похідну $(2r-1)$-го порядку, то у відповідності з ознакою збіжності рядів Фур'є–Бесселя (5.1) (див., наприклад, [43, гл. IX, § 2]) з формули (5.6) випливає, що для будь-якого $x \in (0,1)$ сума ряду (2.1) буде дорівнювати $f(x)$.

Теорему 3 доведено.

6. Деталізація отриманих результатів шляхом певного вибору множини мажорант. ***6.1.*** Нехай β — довільна неперервна і монотонно зростаюча на відрізку $[0,1]$ функція, така що $\beta(0) = 0$, тобто мажоранта. Розглянемо функцію вигляду

$$\Psi(\beta, t) := \frac{1}{t}\int_0^t \beta(\tau)d\tau, \quad t \in (0,1]. \tag{6.1}$$

Неважко переконатися в тому, що $\lim\{\Psi(\beta,t)\colon t \to 0+\} = 0$ і $\Psi'(\beta,t) > 0$ для довільного $t \in (0,1]$. Вважаючи $\Psi(\beta,0) := 0$, отримуємо на відрізку $[0,1]$ неперервну та монотонно зростаючу функцію, яка при $t = 0$ набуває нульового значення, тобто *є мажорантою*. З описаної процедури випливає один з підходів до побудови певної множини мажорант. Розглянемо приклади використання мажорант вигляду (6.1) у теоремах 1, 2 та у наслідках до них.

6.1.1. Нагадаємо, що у формулах (3.2)–(3.6) використано величину

$$\frac{t\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau},$$

яка після заміни в ній мажоранти Ψ на мажоранту (6.1) набирає вигляду

$$\frac{\displaystyle\int_0^t \beta(\tau)d\tau}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau}.$$

В чисельнику і знаменнику цього дробу містяться рімановські інтеграли зі змінною верхньою межею $t \in (0,1)$ від неперервних функцій β і γ^m відповідно. Розглядаючи ці інтеграли як дві функції, задані на відрізку $[0,t]$, що набувають нульових значень в нулі, застосуємо одну теорему диференціального числення про середнє, а саме теорему Коші [41, гл. I, § 1], всі умови якої виконано. В результаті отримуємо

$$\frac{\displaystyle\int_0^t \beta(\tau)d\tau}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} = \frac{\beta(\widetilde{\xi}_t)}{\gamma^m(\widetilde{\xi}_t)}, \tag{6.2}$$

де число $\widetilde{\xi}_t \in (0,t)$ залежить від t. Оскільки при $t \to 0+$ маємо $\widetilde{\xi}_t \to 0+$, то, використовуючи означення і властивості верхньої границі функції, записуємо

$$\overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\displaystyle\int_0^t \beta(\tau)d\tau}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} = \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(\widetilde{\xi}_t)}{\gamma^m(\widetilde{\xi}_t)} \le \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.3}$$

Застосовуючи означення і певні властивості нижньої межі функції, маємо

$$\inf_{0<t<1} \frac{\displaystyle\int_0^t \beta(\tau)d\tau}{\displaystyle\int_0^t \gamma^m(\tau)d\tau} = \inf_{0<t<1} \frac{\beta(\widetilde{\xi}_t)}{\gamma^m(\widetilde{\xi}_t)} \ge \inf_{0<t<1} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.4}$$

Тоді, з урахуванням (6.3) та (6.4), формула (3.2) набирає вигляду

$$\frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} \le p_n\Big(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi(\beta)), L_2[(0,1);x]\Big)$$

$$\le E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi(\beta))) \le \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.5}$$

Зазначимо, що умова (3.3) для мажоранти (6.1) записується так:

$$\inf_{0<t<1} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} = \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} \tag{6.6}$$

і при її виконанні замість формули (3.4) маємо

$$p_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi(\beta)), L_2[(0,1);x]) = E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi(\beta)))$$

$$= \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.7}$$

6.1.2. За допомогою формул (6.3) і (6.4) співвідношення (3.5) набирає вигляду

$$\frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \inf_{0<t<1} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} \le \sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)}, \Psi(\beta))} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f)$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}} \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.8}$$

При виконанні умови (6.6) отримуємо такий варіант формули (3.6):

$$\sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma)},\Psi(\beta))}\widehat{c}_{n+1,\nu}(f)=\frac{1}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}}\varlimsup_{t\to 0+}\frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}. \tag{6.9}$$

Слід зазначити, що у формулах (6.5)–(6.9) $n,m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ \nu\ge 0$.

6.2. Конкретизуємо точні результати (6.7) і (6.9). Для цього скористаємося низкою важливих еквівалентностей, які застосовуються при обчисленні границь функцій. Це допоможе підібрати необхідні комбінації функцій β і γ, що задовольняють умову (6.6). Зокрема, будемо використовувати функції $\gamma_{1,\eta}$ і $\gamma_{2,\eta}$ при певних значеннях $\eta\in(0,\infty)$, які було розглянуто у підпункті 2.4.

6.2.1. Нехай $\gamma(t)=\gamma_{1,1}(t)=t$ і $\beta(t)=\beta_{1,m}(t):=(a^t-1)^m,\ a\in(1,\infty),\ m\in\mathbb{N}$. Оскільки в цьому випадку

$$\frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}=\left(\frac{a^t-1}{t}\right)^m$$

і

$$\inf_{0<t<1}\frac{a^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\ln(a),$$

то умова (6.6) виконується, а з (6.7) і (6.9) отримуємо рівності

$$p_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m,\Psi(\beta_{1,m})),L_2[(0,1);x])=E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m,\Psi(\beta_{1,m})))$$
$$=\sup_{f\in\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m,\Psi(\beta_{1,m}))}\widehat{c}_{n+1,\nu}(f)=\frac{\ln^m(a)}{(n+1)^m\mu_{n+1,\nu}^{2r}},$$

де $\Phi_m(f):=\Phi_m^{(\gamma_{1,1})}(f)$ (див. підпункт 2.4). В цій формулі і всіх наступних, пов'язаних з точними значеннями апроксимативних характеристик досліджуваних класів, n і m належать множині $\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+,\ \nu\ge 0,\ p_n(\mathfrak{M},L_2[(0,1);x])$ — будь-який з розглянутих у підпункті 2.1 n-поперечників класу $\mathfrak{M}\subset L_2[(0,1);x]$. Зазначимо, що, наприклад, для $m=1$ з (6.1) маємо таку мажоранту:

$$\Psi(\beta_{1,1};t)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad t=0,\\[4pt] \dfrac{a^t-1}{t\ln(a)}-1, & \text{якщо}\quad 0<t\le 1.\end{cases}$$

6.2.2. Розглянемо випадок, коли $\gamma(t)=\gamma_{1,1}(t)=t$ і $\beta(t)=\widetilde{\beta}_{1;m,k}(t):=[(1+t)^k-1]^m$, $k\in(1,\infty),\ m\in\mathbb{N}$. Враховуючи, що

$$\frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)}=\left[\frac{(1+t)^k-1}{t}\right]^m$$

і

$$\inf_{0<t<1}\frac{(1+t)^k-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^k-1}{t}=k,$$

бачимо, що умова (6.6) виконується і правильними будуть рівності

$$p_n\Big(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m,\Psi(\widetilde{\beta}_{1;m,k})),L_2[(0,1);x]\Big)=E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m,\Psi(\widetilde{\beta}_{1;m,k})))$$

$$= \sup_{f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m, \Psi(\widetilde{\beta}_{1;m,k}))} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) = \frac{k^m}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}}\,.$$

У цьому випадку, якщо, наприклад, $m = 1$, з (6.1) отримуємо мажоранту

$$\Psi(\widetilde{\beta}_{1;1,k}; t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t = 0, \\ \dfrac{(1+t)^{k+1} - 1}{t(k+1)} - 1, & \text{якщо} \quad 0 < t \le 1. \end{cases}$$

6.2.3. Покладаємо далі $\gamma(t) = \gamma_{2,1}^k(t) = \sin^k(\pi t/2)$, $k \in (0, \infty)$, і $\beta(t) = \gamma_{1,1}^{km}(t) = t^{km}$. Оскільки

$$\frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} = \left[\frac{\gamma_{1,1}(t)}{\gamma_{2,1}(t)}\right]^{km} = \left[\frac{2}{\pi \operatorname{sinc}(\pi t/2)}\right]^{km},$$

де $\operatorname{sinc}(t) := \{1, \text{якщо } t = 0; \sin(t)/t, \text{якщо } t \ne 0\}$ і

$$\inf_{0<t<1} \frac{1}{\operatorname{sinc}(\pi t/2)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\operatorname{sinc}(\pi t/2)} = 1,$$

то умова (6.6) виконується і в цьому випадку. Використовуючи (6.7) і (6.9), записуємо рівності

$$p_n\big(\mathcal{W}_2^{r,\nu}\big(\Phi_m^{(\gamma_{2,1}^k)}, \Psi(\gamma_{1,1}^{km})\big), L_2[(0,1); x]\big) = E_n\big(\mathcal{W}_2^{r,\nu}\big(\Phi_m^{(\gamma_{2,1}^k)}, \Psi(\gamma_{1,1}^{km})\big)\big)$$

$$= \sup_{f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}\left(\Phi_m^{(\gamma_{2,1}^k)}, \Psi(\gamma_{1,1}^{km})\right)} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{km} \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}}.$$

Зазначимо, що в цьому підпункті мажоранта має вигляд

$$\Psi(\gamma_{1,1}^{km}, t) = \frac{t^{km}}{km+1}.$$

6.2.4. Нехай $\gamma(t) = \gamma_{3,k}(t) := [1 - \cos(\pi t/2)]^k$, $k \in (0, \infty)$, і $\beta(t) = \gamma_{1,1}^{2km}(t) = t^{2km}$. Виходячи з того, що

$$\frac{\beta(t)}{\gamma^m(t)} = \left[\frac{\gamma_{1,1}^{2k}(t)}{\gamma_{3,k}(t)}\right]^m = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{km} \frac{1}{\operatorname{sinc}^{2km}(\pi t/4)}$$

і правильним є співвідношення

$$\inf_{0<t<1} \frac{1}{\operatorname{sinc}(\pi t/4)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\operatorname{sinc}(\pi t/4)} = 1,$$

переконуємося у виконанні умови (6.6) у цій ситуації. Використовуючи формули (6.7) і (6.9), отримуємо рівності

$$p_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma_{3,k})}, \Psi(\gamma_{1,1}^{2km})), L_2[(0,1); x]) = E_n(\mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma_{3,k})}, \Psi(\gamma_{1,1}^{2km})))$$

$$= \sup_{f \in \mathcal{W}_2^{r,\nu}(\Phi_m^{(\gamma_{3,k})}, \Psi(\gamma_{1,1}^{2km}))} \widehat{c}_{n+1,\nu}(f) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^{km} \frac{1}{(n+1)^m \mu_{n+1,\nu}^{2r}}\,.$$

В розглянутому випадку маємо мажоранту

$$\Psi(\gamma_{1,1}^{2km}, t) = \frac{t^{2km}}{2km+1}.$$

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 3-е изд., Наука, Москва (1976).
2. И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближений*, Ленинград (1977).
3. Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной плоскости*, Мир, Москва (1986).
4. S. B. Vakarchuk, *On the estimates of widths of the classes of continuty and majorants in the weighted space* $L_{2,x}(0,1)$, Ukr. Math. J., **71**, № 2, 202 – 214 (2019).
5. J. Boman, H. S. Shapiro, *Comparison theorems for a generalized modulus of continuity*, Ark. Mat., **9**, № 1, 91 – 116 (1971).
6. J. Boman, *Equivalence of generalized moduli of continuity*, Ark. Mat., **18**, № 1, 73 – 100 (1980).
7. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer-Verlag, New York (1987).
8. Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости*, Мир, Москва (1988).
9. R. M. Trigub, *Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series and polynomial approximation of functions on the torus*, Izv. Math., **17**, № 3, 567 – 593 (1981).
10. K. G. Ivanov, *On a new characteristic of functions. I.*, Сердика Бълг. Мат. Списание, **8**, № 3, 262 – 279 (1982).
11. K. G. Ivanov, *On a new characteristic of functions. II. Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in* $C[-1,1]$ *and* $L_p[-1,1]$, Плиска Бълг. Мат. Студ., **5**, 151 – 163 (1983).
12. К. М. Потапов, *Аппроксимация многочленами на конечном отрезке вещественной оси*, Тр. междунар. конф. по конструктивной теории функций, Варна, 1 – 5 июня 1981 г., Болг. АН, София (1983), с. 134 – 143.
13. K. V. Runovskii, *On approximation by families of linear polynomial operators in* L_p*-space,* $0 < p < 1$, Sb. Math., **82**, № 2, 441 – 459 (1995).
14. N. N. Pustovoitov, *Estimates of the best approximations of periodic functions by trigonometric polynomials in terms of averaged differences and the multidimensional Jackson's theorem*, Sb. Math., **188**, № 10, 1507 – 1520 (1997).
15. А. Г. Бабенко, *О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших* L^2*-приближений функций тригонометрическими полиномами*, Тр. Института математики и механики УрО РАН, **6**, 1 – 19 (1999).
16. V. A. Abilov, F. V. Abilova, *Approximation of functions by algebraic polynomials in the mean*, Russian Math., **41**, № 3, 60 – 62 (1997).
17. С. Н. Васильев, *Точное неравенство Джексона – Стечкина в* L_2 *с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами*, Докл. АН, **385**, № 1, 11 – 14 (2002).
18. A. I. Kozko, A. V. Rozhdestvenskii, *On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity*, Math. Notes, **73**, № 5, 736 – 741 (2003).
19. V. A. Abilov, F. V. Abilova, *Problems in the approximation of* 2π*-periodic functions by Fourier sums in the space* L_2, Math. Notes, **76**, № 6, 749 – 757 (2004).
20. S. B. Vakarchuk, *On best polynomial approximations in* L_2, Math. Notes, **70**, № 3, 300 – 310 (2001).
21. S. B. Vakarchuk, *Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of function classes in* L_2, Math. Notes, **78**, № 5-6, 735 – 739 (2005).
22. S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, *A sharp inequality of Jackson – Stechkin type in* L_2 *and the widths of functional classes*, Math. Notes, **86**, № 3, 306 – 313 (2009).
23. S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, *Jackson – Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space* L_2, Math. Notes, **92**, № 4, 458 – 472 (2012).
24. S. B. Vakarchuk, *The best mean square approximation of functions, given at the real axis by entire functions of exponential type*, Ukr. Math. J., **64**, № 5, 754 – 767 (2012).
25. S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, V. I. Zabutnaya, *Structural characteristics of functions from* L_2 *and the exact values of widths of some functional classes*, J. Math. Sci., **206**, № 1, 97 – 114 (2015).
26. V. A. Abilov, F. V. Abilova, V. R. Kerimov, *Sharp estimates for the convergence rate of Fourier – Bessel series*, Comput. Math. and Math. Phys., **55**, № 7, 1094 – 1102 (2015).
27. S. B. Vakarchuk, *Generalized smoothness characteristics in Jackson-type inequalities and widths of classes of functions in* L_2, Math. Notes, **98**, № 4, 572 – 588 (2015).

28. S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, *Inequalities between best polynomial approximations and some smoothness characteristics in the space* L_2 *and widths of classes of functions*, Math. Notes, **99**, № 2, 222 – 242 (2016).
29. S. B. Vakarchuk, *Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the* n*-widths for the classes of* (ψ, β)*-differentiable functions in* L_2*. I*, Ukr. Math. J., **68**, № 6, 823 – 848 (2016).
30. S. B. Vakarchuk, *Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the* n*-widths for the classes of* (ψ, β)*-differentiable functions in* L_2*. III*, Ukr. Math. J., **68**, № 10, 1299 – 1319 (2017).
31. К. Тухлиев, *Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье – Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов*, Чебышев. сб., **17**, № 4, 141 – 156 (2016).
32. S. B. Vakarchuk, *Widths of some classes of functions defined by the generalized moduli of continuity* ω_γ *in the space* L_2, J. Math. Sci., **227**, № 1, 105 – 115 (2017).
33. S. B. Vakarchuk, *Generalized characteristics of smoothness and some extreme problems of the approximation theory of functions in the space* $L_2(\mathbb{R})$*. I*, Ukr. Math. J., **70**, № 9, 1345 – 1374 (2019).
34. S. B. Vakarchuk, *Generalized characteristics of smoothness and some extreme problems of the approximation theory of functions in the space* $L_2(\mathbb{R})$*. II*, Ukr. Math. J., **70**, № 10, 1550 – 1584 (2019).
35. S. B. Vakarchuk, *Best polynomial approximations and widths of classes of functions in the space* L_2, Math. Notes, **103**, № 2, 308 – 312 (2018).
36. S. B. Vakarchuk, *On estimates in* $L_2(\mathbb{R})$ *of mean* ν*-widths of classes of functions defined via the generalized modulus of continuity of* ω_M, Math. Notes, **106**, № 2, 191 – 202 (2019).
37. F. Abdullayev, S. Chaichenko, A. Shidlich, *Direct and inverse approximation theorems of functions in the Musielak – Orlicz type space*, Math. Inequal. and Approx., **24**, № 4, 323 – 336 (2021).
38. F. Abdullayev, S. Chaichenko, M. Imashysy, A. Shidlich, *Jackson-type inequalities and widths of functional classes in the Musielak – Orlicz type space*, Rocky Mountain J. Math., **51**, № 4, 1143 – 1155 (2021).
39. S. O. Chaichenko, A. L. Shidlich, T. V. Shulyk, *Direct and inverse approximation theorems in the Besicovitch – Musielak – Orlicz spaces of almost periodic functions*, Ukr. Mat. Zh., **74**, № 5, 701 – 716 (2022).
40. Б. М. Макаров, Л. В. Флоринская, *Теория меры и интеграла., Вып. 1. Мера. Измеримые функции*, Изд-во Ленинград. ун-та, Ленинград (1974).
41. И. Г. Арамович, Р. С. Гутер, Л. А. Люстерник, М. И. Раухваргер, М. И. Сканави, А. Р. Янпольский, *Математический анализ (дифференцирование и интегрирование)*, Физматгиз, Москва (1961).
42. Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, Москва (1971).
43. Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, 3-е изд., Наука, Москва (1980).
44. Н. Г. де Брейн, *Асимптотические методы в анализе*, Изд-во иностр. лит., Москва (1961).

Одержано 17.08.23