DOI: 10.3842/umzh.v76i3.7779

УДК 517.5

Олексій Теплінський[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

РОТАЦІЙНІ ПЕРЕКЛАДАННЯ ІНТЕРВАЛІВ

We show the equivalence of two possible definitions of a rotational interval exchange transformation: by the first definition, it is the first return map for a circle rotation onto a union of finitely many circle arcs and, by the second definition, it is an interval exchange with a scheme (in the sense of interval rearrangement ensembles) whose dual is also an interval exchange scheme.

Показано еквівалентність двох можливих означень ротаційного перекладання інтервалів: згідно з одним, це відображення першого повернення для повороту кола на об'єднання скінченної кількості його дуг, а згідно з іншим, це перекладання інтервалів зі схемою (в сенсі перекладального ансамблю інтервалів), дуальна до якої схема також є схемою перекладання інтервалів.

1. Вступ. У роботі [1] було запропоновано нову концепцію перекладальних ансамблів інтервалів (ПАІ), яка узагальнює класичну для теорії динамічних систем конструкцію перекладання інтервалів [2 – 7]. Наріжним поняттям нашої концепції є інволюція дуальності на просторі схем (дискретних компонент) ПАІ, яка кожній схемі ПАІ ставить у відповідність дуальну до неї схему ПАІ, і ця дуальність обертає в часі індукцію типу Розі – Віча. Схеми перекладань інтервалів є частинним випадком схем ПАІ і, як виявилося, дуальні до них схеми можуть бути, а можуть і не бути схемами перекладань інтервалів. Власне, простір усіх схем ПАІ є поповненням простору всіх схем перекладань інтервалів (на багатьох проміжках) щодо операції дуальності. З іншого боку, серед усіх схем перекладань інтервалів можна виділити підпростір тих, дуальні до яких є також схемами перекладань інтервалів. Перекладання інтервалів зі схемами з цього підпростору ми називаємо ротаційними, оскільки такі перекладання пов'язані з поворотами кола, а саме, є відображеннями першого повернення для поворотів кола на об'єднання скінченної кількості його дуг. Фактично йдеться про два підходи до означення одного об'єкту, які в певному сенсі є еквівалентними: перший — через дуальність схем ПАІ, другий — через відображення першого повернення на колі. Мета цієї роботи полягає в тому, щоб точно описати зв'язок між цими підходами. Результати сформульовано у вигляді трьох тверджень теореми 1 і доведено у відповідних пунктах статті.

На думку автора, саме дослідження ротаційних перекладань інтервалів у рамках концепції ПАІ торує шлях до нових результатів стосовно відкритих поки що питань теорії жорсткості для дифеоморфізмів кола з багатьма особливими точками, відповідні до яких результати для дифеоморфізмів кола з одним зламом були отримані в роботах [8, 9]. Справа в тому, що найбільш перспективним у дослідженні поворотів кола з особливими точками є ренормалізаційний підхід, коли замість вихідного відображення розглядається послідовність відображень першого повернення на об'єднання малих околів особливих точок, перенормованих з експоненційно малої довжини на макроскопічну. У послідовності відображень першого повернення наступне відображення одержується з попереднього шляхом застосування індукції типу Розі – Віча, а

[1] E-mail: teplinsky.a@gmail.com.

отже дуальність, яка дозволяє обертати час у цьому процесі, буде важливим інструментом у подальших дослідженнях.

Якщо особливі точки ірраціонального дифеоморфізму кола є невиродженими точками зламу (ліва похідна не дорівнює правій, але обидві є додатними; відношення цих похідних вважається розміром зламу), то ренормалізовані відображення першого повернення зі зменшенням довжини розглядуваних околів прямують до певних скінченновимірних просторів. Ці простори складаються з дробово-лінійних функцій, що вперше показано в роботі [10], а у випадку, коли добуток усіх розмірів зламів дорівнює одиниці, — з аффінних функцій, що досліджено, зокрема, в роботах [11, 12].

Логічним наступним кроком буде розширення дуальності з простору схем ПАІ на відповідні простори дробово-лінійних функцій, чому автор планує присвятити майбутні публікації.

Опишемо коротко структуру статті. У пункті 2 наведено базові поняття теорії перекладальних ансамблів інтервалів, у пункті 3 сформульовано основний результат як теорему з трьох частин, у пунктах 4 – 6 доведено частини 1 – 3 теореми відповідно.

2. Базові відомості про ПАІ та перекладання інтервалів. Нагадаємо основні поняття теорії перекладальних ансамблів інтервалів, викладеної в [1].

Нехай $\mathcal{A}$ — алфавіт із $d \geq 1$ символів (вони слугуватимуть мітками для інтервалів із перекладального ансамблю). Розглянемо *подвоєний алфавіт* $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \{\mathrm{b}, \mathrm{e}\}$ (індекси b та e походять від слів beginning (початковий) та ending (кінцевий) відповідно) і будь-яку перестановку σ на цьому подвоєному алфавіті (тобто бієктивне відображення з $\bar{\mathcal{A}}$ на $\bar{\mathcal{A}}$). Цю перестановку називаємо *схемою* перекладального ансамблю інтервалів, а власне *перекладальний ансамбль інтервалів* (ПАІ) — це пара $(\sigma, \mathbf{x})$, у якій до схеми σ доєднано *вектор країв* (крайніх точок інтервалів; ми називаємо їх краями, а не кінцями, щоби уникнути плутанини з початковими та кінцевими інтервалами) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$, координати якого задовольняють рівності

$$x_{\alpha\mathrm{b}} + x_{\alpha\mathrm{e}} - x_{\sigma(\alpha\mathrm{b})} + x_{\sigma(\alpha\mathrm{e})} = 0 \quad \text{для всіх} \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Вектори $\mathbf{x}$, які задовольняють (1), називаємо *дозволеними* схемою σ. Для цього ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$ *вектор довжин* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ означається покоординатно як

$$v_\alpha = x_{\sigma(\alpha\mathrm{b})} - x_{\alpha\mathrm{b}} = x_{\alpha\mathrm{e}} - x_{\sigma(\alpha\mathrm{e})}, \quad \alpha \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Називаємо два ПАІ *еквівалентними з точністю до зсуву*, якщо у них співпадають схеми та вектори довжин. Довільний вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ називається *дозволеним* схемою σ вектором довжин, якщо існує дозволений нею вектор країв, для якого виконуються рівності (2). Пару $(\sigma, \mathbf{v})$ із дозволеним схемою σ вектором довжин $\mathbf{v}$ називаємо *плаваючим ПАІ* на відміну від „закріпленого" ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$. Плаваючий ПАІ можна розглядати як клас еквівалентності закріплених ПАІ, еквівалентних з точністю до зсуву.

У цій статті ми переважно працюватимемо саме з плаваючими ПАІ, регулярно користуючись наступним простим критерієм щодо дозволеності вектора довжин для вказаної схеми. Ключовим фактом є те, що схема σ, як будь-яка перестановка, розкладається на $N \geq 1$ циклів вигляду $c = c(\bar{\xi}) = (\bar{\xi}, \sigma(\bar{\xi}), \ldots, \sigma^k(\bar{\xi}))$, $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}$, де $k \geq 0$, $\sigma^{k+1}(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$, $\sigma^i(\bar{\xi}) \neq \bar{\xi}$ для $0 < i \leq k$, $c(\bar{\xi})$ і $c(\sigma^i(\bar{\xi}))$ ототожнюються між собою.

Твердження 1. *Вектор довжин* $\mathbf{v}$ *є дозволеним схемою ПАІ* σ *тоді й лише тоді, коли для кожного її циклу* $c = c(\bar{\xi})$, $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}$, *виконується рівність*

$$\sum_{\alpha\,:\,\alpha\mathrm{b}\in c} v_\alpha = \sum_{\alpha\,:\,\alpha\mathrm{e}\in c} v_\alpha. \tag{3}$$

Доведення. Нехай вектор довжин $\mathbf{v}$ є дозволеним схемою σ. Тоді існує вектор країв $\mathbf{x}$, для якого виконуються рівності (2). Згідно з ними $x_{\sigma(\bar\eta)} - x_{\bar\eta} = v_\alpha$ для $\bar\eta = \alpha\mathrm{b}$ та $x_{\sigma(\bar\eta)} - x_{\bar\eta} = -v_\alpha$ для $\bar\eta = \alpha\mathrm{e}$, і рівності (3) випливають з тотожностей

$$\sum_{\bar\eta\in c(\bar\xi)} (x_{\sigma(\bar\eta)} - x_{\bar\eta}) = (x_{\sigma(\bar\xi)} - x_{\bar\xi}) + (x_{\sigma^2(\bar\xi)} - x_{\sigma(\bar\xi)}) + \ldots + (x_{\bar\xi} - x_{\sigma^k(\bar\xi)}) = 0$$

уздовж кожного циклу $c(\bar\xi)$.

Нехай тепер для вектора $\mathbf{v}$ виконуються рівності (3). Для кожного з циклів $c(\bar\xi)$ у складі схеми σ задамо координату краю $x_{\bar\xi}$ довільним чином, а решту країв визначимо за таким алгоритмом: якщо значення $x_{\bar\eta}$ вже визначено, а $x_{\sigma(\bar\eta)}$ ще ні, то покладаємо $x_{\sigma(\bar\eta)} = x_{\bar\eta} + v_\alpha$ у випадку $\bar\eta = \alpha\mathrm{b}$ і $x_{\sigma(\bar\eta)} = x_{\bar\eta} - v_\alpha$ у випадку $\bar\eta = \alpha\mathrm{e}$. В силу рівностей (3) ці ж співвідношення виконуються і для $\bar\eta = \sigma^k(\bar\xi)$, а отже вектор країв $\mathbf{x}$ є дозволеним, і $\mathbf{v}$ задовольняє (2).

Твердження доведено.

Ключову роль у теорії ПАІ відіграє поняття дуальності, яке обертає час при застосуванні до схеми ПАІ індукції типу Розі – Віча (у пп. 5.1 наведено означення елементарних кроків цієї індукції). Дві схеми ПАІ σ і σ^* називаємо *дуальними* одна до одної, якщо

$$\sigma^*(\alpha\mathrm{b}) = \sigma(\alpha\mathrm{e}), \qquad \sigma^*(\alpha\mathrm{e}) = \sigma(\alpha\mathrm{b}) \quad \text{для всіх} \quad \alpha\in\mathcal{A}. \tag{4}$$

Саме через дуальність ми означимо ротаційні схеми перекладання інтервалів у наступному пункті.

Схема ПАІ називається *незвідною*, якщо з рівності $\sigma(\bar{\mathcal{A}}_0) = \bar{\mathcal{A}}_0$, де $\bar{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0 \times \{\mathrm{b},\mathrm{e}\}$, для підмножини алфавіту $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ випливає $\mathcal{A}_0 \in \{\varnothing, \mathcal{A}\}$. З означення дуальності (4) легко бачити, що $\sigma(\bar{\mathcal{A}}_0) = \sigma^*(\bar{\mathcal{A}}_0)$ для будь-якої підмножини $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, а отже з незвідності σ випливає незвідність σ^* і навпаки. Якщо схема не є незвідною, то ПАІ з такою схемою фактично розпадається на два чи кілька ПАІ, які ніяк не пов'язані між собою, тому в дослідженні питань динаміки є сенс обмежитися розглядом ПАІ з незвідними схемами.

З твердження 2 з роботи [1] випливає, що у випадку незвідної схеми σ з-поміж N рівностей (3) лінійно незалежними є в точності $N-1$ (сума всіх рівностей (3) очевидно є тотожністю, тож будь-які $N-1$ з-поміж них є лінійно незалежними).

Називаємо ПАІ *додатним*, якщо його вектор довжин є додатним. Схему ПАІ називаємо *додатною*, якщо вона дозволяє додатний вектор довжин.

Додатний ПАІ слід уявляти як ансамбль із $2d$ інтервалів, спарованих у d пар із мітками $\alpha\in\mathcal{A}$; у кожній такій парі *початковий інтервал* $I_{\alpha\mathrm{b}} = [x_{\alpha\mathrm{b}}, x_{\sigma(\alpha\mathrm{b})})$ та *кінцевий інтервал* $I_{\alpha\mathrm{e}} = [x_{\sigma(\alpha\mathrm{e})}, x_{\alpha\mathrm{e}})$ з тією ж самою міткою α мають однакову довжину v_α. Відповідно до циклів у схемі, всі початкові та кінцеві інтервали з відповідними індексами є зчепленими своїми краями в N зімкнених ланцюжків, тобто одновимірних ламаних ліній. Можна розглядати таку зімкнену ламану як шлях від $x_{\bar\xi}$ до $x_{\sigma(\bar\xi)}$, потім від $x_{\sigma(\bar\xi)}$ до $x_{\sigma^2(\bar\xi)}$ і так далі до повернення в $x_{\bar\xi}$, при цьому кожен початковий інтервал проходиться зліва направо, а кожен кінцевий — справа наліво. Паралельне перенесення кожної з цих N зімкнених одновимірних ламаних ліній на певну відстань, очевидно, залишає в силі рівності (2) і не змінює довжини інтервалів, саме тому ми назвали пару $(\sigma, \mathbf{v})$ плаваючим ПАІ, а відповідні закріплені ПАІ еквівалентними з точністю до зсуву.

У випадку, коли кожен із циклів у схемі σ додатного ПАІ можна розбити на дві дуги, перша з яких складається лише з початкових інтервалів, а друга — лише з кінцевих (тобто кожен цикл має вигляд $c = (\alpha_1\mathrm{b}, \ldots, \alpha_m\mathrm{b}, \beta_n\mathrm{e}, \ldots, \beta_1\mathrm{e})$ для певних міток $\alpha_1, \ldots, \alpha_m,\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{A}$, $n, m \geq 1$), такий ПАІ природно назвати *перекладанням інтервалів* і асоціювати з дискретною динамічною системою (відображенням) на диз'юнктному об'єднанні відповідних до циклів $c_1, \ldots, c_N$ проміжків $J_1, \ldots, J_N$ (а саме, наведеному вище циклу c відповідає проміжок $J = [x_{\alpha_1\mathrm{b}}, x_{\beta_n\mathrm{e}}) = \bigcup_{i=1}^m I_{\alpha_i\mathrm{b}} = \bigcup_{i=1}^n I_{\beta_i\mathrm{e}}$), яка зсуває кожний початковий інтервал на кінцевий інтервал із тою ж міткою з алфавіту $\mathcal{A}$. Твердження 1 у такому випадку стверджує, що вектор довжин є дозволеним схемою тоді й лише тоді, коли для кожного проміжку J сума довжин усіх початкових інтервалів у його складі дорівнює сумі довжин усіх кінцевих. Ми називатимемо перекладанням інтервалів як пару $(\sigma, \mathbf{x})$, так і асоційоване з нею відображення і породжену ним одновимірну динамічну систему. Схему σ у такому випадку називаємо *схемою перекладання інтервалів*. Аналогічно до загальних ПАІ, можна розглядати *плаваючі перекладання інтервалів* $(\sigma, \mathbf{v})$, якщо обмежитись увагою лише до довжин інтервалів, дозволивши при цьому проміжкам $J_1, \ldots, J_N$ соватися уздовж осі, тобто профакторизувавши простір усіх перекладань за відношенням еквівалентності з точністю до зсуву.

Цикли вказаного вигляду $(\alpha_1\mathrm{b}, \ldots, \alpha_m\mathrm{b}, \beta_n\mathrm{e}, \ldots, \beta_1\mathrm{e})$ зручно записувати у більш наочному „дворядковому записі" $c = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_m \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n \end{bmatrix}$ (при цьому цілу схему перекладання інтервалів можна подавати теж у два рядки як множину всіх її циклів $\sigma = \{c_1, \ldots, c_N\},\ N \geq 1$). У термінології [1] такий „дворядковий" цикл називається циклом із нульовим покрученням. Якщо бути точним, то *число покручення* окремого циклу схеми ПАІ σ — це кількість місць у цьому циклі, де за початковим елементом слідує кінцевий, тобто $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$ для якихось $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, мінус одиниця. Якщо цикл складається лише з початкових чи лише з кінцевих елементів, то його число покручення дорівнює -1, але за умови додатності схеми цей випадок неможливий. Число покручення $T(\sigma)$ схеми — це сума чисел покручення усіх її циклів. Відповідно, у такій термінології *схема перекладання інтервалів* — це додатна схема ПАІ з нульовим покрученням, а власне *перекладання інтервалів* — це додатний ПАІ з такою схемою.

Наведене вище означення перекладання інтервалів збігається з класичним тоді, коли його схема складається з єдиного циклу, а лівий край відповідного проміжку знаходиться в початку координат. Ці обмеження не видаються нам природними, і тому ми називаємо перекладанням інтервалів саме більш загальну конструкцію на багатьох проміжках. У пункті 3 роботи [1], до того як означити ПАІ, автор сформулював означення перекладання інтервалів на багатьох проміжках у класичному дусі. Можна порівняти наскільки означення перекладання інтервалів в рамках концепції ПАІ є менш громіздким.

3. Ротаційні схеми і основний результат. Коли σ є схемою перекладання інтервалів, дуальна до неї схема σ^* не обов'язково, але може також бути схемою перекладання інтервалів, і перекладання інтервалів із такою властивістю складають важливий спеціальний клас, який є предметом даної статті. Отже, назвемо схему перекладання інтервалів *ротаційною*, якщо дуальна до неї також є схемою перекладання інтервалів. А власне перекладання інтервалів з ротаційною схемою назвемо *ротаційним перекладанням інтервалів*.

Повним покрученням схеми ПАІ σ в [1] названо величину $T(\sigma) + T(\sigma^*)$, тобто суму чисел покручення схем σ і σ^*. У такій термінології *ротаційна* схема — це схема ПАІ, яка разом із дуальною є додатною і має нульове повне покручення, а власне *ротаційне перекладання інтервалів* — це додатний ПАІ з такою схемою. Відповідно до п. 10 роботи [1], це саме ті схеми, додатним натуральним розширенням яких відповідають трансляційні поверхні топологічного роду $g = 1$, тобто тори, без особливих точок.

Зрозуміло, що клас усіх ротаційних схем є замкненим щодо операції дуальності. Але чому ми назвали такі перекладання інтервалів та їхні схеми саме „ротаційними”? Тому, що вони безпосередньо пов’язані з поворотами кола. Точне твердження про цей зв’язок і є основним результатом статті, сформульованим у цьому пункті.

Поворотом кола довжини $L > 0$ на відстань M називається відображення

$$R_{L,M} : a \mapsto a + M, \quad a \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}, \tag{5}$$

де фактор-простір $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ власне і є колом довжини L. Поворот кола називається *ірраціональним*, якщо його *число обертання* $\rho = \{M/L\} \notin \mathbb{Q}$. Тут $\{\cdot\}$ позначає дробову частину дійсного числа.

Альтернативно, поворотом кола можна вважати його проєкцію на довільно обраний напіввідкритий проміжок $[x_0, x_0 + L)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, тобто кусково-лінійне відображення

$$R_{L,M} : \; x \mapsto x + M - \left[\frac{x + M - x_0}{L}\right] L, \quad x \in [x_0, x_0 + L), \tag{6}$$

яке, як легко переконатись, є ротаційним перекладанням (двох) інтервалів. Тут $[\cdot]$ позначає цілу частину дійсного числа.

Називатимемо *дугою* будь-який напіввідкритий проміжок на колі. Далі ми розглядатимемо об’єднання скінченної кількості дуг і згідно з альтернативним означенням (6) інтерпретуватимемо кожен такий об’єкт як об’єднання скінченної кількості напіввідкритих проміжків дійсної прямої. Якщо таке *об’єднання дуг* (для скорочення пропускатимемо слова „скінченної кількості”, бо розглядатимемо лише такі) не вкриває все коло повністю, то природно вибрати за x_0 проєкцію на $\mathbb{R}$ якої-небудь точки кола, що не належить до внутрішності жодної з дуг. Також природно вважати окремими проміжками цього об’єднання максимальні (тобто якщо дві дуги перекриваються чи дотикаються краями, то їхні проєкції на $\mathbb{R}$ слід об’єднати в один проміжок). У випадку, коли об’єднанням дуг є все коло, край x_0 можна взяти будь-де й інтерпретувати це об’єднання дуг як цілий дійсний проміжок $[x_0, x_0 + L)$.

Тепер можемо сформулювати основним результат статті. Варто зазначити, що найбільш важливою у цій теоремі є її третя частина, тоді як перші дві лише доповнюють третю: якісні (дискретні) дані є важливішими за кількісні (дійсні), бо простір дозволених довжин ПАІ визначається його схемою, а не навпаки. Але логіка саме такого впорядкування частин теореми полягає в тому, що доведення третьої з них відбувається на основі доведень перших двох (а в дечому третя частина є безпосереднім наслідком першої та другої, докладніше див. у п. 6). Доведення теореми є конструктивним у тому сенсі, що існування всіх шуканих об’єктів доводиться шляхом їх алгоритмічної побудови. Зокрема, звертаємо увагу на введений у пп. 5.7 канонічний вигляд ротаційного перекладання інтервалів, який пов’язаний із так званими динамічними розбиттями кола (див. [9]) і є найзручнішим „посередником” між загальними ротаційними перекладаннями інтервалів та поворотами кола.

Теорема 1. 1. *Для будь-якого ірраціонального повороту кола відображення першого повернення на будь-яку множину, яка є об’єднанням дуг, являє собою незвідне ротаційне перекладання інтервалів.*

2. *Для будь-якого незвідного ротаційного перекладання інтервалів існує еквівалентне йому з точністю до зсуву відображення першого повернення для повороту кола на об’єднання дуг.*

3. *Незвідна схема перекладання інтервалів є ротаційною тоді й лише тоді, коли існує таке відображення першого повернення для ірраціонального повороту кола на об'єднання дуг, яке являє собою перекладання інтервалів із цією схемою.*

***Зауваження* 1.** Теорему сформульовано для незвідних схем та перекладань, яким у кожному випадку відповідає якийсь поворот кола. Якщо схема перекладання інтервалів складається з кількох незвідних компонент, то динамічна система розпадається на відповідну кількість незалежних одна від одної систем, а тому і відображення першого повернення мусить розглядатися для об'єднання відповідної кількості поворотів кола. Отже, частини 2 і 3 теореми можна переформулювати, пропустивши у них згадку про незвідність перекладань та схем, натомість замінивши поворот кола на об'єднання поворотів кола (у частині 3 — ірраціональних поворотів) у кількості, що дорівнює кількості незвідних компонент схеми.

***Зауваження* 2.** Варто спеціально роз'яснити, чому в частинах 1 і 3 вказується на ірраціональність повороту кола, а в частині 2 не вказується. Справа в тому, що коли перекладання інтервалів є відображенням першого повернення на об'єднання дуг для ірраціонального повороту кола, то мале збурення параметрів такої системи дає перекладання інтервалів з тією ж самою схемою, яке є відображенням першого повернення на об'єднання дуг для раціонального повороту кола (близького до вихідного ірраціонального). Відповідно, кожна така схема (і згідно з третім твердженням теореми це правильно для всіх ротаційних схем) дозволяє як ірраціональні, так і раціональні (у вищевказаному сенсі) перекладання. Але, з іншого боку, існують схеми перекладань інтервалів, які дозволяють виключно раціональні перекладання, а саме, схеми, що містять ланцюжок циклів вигляду

$$\left\{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix};\ \ldots;\ \begin{bmatrix}\alpha_m\\ \alpha_1\end{bmatrix}\right\}$$

чи просто цикл вигляду $\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$. Власне такі періодичні ланцюжки циклів у схемі є квінтесенцією раціональних перекладань: одна дуга проходить певну траєкторію по колу, зрештою повертаючись на себе. Дуальна до такої схема ПАІ містить пару циклів

$$\left\{\begin{bmatrix}\alpha_m & \ldots & \alpha_1\\ & \varnothing & \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} & \varnothing & \\ \alpha_m & \ldots & \alpha_1\end{bmatrix}\right\}$$

(тут $\varnothing$ позначає відсутність елементів у рядку) і очевидно не є додатною. Такі схеми перекладань інтервалів мають від'ємне повне покручення, і їхні натуральні розширення не утворюють жодних трансляційних поверхонь. Тому ми не називаємо подібні схеми та перекладання інтервалів із ними ротаційними, хоча такі перекладання можуть бути відображеннями першого повернення для поворотів кола (але лише раціональних!) на певні об'єднання дуг.

4. Доведення першої частини теореми. ***4.1. Фінітність першого повернення.*** Нагадаємо, що собою являє відображення першого повернення для динамічної системи з дискретним часом на підмножину її фазового простору. Нехай таку динамічну систему задано відображенням $f: X \to X$, а непорожня підмножина $\Gamma \subset X$ має таку властивість: для кожної точки $x \in \Gamma$ існує натуральне число n таке, що $f^n(x) \in \Gamma$, тобто траєкторія точки x повертається на множину Γ через певний час n. Позначимо як $n(x, f, \Gamma)$ *час першого повернення* точки x під дією f на множину Γ, тобто найменше з таких чисел: $f^i(x) \notin \Gamma$ для всіх $1 \leq i < n(x, f, \Gamma)$, а $f^{n(x,f,\Gamma)}(x) \in \Gamma$. Відображення $f_\Gamma : x \mapsto f^{n(x,f,\Gamma)}(x)$ і називають *відображенням першого повернення* для f на Γ. Очевидно, що воно задає вже на цій підмножині нову, індуковану, динамічну систему з дискретним часом $f_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$.

Згідно з означенням, для заданого числа $n \geq 1$ усі точки $x \in \Gamma$, для яких $n(x, f, \Gamma) = n$, складають множину $\Gamma_n = \Gamma \cap f^{-n}(\Gamma) \backslash f^{-(n-1)}(\Gamma) \backslash \ldots \backslash f^{-1}(\Gamma)$; має місце диз'юнктний розклад $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Gamma_n$, $\Gamma_n \cap \Gamma_m = \varnothing$ при $n \neq m$, і співвідношення $f_\Gamma(x) = f^n(x)$ для всіх $x \in \Gamma_n$, $n \geq 1$.

Покажемо, що у випадку повороту кола $R = R_{M,L}$ перше повернення на об'єднання скінченної кількості його дуг Γ завжди є *фінітним*, тобто множина часів першого повернення усіх точок цього об'єднання $\{n(x, f, \Gamma) | x \in \Gamma\}$ є обмеженою.

Якщо число обертання є раціональним, тобто $\rho = M/L = p/q$, де p і q — взаємно прості натуральні числа, то має місце тотожність $R^q(x) \equiv x$, і тому $n(x, R, \Gamma) \leq q$ для всіх x на колі, а отже, відображення першого повернення для раціонального повороту кола на будь-яку підмножину (не лише на об'єднання дуг) завжди є визначеним і фінітним.

Нехай тепер число обертання ρ є ірраціональним. У цьому випадку траєкторія кожної точки x є скрізь щільною на колі, а отже для кожного $\delta > 0$ існує натуральне число n_0, для якого на колі не залишається жодного проміжку довжини δ, вільного від точок зі скінченного відрізка цієї траєкторії $(R^i(x))_{i=1}^{n_0}$, причому, оскільки всі траєкторії повороту кола влаштовані однаково, це n_0 не залежить від x. Взявши за δ довжину найкоротшої дуги з об'єднання Γ, отримаємо обмеження $n(x, R, \Gamma) \leq n_0$ для всіх x на колі.

Ми показали, що перше повернення для R на Γ справді є фінітним: $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{n_0} \Gamma_n$ для певного скінченного n_0. А оскільки перетин чи об'єднання двох скінченних об'єднань дуг також є скінченним об'єднанням дуг, то кожна з множин Γ_n так само є об'єднанням скінченної кількості дуг, на кожній з яких відображення першого повернення R_Γ є зсувом (на відстань nM). Інтерпретуючи дуги на колі як інтервали на дійсній прямій у межах певного проміжку $[x_0, x_0 + L)$, одержуємо таке твердження.

Твердження 2. *Для будь-якого повороту кола відображення першого повернення на будь-яке об'єднання скінченної кількості дуг являє собою перекладання інтервалів.*

Якщо поворот кола був ірраціональним, то отримане перекладання інтервалів завжди є незвідним внаслідок мінімальності такого повороту.

4.2. Ротаційність першого повернення. Нехай дано ірраціональний поворот кола (5), (6) і скінченне об'єднання дуг Γ, яке будемо інтерпретувати як набір попарно неперетинних напіввідкритих проміжків на дійсній прямій у межах $[x_0, x_0 + L)$. Згідно з твердженням 2, відображення першого повернення $R_\Gamma : \Gamma \to \Gamma$ є перекладанням інтервалів. Покажемо, що схема цього перекладання інтервалів, розглянутого як ПАІ, є ротаційною згідно з означенням, тобто дуальна до неї схема ПАІ також є схемою перекладання інтервалів.

Для того щоб записати схему ПАІ для перекладання інтервалів R_Γ, позначимо кожний з інтервалів у цьому перекладанні окремим символом, склавши з них алфавіт $\mathcal{A}$. Множина Γ є, з одного боку, об'єднанням усіх попарно неперетинних інтервалів $I_{\alpha\mathrm{b}}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, а з іншого — об'єднанням їхніх (також попарно неперетинних) образів $I_{\alpha\mathrm{e}} = \Gamma(I_{\alpha\mathrm{b}})$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Кожний окремий проміжок у складі Γ у свою чергу розбивається, з одного боку, на декілька початкових інтервалів $I_{\alpha_1\mathrm{b}}, \ldots, I_{\alpha_m\mathrm{b}}$ (рахуємо зліва направо), а з іншого — на кілька кінцевих інтервалів $I_{\beta_1\mathrm{e}}, \ldots, I_{\beta_n}\mathrm{e}$ (так само зліва направо); у схемі σ цьому проміжку відповідає цикл $(\alpha_1\mathrm{b}, \ldots, \alpha_m\mathrm{b}, \beta_n\mathrm{e}, \ldots, \beta_1\mathrm{e})$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A}$, $n, m \geq 1$. Загальний масив країв інтервалів $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\bar{\mathcal{A}}}$, де $x_{\alpha\mathrm{b}}$ — лівий край початкового інтервалу $I_{\alpha\mathrm{b}}$, а $x_{\beta\mathrm{e}}$ — правий край кінцевого інтервалу $I_{\beta\mathrm{e}}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, складає дійсну компоненту ПАІ $(\sigma, \mathbf{x})$.

Усі краї інтервалів заданого перекладання інтервалів наочно розділяються на чотири типи: тип L (left) — ліві краї окремих проміжків у складі Γ, у вищенаведеному прикладі це точка $x_{\alpha_1\mathrm{b}}$; тип R (right) — праві краї окремих проміжків у складі Γ, у вищенаведеному прикладі це $x_{\beta_1\mathrm{e}}$; тип MB (middle beginning) — точки, у яких з'єднуються якісь два початкові інтервали, у прикладі вище це $x_{\alpha_i\mathrm{b}}$, $i \neq 1$; тип ME (middle ending) — точки, у яких з'єднуються якісь два кінцеві інтервали, у прикладі вище це $x_{\beta_j\mathrm{e}}$, $j \neq 1$. З точки зору ПАІ, перелічені типи мають не самі дійсні числа $x_{\bar{\xi}}$, а їхні індекси: $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}$ має тип L, якщо $\bar{\xi} = \xi\mathrm{b}$ і $\sigma^{-1}(\bar{\xi}) = \eta\mathrm{e}$; тип R, якщо $\bar{\xi} = \xi\mathrm{e}$ і $\sigma^{-1}(\bar{\xi}) = \eta\mathrm{b}$; тип MB, якщо $\bar{\xi} = \xi\mathrm{b}$ і $\sigma^{-1}(\bar{\xi}) = \eta\mathrm{b}$; тип ME, якщо $\bar{\xi} = \xi\mathrm{e}$ і $\sigma^{-1}(\bar{\xi}) = \eta\mathrm{e}$, для якихось $\xi, \eta \in \mathcal{A}$.

Варто зауважити, що кожен із окремих проміжків у складі Γ (яким відповідають окремі цикли у складі перестановки σ) має рівно один край типу L і рівно один край типу R (це власне його лівий і правий краї відповідно), тоді як країв інтервалів типів MB і ME на ньому може бути будь-яка скінченна кількість, зокрема нульова.

Розглянемо довільний край $x_{\xi_1\mathrm{b}}$ типу MB (а отже, $\sigma^{-1}(\xi_1\mathrm{b}) = \eta_1\mathrm{b}$, $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{A}$) і прослідкуємо за динамічними траєкторіями його лівого $x^-_{\xi_1\mathrm{b}} = (x_{\xi_1\mathrm{b}} - \varepsilon, x_{\xi_1\mathrm{b}})$, $\varepsilon \to 0$, і правого $x^+_{\xi_1\mathrm{b}} = (x_{\xi_1\mathrm{b}}, x_{\xi_1\mathrm{b}} + \varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, інфінітезимальних півоколів. (Очевидно, що для достатньо малого конкретного $\varepsilon > 0$ послідовні образи таких півоколів під дією R_Γ не накривають жодного з країв протягом достатньо довгого часу, зокрема залишаючись цілими інтервалами, а отже, інфінітезимальний розгляд є коректним.)

Інтервал $I_{\xi_1\mathrm{b}}$, лівим краєм якого є $x_{\xi_1\mathrm{b}}$, відображається R_Γ на інтервал $I_{\xi_1\mathrm{e}}$, відповідно правий півокіл $x^+_{\xi_1\mathrm{b}}$ відображається на правий півокіл лівого краю $I_{\xi_1\mathrm{e}}$, тобто на $x^+_{\sigma(\xi_1\mathrm{e})}$. Тепер є два варіанти: або цей край має тип ME, тобто $\sigma(\xi_1\mathrm{e}) = \eta_*\mathrm{e}$, $\eta_* \in \mathcal{A}$, або тип L, тобто $\sigma(\xi_1\mathrm{e}) = \xi_2\mathrm{b}$, $\xi_2 \in \mathcal{A}$. У першому випадку ми зупиняємося, а в другому продовжуємо слідкувати за траєкторією півоколу. Аналогічно до початкового кроку, $x^+_{\sigma(\xi_1\mathrm{e})} = x^+_{\xi_2\mathrm{e}}$ відображається на $x^+_{\sigma(\xi_2\mathrm{e})}$, і знову маємо два варіанти: або край $x_{\sigma(\xi_2\mathrm{e})}$ має тип ME, тобто $\sigma(\xi_2\mathrm{e}) = \eta_*\mathrm{e}$, $\eta_* \in \mathcal{A}$, або тип L, тобто $\sigma(\xi_2\mathrm{e}) = \xi_3\mathrm{b}$, $\xi_3 \in \mathcal{A}$. У першому випадку зупиняємося, а в другому продовжуємо слідкувати. На якомусь кроці процес зупиниться, тому що країв типу L скінченна кількість, а відображення R_Γ не має періодичних траєкторій внаслідок ірраціональності вихідного повороту кола. Отже, після зупинки ми одержимо послідовність індексів $\xi_1\mathrm{b}$, $\xi_2\mathrm{b} = \sigma(\xi_1\mathrm{b}), \ldots, \xi_m\mathrm{b} = \sigma(\xi_{m-1}\mathrm{b})$, $\eta_*\mathrm{e} = \sigma(\xi_m\mathrm{b})$ і відповідну послідовність півоколів $x^+_{\xi_1\mathrm{b}}$, $x^+_{\xi_2\mathrm{b}} = R_\Gamma(x^+_{\xi_1\mathrm{b}}), \ldots, x^+_{\xi_m\mathrm{b}} = R_\Gamma(x^+_{\xi_{m-1}\mathrm{b}})$, $x^+_{\eta_*\mathrm{e}} = R_\Gamma(x^+_{\xi_m\mathrm{b}})$, де краї $x_{\xi_1\mathrm{b}}, x_{\xi_2\mathrm{b}}, \ldots, x_{\xi_m\mathrm{b}}, x_{\eta_*\mathrm{e}}$ мають типи MB, L, ..., L, ME відповідно; $\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_* \in \mathcal{A}$, $m \geq 1$.

Розглянемо тепер траєкторію лівого півокола того ж самого початкового краю типу MB. Інтервал $I_{\eta_1\mathrm{b}}$, правим краєм якого є $x_{\xi_1\mathrm{b}}$, відображається R_Γ на інтервал $I_{\eta_1\mathrm{e}}$, відповідно лівий півокіл $x^-_{\xi_1\mathrm{b}}$ відображається на лівий півокіл правого краю $I_{\eta_1\mathrm{e}}$, тобто власне на $x^-_{\eta_1\mathrm{e}}$. Є два варіанти: або цей край має тип ME, тобто $\eta_1\mathrm{e} = \sigma(\xi_*\mathrm{e})$, $\xi_* \in \mathcal{A}$, або тип R, тобто $\eta_1\mathrm{e} = \sigma(\eta_2\mathrm{b})$, $\eta_2 \in \mathcal{A}$. У першому випадку ми зупиняємося, а в другому продовжуємо слідкувати за траєкторією півоколу. Аналогічно до початкового кроку, інтервал $I_{\eta_2\mathrm{b}}$, правим краєм якого є $x_{\eta_1\mathrm{e}}$, відображається на інтервал $I_{\eta_2\mathrm{e}}$, відповідно $x^-_{\eta_1\mathrm{e}}$ відображається на $x^-_{\eta_2\mathrm{e}}$. Знову два випадки: або $x_{\eta_2\mathrm{e}}$ має тип ME, тобто $\eta_2\mathrm{e} = \sigma(\xi_*\mathrm{e})$, $\xi_* \in \mathcal{A}$, або тип R, тобто $\eta_2\mathrm{e} = \sigma(\eta_3\mathrm{b})$, $\eta_3 \in \mathcal{A}$. У першому випадку зупиняємося, а в другому продовжуємо слідкувати. На якомусь кроці процес зупиниться, оскільки R_Γ не має періодичних траєкторій, і ми зрештою одержимо послідовність індексів $\xi_1\mathrm{b}$, $\eta_1\mathrm{b} = \sigma^{-1}(\xi_1\mathrm{b})$, $\eta_2\mathrm{b} = \sigma^{-1}(\eta_1\mathrm{e}), \ldots, \eta_n\mathrm{b} = \sigma^{-1}(\eta_{n-1}\mathrm{b})$ і послідовність півоколів $x^-_{\xi_1\mathrm{b}}$, $x^-_{\eta_1\mathrm{e}} = R_\Gamma(x^-_{\xi_1\mathrm{b}})$, $x^-_{\eta_2\mathrm{e}} = R_\Gamma(x^-_{\eta_1\mathrm{e}}) \ldots, x^-_{\eta_n\mathrm{e}} = R_\Gamma(x^-_{\eta_{n-1}\mathrm{e}})$, де краї $x_{\xi_1\mathrm{b}}$, $x_{\eta_1\mathrm{e}}, \ldots, x_{\eta_n\mathrm{e}}$ мають типи MB, R, …, R, ME відповідно; $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$.

Залишилося зазначити, що з необхідністю $x_{\eta_n\mathrm{e}} = x_{\eta_*\mathrm{e}}$, а отже, $\eta_* = \eta_n$. Чому це так? Тому, що R_Γ є відображенням першого повернення для повороту кола на об'єднання дуг Γ. Поворот кола R є неперервним відображенням, а отже, під його дією лівий і правий півоколи кожної точки ніколи не розділяються. Тому у момент, коли внутрішня точка (така як край типу MB) множини Γ вперше повертається у внутрішню точку (край типу ME) множини Γ, її лівий та правий півоколи зустрічаються знову, хоча до цього могли кілька разів пройти по межі (краї типу L та R) множини Γ. Навіть більше, загальний час (у термінах кількості ітерацій R) повернення двох півоколів від їх розділення в точці $x_{\xi_1\mathrm{b}}$ до нової зустрічі в точці $x_{\eta_n\mathrm{e}}$ є однаковим для лівого і для правого. Це означає наступне. Згадаємо, що кожний початковий інтервал $I_{\alpha\mathrm{b}}$ перекладання R_Γ є підмножиною однієї з множин Γ_k точок, які повертаються на Γ рівно за k ітерацій повороту кола R, $1 \leq k \leq k_0$, і позначимо цей час k_α, $\alpha \in \mathcal{A}$. Відповідно, для дослідженої вище траєкторії правого півоколу $x^+_{\xi_1\mathrm{b}}$ сумарний час до досягнення ним точки $x_{\eta_n\mathrm{e}}$ в термінах кількості ітерацій R дорівнює $k_{\xi_1} + \ldots + k_{\xi_m}$, а для лівого півоколу $x^-_{\xi_1\mathrm{b}}$ цей час дорівнює $k_{\eta_1} + \ldots + k_{\eta_n}$. З огляду на зазначене вище, ці часи з необхідністю є рівними, тобто маємо $\sum_{i=1}^m k_{\xi_i} = \sum_{j=1}^n k_{\eta_j}$ для кожного краю типу MB перекладання інтервалів R_Γ.

Можемо тепер виписати в явній формі перекладання інтервалів зі схемою ПАІ, дуальною до σ. Ця дуальна схема σ^* складається з усіх циклів $(\xi_1\mathrm{b}, \ldots, \xi_m\mathrm{b}, \eta_n\mathrm{e}, \ldots, \eta_1\mathrm{e})$, побудованих для всіх країв типу MB у перекладанні R_Γ. Жодні два різних із цих циклів не мають спільних елементів, бо перекладання є бієктивним відображенням. З іншого боку, кожен елемент $\bar{\mathcal{A}}$ входить до якогось із цих циклів, бо ми врахували всі точки типу MB. Точок типу ME є така сама кількість, як і точок типу MB, а півокіл кожної з точок типів L і R за певну кількість ітерацій необхідно потрапляє в точку типу ME, і тому ці точки також усі враховано. Дуальність σ^* до σ легко перевірити за означенням (4) з огляду на співвідношення, одержані при дослідженні траєкторій півоколів краю $x_{\xi_1\mathrm{b}}$. Щоб показати, що схема σ^* є додатною, покладемо для кожного виписаного вище циклу $y_{\xi_i\mathrm{b}} = \sum_{s=1}^{i-1} k_{\xi_s}$, $1 \leq i \leq m$, і $y_{\eta_j\mathrm{e}} = \sum_{t=1}^{j} k_{\eta_t}$, $1 \leq j \leq n$, визначивши тим самим вектор країв $\mathbf{y}$, дозволений схемою σ^* в силу рівностей $\sum_{i=1}^m k_{\xi_i} = \sum_{j=1}^n k_{\eta_j}$. Відповідний до нього вектор довжин складається з додатних (і навіть цілочислових) компонент k_ξ, $\xi \in \mathcal{A}$, а отже, ПАІ $(\sigma^*, \mathbf{y})$ дійсно є перекладанням інтервалів.

Частину 1 теореми 1 доведено.

***Зауваження* 3.** Для доведення зазначеного твердження нами було для перекладання інтервалів, індукованого на підмножині кола його поворотом, конструктивно побудовано дуальну систему перекладання інтервалів з використанням відрізків часу в ролі просторових відрізків.

5. Доведення другої частини теореми. У цьому пункті ми доведемо частину 2 теореми 1, виклавши алгоритм побудови за даним ротаційним перекладанням інтервалів такого ірраціонального повороту кола і такого об'єднання дуг, що відповідне відображення першого повернення є еквівалентним до вихідного перекладання з точністю до зсуву.

Отже, нехай дано незвідне ротаційне перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{x})$. Оскільки все одно йдеться про еквівалентність перекладань з точністю до зсуву, то буде достатньо від початку розглядати плаваюче ПАІ $(\sigma, \mathbf{v})$, тобто обмежитися розглядом довжин інтервалів і не зважати на координати їх країв.

Ми будемо послідовно застосовувати до нього два типи операцій: перший — це зворотний крок індукції (він продукуватиме нову динамічну систему, для якої вихідна є відображенням першого повернення), другий — це злиття двох сусідніх інтервалів в один (він не змінюватиме динамічну систему взагалі, лише зменшуватиме кількість інтервалів у перекладанні).

5.1. Елементарні кроки індукції. Нагадаємо, що таке чотири елементарні індукційні кроки $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$, означені в [1]. Це є операції перетворення, які можуть бути застосовними до ПАІ (і, зокрема, до перекладання інтервалів) або окремо до їх схем і узагальнюють класичні індукційні кроки Розі – Віча. За сутністю їх дії ми називаємо ці чотири кроки „обрізання початкового інтервалу справа”, „обрізання кінцевого інтервалу справа”, „обрізання початкового інтервалу зліва” і „обрізання кінцевого інтервалу зліва” відповідно. Загальні формули для чотирьох елементарних кроків індукції наведено в п. 7 роботи [1], також там пояснено, що кроки $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ і $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$ є застосовними до схеми ПАІ σ за умови $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$, а кроки $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ та $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ — за умови $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{b}$. У термінах циклів перестановки σ ці операції діють таким чином: крок $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ (кроки $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$) переміщує елемент $\beta\mathrm{e}$ (елементи $\alpha\mathrm{b}$, $\beta\mathrm{e}$, $\alpha\mathrm{b}$) з його поточної позиції у позицію просто перед $\alpha\mathrm{e}$ (просто після $\beta\mathrm{b}$, просто після $\alpha\mathrm{e}$, просто перед $\beta\mathrm{b}$). У векторі довжин $\mathbf{v}$ змінюється одна компонента: кроки $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ і $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ віднімають величину v_β від компоненти v_α, а кроки $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$ і $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ — величину v_α від компоненти v_β. Зворотні кроки $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$ є застосовними до схеми ПАІ σ за умов $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{e}$, $\sigma(\beta\mathrm{b}) = \alpha\mathrm{b}$, $\sigma(\alpha\mathrm{e}) = \beta\mathrm{e}$, $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{b}$ відповідно. На довжинах: зворотні кроки $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$ додають величину v_β до компоненти v_α, а кроки $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$ — величину v_α до компоненти v_β.

Пояснимо тепер, як ці кроки працюють щодо (плаваючих) перекладань інтервалів, використавши дворядковий запис для циклів їхніх схем. Фактично точно так само працює класична індукція Розі – Віча, але вона діє на одному проміжку і лише з правого його краю, тоді як ми маємо справу з перекладаннями інтервалів на багатьох проміжках і застосовуємо індукційні кроки з обох країв.

Для того щоб перекладання інтервалів залишилося перекладанням інтервалів після застосування кроку індукції чи зворотного кроку індукції, потрібно додатково до описаних вище умов забезпечити, щоб усі компоненти вектора довжин залишилися додатними, а також щоб схема залишилася непокрученою (тобто кожен цикл у ній мав число покручення нуль — був „дворядковим”, див. означення у п. 2).

Розглянемо докладно крок $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$. Умова його застосування $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$ означає, що початковий $I_{\alpha\mathrm{b}}$ і кінцевий $I_{\beta\mathrm{e}}$ інтервали прилягають до правого кінця одного й того самого проміжку J, тобто у дворядковому записі один із циклів схеми має вигляд $\begin{bmatrix} \ldots & \alpha \\ \ldots & \beta \end{bmatrix}$. Оскільки $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ віднімає від довжини v_α довжину v_β (відрізаючи кінцевий інтервал $I_{\beta\mathrm{e}}$ від проміжку, при цьому „обрізаючи початковий інтервал $I_{\alpha\mathrm{b}}$ справа” на v_β), то для додатності одержаного вектора довжин необхідною і достатньою умовою є нерівність $v_\alpha > v_\beta$, тобто $I_{\alpha\mathrm{b}}$ має бути довшим за $I_{\beta\mathrm{e}}$. Якщо ця умова виконується, то інтервал $I_{\beta\mathrm{e}}$ не може бути єдиним кінцевим на проміжку J, бо сума довжин кінцевих інтервалів на проміжку завжди дорівнює сумі довжин початкових, і тому зліва до $I_{\beta\mathrm{e}}$ прилягає якийсь інший кінцевий інтервал $I_{\gamma\mathrm{e}}$, тобто $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \gamma\mathrm{e}$ для якогось $\gamma \in \mathcal{A}$. У дворядковому записі схема перетворюється таким чином (ми показуємо лише задіяні у зміні цикли, усі решта циклів не змінюються):

$$\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}: \begin{bmatrix} \dots & \alpha \\ \dots & \gamma\,\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \alpha & \dots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \dots & \alpha \\ \dots & \gamma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \alpha\,\beta & \dots \end{bmatrix}.$$

(Тут перший цикл відповідає проміжку J, а другий — тому проміжку, на якому лежить кінцевий інтервал $I_{\alpha\mathrm{e}}$; це може бути той самий проміжок J, у якому випадку маємо

$$\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}: \begin{bmatrix} & \dots & & \alpha \\ \dots & \alpha & \dots & \gamma\,\beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & \dots & & \alpha \\ \dots & \alpha\,\beta & \dots & \gamma \end{bmatrix}.$$

Якщо $\gamma = \alpha$, то схема σ під дією $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ не змінюється, змінюється лише довжина v_α.) У всіх випадках за результатом дії $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ проміжок J укорочується справа на v_β — довжину інтервалу $I_{\beta\mathrm{e}}$. Інтервали $I_{\alpha\mathrm{b}}$ та $I_{\alpha\mathrm{e}}$ також укорочуються справа на v_β, при цьому інтервал $I_{\beta\mathrm{e}}$ займає нове місце справа від укороченого на його довжину $I_{\alpha\mathrm{e}}$. Також бачимо, що в усіх випадках усі цикли залишаються непокрученими, і це правильно для всіх (прямих!) елементарних кроків індукції.

Легко бачити, що динамічна система перекладання інтервалів, одержана в результаті описаної дії $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$ на $(\sigma, \mathbf{v})$, є нічим іншим як відображенням першого повернення для вихідної динамічної системи на об'єднання проміжків, де проміжок J укорочено справа на v_β. Справді, всі точки цього об'єднання повертаються на нього за час 1, крім точок інтервалу $I_{\beta\mathrm{b}}$, які повертаються за час 2, — вони спочатку потрапляють на відрізаний інтервал $I_{\beta\mathrm{e}}$ вихідної динамічної системи, а потім відображення перекидає їх на інтервал $I_{\beta\mathrm{e}}$ одержаної динамічної системи, який у вихідній був правою частиною інтервалу $I_{\alpha\mathrm{e}}$.

Решта три індукційних кроки діють аналогічним чином, і так само результатом їх дії кожного разу є відображення першого повернення для вихідної динамічної системи на об'єднання проміжків, один із яких укорочено справа чи зліва. Для наочності опишемо їх дію на схемах так, як це зроблено вище для кроку $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta}$, зауваживши, що крок $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ переводить перекладання інтервалів у перекладання інтервалів тоді й лише тоді, коли $v_\alpha > v_\beta$, а кроки $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$ та $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ — тоді й лише тоді, коли $v_\alpha < v_\beta$:

$$\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}: \begin{bmatrix} \dots & \gamma\,\alpha \\ \dots & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dots & \beta & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \dots & \gamma \\ \dots & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dots & \beta\,\alpha & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix},$$

$$\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}: \begin{bmatrix} \alpha & \dots \\ \beta\,\gamma & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \alpha & \dots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & \dots \\ \gamma & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \beta\,\alpha & \dots \end{bmatrix},$$

$$\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}: \begin{bmatrix} \alpha\,\gamma & \dots \\ \beta & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dots & \beta & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \gamma & \dots \\ \beta & \dots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dots & \alpha\,\beta & \dots \\ & \dots & \end{bmatrix}.$$

Кожен із цих кроків зменшує більшу з двох довжин v_α, v_β на меншу і не змінює всі інші довжини.

Зворотні елементарні кроки індукції $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$ є застосовними до схеми ПАІ σ за умов $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{e}$, $\sigma(\beta\mathrm{b}) = \alpha\mathrm{b}$, $\sigma(\alpha\mathrm{e}) = \beta\mathrm{e}$, $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{b}$ відповідно (див. твердження 3 з [1]). Необхідними і достатніми умовами непокрученості схеми, одержаної зі схеми перекладання інтервалів σ зворотними кроками індукції $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$, є наявність елемента $\gamma \in \mathcal{A}$, для якого виконуються співвідношення $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \gamma\mathrm{e}$,

$\sigma^{-1}(\beta \mathrm{e}) = \gamma \mathrm{b}$, $\sigma^{-1}(\alpha \mathrm{b}) = \gamma \mathrm{e}$ і $\sigma(\beta \mathrm{e}) = \gamma \mathrm{b}$ відповідно. Оскільки дія кроків $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$ на дійсну компоненту ПАІ $\mathbf{v}$ додає довжину v_β до v_α, а дія кроків $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$ — довжину v_α до v_β, то за умови додатності вихідного ПАІ результуючий також є додатним: одна з довжин лише збільшується.

Твердження 3. *Перекладання інтервалів, одержане з ротаційного перекладання інтервалів шляхом застосування до нього елементарного кроку індукції, також є ротаційним.*

Доведення. Згідно з твердженням 6 з [1], кроки індукції не змінюють повного покручення схеми, отже, в даному випадку воно залишається нульовим. Згідно з теоремою 1 з [1], під час перетворення схеми ПАІ під дією елементарного кроку індукції дуальна до неї схема перетворюється під дією зворотного кроку. А оскільки дія зворотного кроку індукції на додатний ПАІ лише збільшує одну з довжин на величину іншої, то дуальна схема залишається додатною.

Твердження доведено.

Аналогічне твердження щодо зворотних кроків індукції є, взагалі кажучи, хибним, що доводить наступний **контрприклад**.

Розглянемо схему $\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \delta \\ \delta & \beta & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta & \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix} \right\}$. Вона має нульове число покручення і є додатною: наприклад, вектор довжин $\mathbf{v} = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, v_\delta) = (1,2,1,1)$ є дозволеним. Дуальна до неї схема $\sigma^* = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \\ \gamma & \beta & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta & \gamma \\ \alpha & \end{bmatrix} \right\}$ так само має нульове покручення і так само є додатною: наприклад, вектор довжин $\mathbf{w} = (w_\alpha, w_\beta, w_\gamma, w_\delta) = (2,1,1,1)$ є дозволеним. Отже, ПАІ $(\sigma, \mathbf{v})$ є ротаційним перекладанням інтервалів. Зворотний елементарний крок індукції $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\gamma\alpha})^{-1}$ є застосовним до нього, і одержана при цьому схема $\sigma' = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma & \beta \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix} \right\}$ знову ж таки має покручення нуль і є додатною: вектор довжин $\mathbf{v} = (1,2,1,1)$ перетворюється на $\mathbf{v}' = (2,2,1,1)$. Відповідно, одержаний ПАІ $(\sigma', \mathbf{v}') = (\Pi^{\mathrm{le}}_{\gamma\alpha})^{-1}(\sigma, \mathbf{v})$ є перекладанням інтервалів. Але це перекладання не є ротаційним: дуальна до σ' схема $(\sigma')^* = \Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\gamma}\sigma^* = \left\{ \begin{bmatrix} \beta & & \\ \gamma & \beta & \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta & \alpha & \gamma \\ \alpha & & \end{bmatrix} \right\}$ хоча і має покручення нуль, але вочевидь не є додатною, бо дозволені нею вектори довжин $\mathbf{u} = (u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, u_\delta)$ визначаються умовою $u_\gamma + u_\delta = 0$.

5.2. Операція злиття інтервалів. Якщо у перекладанні інтервалів якісь два сусідні інтервали зсуваються на однакову відстань, то їх природно злити в один: динамічна система при цьому не зміниться. Така ситуація має місце тоді, коли $\sigma(\alpha \mathrm{b}) = \beta \mathrm{b}$, $\sigma(\beta \mathrm{e}) = \alpha \mathrm{e}$ для якихось $\alpha \neq \beta$. Означимо операцію *злиття інтервалів* $\Sigma_{\alpha\beta}$, яка є застосовною до ПАІ $(\sigma, \mathbf{v})$ за вищезазначеної умови на схему σ і діє таким чином: з алфавіту $\mathcal{A}$ вилучається символ β, елементи $\beta \mathrm{b}$ і $\beta \mathrm{e}$ вилучаються з тих циклів, до яких вони належали, а довжина v_α збільшується на довжину v_β.

Формально $\Sigma_{\alpha\beta}(\sigma, \mathbf{v}) = (\sigma', \mathbf{v}')$, де σ' є перестановкою на зменшеному подвоєному алфавіті $\bar{\mathcal{A}}' = \mathcal{A}' \times \{\mathrm{b}, \mathrm{e}\}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \backslash \{\beta\}$, яка задається такими співвідношеннями: у випадку $\sigma(\beta \mathrm{b}) \neq \beta \mathrm{e}$ маємо $\sigma'(\alpha \mathrm{b}) = \sigma(\beta \mathrm{b})$, $\sigma'(\sigma^{-1}(\beta \mathrm{e})) = \alpha \mathrm{e}$ і $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}' \backslash \{\alpha \mathrm{b}, \sigma^{-1}(\beta \mathrm{e})\}$, а у випадку $\sigma(\beta \mathrm{b}) = \beta \mathrm{e}$ маємо $\sigma(\alpha \mathrm{b}) = \alpha \mathrm{e}$ і $\sigma'(\bar{\xi}) = \sigma(\bar{\xi})$ для $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}' \backslash \{\alpha \mathrm{b}\}$; новий вектор довжин $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}'}$ задається співвідношеннями $v'_\alpha = v_\alpha + v_\beta$ і $v'_\xi = v_\xi$ для $\xi \in \mathcal{A}' \backslash \{\alpha\}$.

Зауважимо, що для ротаційної схеми σ випадок $\sigma(\beta \mathrm{b}) = \beta \mathrm{e}$ є неможливим, тому що з цього співвідношення випливає співвідношення $\sigma^*(\beta \mathrm{e}) = \beta \mathrm{e}$ для дуальної схеми σ^*, яке робить останню завідомо не додатною: кожен дозволений схемою σ^* вектор довжин $\mathbf{w}$ містить компоненту $w_\beta = 0$.

Умова $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{b}$, $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{e}$ застосовності $\Sigma_{\alpha\beta}$ до σ є еквівалентною умові $\sigma^*(\alpha\mathrm{e}) = \beta\mathrm{b}$, $\sigma^*(\beta\mathrm{b}) = \alpha\mathrm{e}$ щодо дуальної схеми σ^*. Це означає наявність у складі σ^* двохелементного циклу $\begin{bmatrix}\beta\\ \alpha\end{bmatrix}$. Застосування операції злиття $\Sigma_{\alpha\beta}$ до σ вилучає цей двохелементний цикл зі складу σ^* і замінює $\beta\mathrm{e}$ на $\alpha\mathrm{e}$ у тому циклі σ^*, до якого елемент $\beta\mathrm{e}$ належав.

Твердження 4. *Операція злиття інтервалів, застосована до ротаційного перекладання інтервалів, залишає його ротаційним.*

Доведення. З означення операції очевидно, що числа покручення циклів не змінюються, лише один цикл в дуальній схемі повністю зникає, отже, повне покручення залишається нульовим. Одна з довжин збільшується на величину іншої, тож вектор довжин залишається додатним. Для дуальної схеми до застосування операції існував дозволений додатний вектор довжин $\mathbf{w}$ із властивістю $w_\alpha = w_\beta$, тому вектор $\mathbf{w}'$ із тими самими компонентами (лише з вилученою компонентою w_β) вочевидь є додатним і дозволеним схемою, дуальною до одержаної в результаті застосування операції $\Sigma_{\alpha\beta}$.

Твердження доведено.

5.3. Ідея алгоритму перетворення ротаційного перекладання інтервалів. Опишемо алгоритм дій із послідовного перетворення довільного незвідного ротаційного перекладання інтервалів, який зрештою приведе до побудови шуканого у частині 2 теореми 1 відображення першого повернення на колі. Нам буде зручно оперувати дуальними схемами. Ідея полягає в тому, щоб, послідовно застосовуючи елементарні кроки індукції до одного з циклів у дуальній схемі, довести його до двохелементного, після чого злиттям відповідних інтервалів виключити з розгляду. Провівши таку процедуру почергово щодо кожного з циклів дуальної схеми, доки їх є більше ніж один, ми зрештою отримаємо дуальну схему, яка складається лише з одного циклу. На цьому алгоритм зупиниться, ми проаналізуємо одержане перекладання інтервалів (воно буде дуже спеціальним) і покажемо, як для нього побудувати поворот кола та об'єднання дуг, для яких це перекладання буде відображенням першого повернення.

Важливим буде слідкувати за тим, щоб кожне нове перетворення дуальної схеми залишало її додатною (тобто не допустити ефекту, описаного у контрприкладі в кінці підпункту 5.1), тоді, згідно з твердженням 3, вона автоматично залишатиметься ротаційною, а отже ротаційним залишатиметься і перетворюване перекладання інтервалів.

Нам знадобляться дві леми.

5.4. Лема про нерозділюваність. Назвемо схему перекладання інтервалів σ *розділюваною* (по циклу c_0), якщо її алфавіт $\mathcal{A}$ можна розділити на два непорожні підалфавіти $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1 \neq \varnothing$, $\mathcal{A}_2 \neq \varnothing$) таким чином, що має місце властивість: один із циклів $c_0 = (\bar{\xi}, \sigma(\bar{\xi})), \ldots, \sigma^k(\bar{\xi}))$, $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}$, $k \geq 1$, $\sigma^{k+1}(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$, у складі $\sigma = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, $n \geq 0$, можна розділити на дві непорожні дуги $a_1 = (\bar{\xi}, \sigma(\bar{\xi}), \ldots, \sigma^i(\bar{\xi}))$ і $a_2 = (\sigma^{i+1}(\bar{\xi}), \ldots, \sigma^k(\bar{\xi}))$, $0 \leq i < k$, а решту циклів — на дві групи $\tau_1 = \{c_1, \ldots, c_j\}$ і $\tau_2 = \{c_{j+1}, \ldots, c_n\}$, $0 \leq j \leq n$, такі, що всі елементи дуги a_1 та циклів із τ_1 належать до $\bar{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{A}_1 \times \{\mathrm{b}, \mathrm{e}\}$, а всі елементи дуги a_2 та циклів із τ_2 — до $\bar{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_2 \times \{\mathrm{b}, \mathrm{e}\}$. У протилежному випадку назвемо схему перекладання інтервалів *нерозділюваною*.

Легко показати, що для перекладання інтервалів із розділюваною схемою сума довжин усіх початкових інтервалів у складі дуги a_1 дорівнює сумі довжин усіх кінцевих інтервалів у складі a_1, і те ж саме правильно для інтервалів у складі дуги a_2. Це випливає з того, що зазначена властивість (сума довжин усіх початкових інтервалів із певної сукупності дорівнює сумі довжин усіх кінцевих) за твердженням 1 має місце для кожного окремого циклу (тобто окремого проміжку), а отже і для сукупності всіх інтервалів, проіндексованих елементами циклів із групи τ_1, з одного боку, а також для сукупності всіх інтервалів з індексами з $\bar{\mathcal{A}}_1$, з іншого боку, і ці дві сукупності інтервалів відрізняються саме на сукупність усіх інтервалів у складі дуги a_1.

Зокрема, з вищедоведеної властивості випливає, що жодна з дуг a_1 і a_2 у розділюваній схемі перекладання інтервалів σ не може складатися лише з початкових або лише з кінцевих елементів, бо інакше сума відповідних допустимих схемою довжин дорівнювала б нулеві, а отже схема не була б додатною. Оскільки цикл c_0 має нульове покручення, то з необхідністю одна з цих дуг починається з кінцевого елемента і закінчується початковим, а інша починається з початкового і закінчується кінцевим. Нехай для визначеності першою є саме a_1, а другою — a_2, тоді $\bar{\xi} = \alpha\mathrm{e}$, $\sigma^i(\bar{\xi})) = \beta\mathrm{b}$, $\sigma^{i+1}(\bar{\xi}) = \gamma\mathrm{b}$, $\sigma^k(\bar{\xi}) = \delta\mathrm{e}$ для певних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_1$ і $\delta, \gamma \in \mathcal{A}_2$.

Найбільш наочно властивість розділюваності схеми видно, якщо розглянути відповідне плаваюче перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{v})$: вона означає, що проміжки цього перекладання можна зафіксувати в таких позиціях, що кожен із інтервалів одержаного закріпленого перекладання $(\sigma, \mathbf{x})$ лежить або цілком на півпрямій $(-\infty, 0)$, або цілком на $[0, +\infty)$, і мітки усіх інтервалів першої групи належать до $\mathcal{A}_1$, а другої — до $\mathcal{A}_2$, причому рівно для одного з проміжків (який відповідає циклу c_0) нуль є внутрішньою точкою, і $x_{\alpha\mathrm{e}} = x_{\gamma\mathrm{b}} = 0$ для тих α і γ, які визначені в попередньому абзаці. Фактично весь набір інтервалів у $(\sigma, \mathbf{x})$ розділюється точкою нуль на дві групи: всі інтервали лівіше від нуля мають індекси з $\bar{\mathcal{A}}_1$, а всі інтервали правіше від нуля — індекси з $\bar{\mathcal{A}}_2$.

Лема 1. *Якщо схема перекладання інтервалів розділювана, то вона не може бути ротаційною.*

Доведення. Згідно з описаними вище властивостями розділюваної схеми σ, набори елементів $\bar{\mathcal{A}}_1$ і $\bar{\mathcal{A}}_2$ з'єднані нею рівно у двох місцях, а саме: існують елементи $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_1$ і $\delta, \gamma \in \mathcal{A}_2$ такі, що $\sigma(\beta\mathrm{b}) = \gamma\mathrm{b}$, $\sigma(\delta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{e}$, а для всіх $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}_1 \backslash \{\beta\mathrm{b}\}$ і для всіх $\bar{\eta} \in \bar{\mathcal{A}}_2 \backslash \{\delta\mathrm{e}\}$ маємо $\sigma(\bar{\xi}) \in \bar{\mathcal{A}}_1$ і $\sigma(\bar{\eta}) \in \bar{\mathcal{A}}_2$. Відповідна властивість має місце і для дуальної схеми σ^*, а саме: $\sigma^*(\beta\mathrm{e}) = \gamma\mathrm{b}$, $\sigma^*(\delta\mathrm{b}) = \alpha\mathrm{e}$, а для всіх $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{A}}_1 \backslash \{\beta\mathrm{e}\}$ і для всіх $\bar{\eta} \in \bar{\mathcal{A}}_2 \backslash \{\delta\mathrm{b}\}$ маємо $\sigma^*(\bar{\xi}) \in \bar{\mathcal{A}}_1$ і $\sigma^*(\bar{\eta}) \in \bar{\mathcal{A}}_2$. Отже, один із циклів у складі σ^* можна розділити на дві непорожні дуги $a'_1 = (\alpha\mathrm{e}, \ldots, \beta\mathrm{e})$ та $a'_2 = (\gamma\mathrm{b}, \ldots, \delta\mathrm{b})$, а решту циклів — на дві групи τ'_1 і τ'_2 такі, що всі елементи дуги a'_1 і циклів із τ'_1 належать до $\bar{\mathcal{A}}_1$, а всі елементи дуги a'_2 і циклів із τ'_2 — до $\bar{\mathcal{A}}_2$. Нехай $\mathbf{w} = (w_\xi)_{\xi \in \mathcal{A}}$ — дозволений схемою σ^* вектор довжин. Сума довжин усіх початкових інтервалів із індексами в якомусь одному циклі дорівнює сумі довжин усіх кінцевих інтервалів із індексами в цьому циклі, це ж з очевидністю правильно і для групи циклів. Отже, маємо співвідношення $\sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{b} \in \tau'_1} w_\xi = \sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{e} \in \tau'_1} w_\xi$ (трохи некоректне, але наочне позначення $\xi\mathrm{b} \in \tau'_1$ тут означає, що елемент $\xi\mathrm{b}$ належить до одного з циклів у складі групи τ'_1, і аналогічно для $\xi\mathrm{e}$). Оскільки $\sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{b} \in \bar{\mathcal{A}}_1} w_\xi = \sum_{\xi \in \mathcal{A}_1} w_\xi = \sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{e} \in \bar{\mathcal{A}}_1} w_\xi$, а множина всіх елементів циклів з τ'_1 відрізняється від $\bar{\mathcal{A}}_1$ в точності на множину усіх елементів дуги a'_1, то, віднявши від останньої рівності передостанню, отримаємо $\sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{b} \in a'_1} w_\xi = \sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{e} \in a'_1} w_\xi$.

Якщо припустити, що розділювана схема перекладання інтервалів σ є ротаційною, то дуальна до неї схема σ^* повинна бути додатною і мати нульове покручення. Але якщо всі цикли у складі σ^* мають нульове покручення, то визначена вище непорожня дуга a'_1 складається лише з кінцевих елементів, а отже $\sum_{\xi\,:\,\xi\mathrm{e} \in a'_1} w_\xi = 0$, і схема σ^* не є додатною.

Лему доведено.

5.5. Лема про нерівні довжини. Для даної схеми ПАІ σ скажемо, що довжини v_α і v_β, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, є *рівними з необхідністю*, якщо для кожного дозволеного вектора довжин $\mathbf{v}$ має місце рівність $v_\alpha = v_\beta$. Зрозуміло, що всі співвідношення між довжинами визначаються рівностями (3), але якщо схема досить складна, то рівність із необхідністю певних двох довжин може бути неочевидною.

Розглянемо ситуацію, коли у якомусь перекладанні інтервалів початковий $I_{\alpha\mathrm{b}}$ і кінцевий $I_{\beta\mathrm{e}}$ інтервали прилягають обидва до лівого або обидва до правого краю одного й того самого проміжку J, тобто в дворядковому записі схема містить у собі цикл c_0 вигляду $\begin{bmatrix} \alpha & \dots \\ \beta & \dots \end{bmatrix}$ або вигляду $\begin{bmatrix} \dots & \alpha \\ \dots & \beta \end{bmatrix}$, тобто $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{b}$ або $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$ відповідно, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, і даний цикл не є двохелементним. У загальному випадку довжини v_α і v_β можуть при цьому бути рівними з необхідністю, але не у випадку ротаційного перекладання, як показує така лема.

Лема 2. *Якщо у схемі перекладання інтервалів σ для певних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ маємо $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{b}$ або $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$, відповідний цикл c_0 не є двохелементним, а довжини v_α і v_β є рівними з необхідністю, то ця схема не може бути ротаційною.*

Доведення. Обмежимося розглядом випадку $\sigma(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{b}$ (для випадку $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{e}$ доведення аналогічне). Власне ми доведемо, що за перелічених умов схема σ є розділюваною, тоді з леми 1 випливатиме, що вона не може бути ротаційною. Одразу зауважимо, що при $\alpha = \beta$ схема σ очевидно є розділюваною (по циклу c_0, з підалфавітами $\mathcal{A}_1 = \{\alpha\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}\backslash\{\alpha\}$), тож далі припускатимемо, що $\alpha \neq \beta$.

Нехай $\mathbf{v}$ — дозволений схемою σ додатний вектор довжин. Якщо припустити існування (закільцьованої) послідовності відмінних від α міток $\beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1} = \beta$, $k \geq 1$, таких, що $\beta_{i+1}\mathrm{e} \in c(\beta_i\mathrm{b})$ для всіх $1 \leq i \leq k$, то одночасне збільшення всіх довжин v_{β_i}, $1 \leq i \leq k$, на одне й те ж саме додатне число залишає правильними всі рівності (3), а отже довжини v_α і v_β не є рівними з необхідністю. Оскільки це суперечить умові леми, то закільцьованої послідовності з указаною властивістю не існує.

Зберемо групу циклів τ_1 за таким алгоритмом. Спочатку включимо до неї цикл $c_1 = c(\beta\mathrm{b})$, а потім додаватимемо всі цикли $c(\gamma\mathrm{b})$, де $\gamma \neq \alpha$, а елемент $\gamma\mathrm{e}$ належить до якогось із уже доданих до групи τ_1 циклів. Фактично група τ_1 складається з циклів вигляду $c(\beta_k\mathrm{b})$ для кожної існуючої скінченної послідовності відмінних від α міток $\beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_k$, $k \geq 1$, таких, що $\beta_{i+1}\mathrm{e} \in c(\beta_i\mathrm{b})$ для всіх $1 \leq i < k$. Цикл c_0 не належить до групи τ_1 згідно з результатом попереднього абзацу.

Розглянемо множину $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ усіх міток $\gamma \neq \alpha$ таких, що $\gamma\mathrm{e} \in \tau_1$ (як і вище, такий не зовсім коректний запис позначає належність даного елемента до якогось циклу з групи τ_1). Згідно з побудовою маємо $\gamma\mathrm{b} \in \tau_1$ для всіх $\gamma \in \mathcal{A}_0$; оскільки c_0 не належить до групи τ_1, то маємо $\beta\mathrm{e} \notin \tau_1$ і $\alpha\mathrm{b} \notin \tau_1$. Якщо припустити, що $\alpha\mathrm{e} \notin \tau_1$, то множиною міток усіх кінцевих елементів циклів з групи τ_1 є $\mathcal{A}_0$, тоді як множина міток усіх їхніх початкових елементів включає в себе множину $\mathcal{A}_0$ та містить (принаймні) ще одну мітку $\beta \notin \mathcal{A}_0$, що суперечить твердженню 1 для додатної схеми. Отже, $\alpha\mathrm{e} \in \tau_1$, і множиною міток усіх кінцевих елементів циклів з групи τ_1 є $\mathcal{A}_0 \cup \{\alpha\}$, тоді як множина міток усіх їхніх початкових елементів включає в себе множину $\mathcal{A}_0 \cup \{\beta\}$, і насправді в точності є нею згідно з твердженням 1 і рівністю довжин v_α та v_β.

Таким чином, і у випадку $\alpha \neq \beta$ схема перекладання інтервалів σ є розділюваною (по циклу c_0, з підалфавітами $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \{\alpha, \beta\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_1$), а отже не є ротаційною.

Лему доведено.

5.6. Реалізація алгоритму перетворення ротаційного перекладання інтервалів. Отже, нехай дано незвідне плаваюче ротаційне перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{v})$. Розглянемо дуальну до σ ротаційну схему перекладання інтервалів σ^*. Якщо в ній є двохелементні цикли, то застосуємо до $(\sigma, \mathbf{v})$ відповідні операції злиття інтервалів, після чого в дуальній схемі σ^* не залишиться двохелементних циклів. Якщо циклів у складі σ^* більше ніж один, то виберемо серед них один довільний і будемо послідовно застосовувати до нього елементарні кроки індукції вигляду $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ або $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$, де α і β — крайні зліва мітки у дворядковому записі цього циклу $c_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \dots \\ \beta & \dots \end{bmatrix}$, верхня і нижня відповідно (тобто $\sigma^*(\beta\mathrm{e}) = \alpha\mathrm{b}$), аж поки він не стане двохелементним. При цьому перекладання $(\sigma, \mathbf{v})$ перетворюватиметься під дією зворотних кроків $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$ або $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\beta\alpha})^{-1}$ згідно з теоремою 1 з [1]. Ми слідкуватимемо за тим, щоб схема σ^* залишалася схемою перекладання інтервалів (тобто в цьому випадку залишалася додатною), тоді згідно з твердженням 3 вона залишатиметься ротаційною і відповідним чином перетворюване перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{v})$ теж залишатиметься ротаційним. Опишемо, яким чином ми кожного разу вибиратимемо, який саме з двох кроків — $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ або $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ — буде застосовуватися до дуальної схеми σ^* (зауважимо, що мітки α та β змінюватимуться відповідно до змін у перетворюваному циклі c_0, ми не хочемо занадто ускладнювати систему позначень, тому залишаємо позначення $(\sigma, \mathbf{v})$, σ^*, c_0, α, β для об'єктів, які насправді змінюються протягом дії алгоритму). Одразу зазначимо, що $\alpha \neq \beta$, інакше σ^* не була б ротаційною. Тепер можливі чотири ситуації.

***Ситуація* 1**: $\alpha\mathrm{e} \notin c_0$, $\beta\mathrm{b} \notin c_0$. Якщо це двохелементний цикл, то злиттям відповідних інтервалів у $(\sigma, \mathbf{v})$ позбуваємося його і переходимо до наступного. Якщо ні, то згідно з лемою 2 існує дозволений схемою σ^* додатний вектор довжин $\mathbf{w}$ такий, що $w_\alpha \neq w_\beta$. Якщо $w_\alpha > w_\beta$, то застосуємо до σ^* крок $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$, а якщо $w_\alpha < w_\beta$, то $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$. Це збереже додатність, а отже і ротаційність схеми σ^*, зменшивши при цьому кількість елементів у циклі c_0: у першому випадку елемент $\beta\mathrm{e}$ буде переміщено до того циклу, який містить $\alpha\mathrm{e}$, а в другому елемент $\alpha\mathrm{b}$ буде переміщено до того циклу, який містить $\beta\mathrm{b}$.

***Ситуація* 2**: $\alpha\mathrm{e} \notin c_0$, $\beta\mathrm{b} \in c_0$. Розглянемо довільний додатний вектор довжин $\mathbf{w}$, дозволений схемою σ^*. Оскільки довжина w_β входить рівно в одну з рівностей (3), записаних для $(\sigma^*, \mathbf{w})$, і входить у неї і зліва, і справа, то на цю довжину немає ніяких обмежень, тому її можна замінити на довільне додатне число, менше за w_α (наприклад, покласти $w_\beta = w_\alpha/2$). Отже, існує додатний вектор довжин $\mathbf{w}$, дозволений схемою σ^*, для якого $w_\alpha > w_\beta$. Застосуємо до σ^* крок $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$, це збереже додатність, а отже і ротаційність схеми σ^*, перенісши елемент $\beta\mathrm{e}$ з циклу c_0 до того циклу, який містить $\alpha\mathrm{e}$.

***Ситуація* 3**: $\alpha\mathrm{e} \in c_0$, $\beta\mathrm{b} \notin c_0$. Ця ситуація є аналогічною до ситуації 2, тільки тепер довільно змінювати можна довжину w_α у дозволеному схемою σ^* додатному векторі довжин $\mathbf{w}$. Зокрема, існує такий вектор із співвідношенням $w_\alpha < w_\beta$, тому застосування кроку $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ збереже додатність, а отже і ротаційність схеми σ^*, при перенесенні елемента $\alpha\mathrm{b}$ з її циклу c_0 до того циклу, який містить $\beta\mathrm{b}$.

***Ситуація* 4**: $\alpha\mathrm{e} \in c_0$, $\beta\mathrm{b} \in c_0$. Нехай лівіше від α у нижньому рядку дворядкового запису циклу c_0 знаходяться $m \geq 1$ міток, а лівіше від β у верхньому рядку — $n \geq 1$ міток, тобто $c_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \beta & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & \alpha & \dots \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$. Як і у ситуаціях 2 і 3, довжини w_α і w_β у додатному векторі довжин $\mathbf{w}$, дозволеному схемою σ^*, можна вибирати довільним чином, і застосування як кроку $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$, так і кроку $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$ зберігатиме ротаційність схеми σ^*. Але кількість елементів у циклі c_0 при цьому не зменшиться, натомість при застосуванні $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta}$ ($\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta}$) мітки, що стоять у нижньому рядку лівіше від $\alpha\mathrm{e}$ (у верхньому рядку лівіше від $\beta\mathrm{b}$), циклічно переставляться:

$$\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta_1}: \begin{bmatrix} \alpha & & \dots & & & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & \alpha & \dots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & & \dots & & & \dots \\ \beta_2 & \dots & \beta_m & \beta_1 & \alpha & \dots \end{bmatrix},$$

$$\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha_1\beta}: \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \beta & \dots \\ \beta & & \dots & & & \dots \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha_1 & \beta & \dots \\ \beta & & \dots & & & \dots \end{bmatrix}.$$

Отже, якщо серед міток β_i, $1 < i \le m$, є така, для якої $\beta_i\mathrm{b} \notin c_0$, то, застосувавши послідовно кроки індукції $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta_1}, \dots, \Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta_{i-1}}$, перейдемо до ситуації 3; аналогічно, якщо серед міток α_j, $1 < j \le n$, є така, для якої $\alpha_j\mathrm{e} \notin c_0$, то, застосувавши послідовно кроки індукції $\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha_1\beta}, \dots, \Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha_{j-1}\beta}$, перейдемо до ситуації 2. В обох випадках наступним кроком кількість елементів циклу c_0 буде зменшено. Припустимо тепер, що всі елементи $\alpha_1\mathrm{e}, \dots, \alpha_n\mathrm{e}$ та всі елементи $\beta_1\mathrm{b}, \dots, \beta_m\mathrm{b}$ належать циклу c_0. Множини $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ і $\{\beta_2, \dots, \beta_m\}$ не можуть між собою збігатися, бо в цьому випадку схема σ^* була б або розділюваною (по циклу c_0) з підалфавітами $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha, \beta\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_1$, а отже не ротаційною згідно з лемою 1, або ж звідною (якщо в c_0 немає елементів, відмінних від $\mathcal{A}_1 \times \{\mathrm{b}, \mathrm{e}\}$). Оскільки схема σ^* ротаційна і незвідна, то хоча б одна з множин $\{\beta_2, \dots, \beta_m\} \backslash \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ і $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\} \backslash \{\beta_2, \dots, \beta_m\}$ є непорожньою. Якщо перша з них непорожня, тобто існує $\beta_i \notin \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $1 < i \le m$, то, застосувавши послідовно кроки $\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta_1}, \dots, \Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta_{i-1}}$, прийдемо до ситуації 4 зі збільшеним n (тепер це кількість міток у верхньому рядку лівіше від β_i, а вона є більшою за n, оскільки β_i знаходиться правіше від β). Якщо множина $\{\beta_2, \dots, \beta_m\} \backslash \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ порожня, то непорожньою є множина $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\} \backslash \{\beta_2, \dots, \beta_m\}$, і ми аналогічним чином прийдемо до ситуації 4, але тепер зі збільшеним m. Оскільки n та m обмежені, то такий процес не може тривати нескінченно, тому зрештою ми таки перейдемо до ситуацій 2 або 3.

Підсумовуючи описаний алгоритм дій щодо вибраного більш ніж двохелементного циклу c_0, ми в будь-якому випадку за скінченну кількість кроків індукції одержимо з нього цикл, що містить на один елемент менше. Отже, продовжуючи застосовувати цей алгоритм щодо вибраного циклу, ми зрештою отримаємо з нього двохелементний цикл. Після цього застосуємо операцію злиття відповідних інтервалів у перекладанні $(\sigma, \mathbf{v})$, і нова схема σ^* міститиме на один цикл менше, ніж раніше.

Продовжуючи вибирати цикли у складі σ^* і застосовуючи до них описаний вище алгоритм, ми позбуватимемося їх один за одним і зупинимося тоді, коли схема σ^* являтиме собою одинєдиний цикл. За нашою побудовою, одержане (шляхом послідовного застосування до $(\sigma, \mathbf{v})$ відповідних зворотних кроків індукції та операцій злиття інтервалів) перекладання інтервалів є ротаційним, і з погляду динамічних систем вихідне перекладання є для нього відображенням першого повернення на відповідні проміжки.

5.7. Канонічний вигляд ротаційного перекладання інтервалів. Отже, ми прийшли до ситуації, коли дуальна схема σ^* складається з єдиного циклу. Особливість перекладання інтервалів із такою схемою полягає в тому, що (пригадуючи класифікацію з пп. 4.2) серед усіх країв є лише один типу L і лише один типу R, а всі решта мають типи MB чи ME. Відповідно, для перекладання $(\sigma, \mathbf{v})$ серед усіх країв є лише один типу MB і лише один типу ME, а всі решта мають типи L чи R, тобто лише в одному місці $\sigma(\alpha\mathrm{b}) = \beta\mathrm{b}$ і лише в одному $\sigma(\gamma\mathrm{e}) = \delta\mathrm{e}$,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{A}$ (причому серед цих чотирьох міток можливими є лише рівності $\alpha = \gamma$ чи $\beta = \delta$, а будь-яка інша рівність неможлива внаслідок додатності схем σ і σ^*), а в усіх інших за кінцевим елементом слідує початковий, а за початковим кінцевий.

Можливі два випадки: якщо $\alpha\mathrm{b}$ і $\gamma\mathrm{e}$ належать двом різним циклам у складі перестановки σ, то ці цикли мають вигляд $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \kappa & \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} \lambda & \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}$, $\lambda, \kappa \in \mathcal{A}$ (рівність $\lambda = \kappa$ можлива), а всі решта є двохелементними; у протилежному випадку маємо один цикл $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}$ і всі решта знову ж таки є двохелементними.

З огляду на співвідношення (3) легко переконатися, що додатність схем σ і σ^* забезпечується лише тоді, коли множина всіх двохелементних циклів у складі σ у першому випадку розділяється на три скінченні послідовності

$$\begin{bmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \quad 1 \le i < m, \qquad \text{де} \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_m = \gamma, \quad m \ge 1,$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{j+1} \\ \beta_j \end{bmatrix}, \quad 1 \le j < n, \qquad \text{де} \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_n = \delta, \quad n \ge 1,$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ \lambda_k \end{bmatrix}, \quad 1 \le k < s, \qquad \text{де} \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_s = \kappa, \quad s \ge 1$$

(кожна з них може бути порожньою); у другому випадку наявні лише перші дві послідовності. Єдиний цикл у складі дуальної схеми σ^* записується у першому випадку як

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n & \lambda_1 & \dots & \lambda_s & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \lambda_1 & \dots & \lambda_s & \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix},$$

а в другому як $\begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$.

З рівностей (3) випливають, зокрема, співвідношення $v_\alpha = v_\gamma$, $v_\beta = v_\delta$ в обох випадках плюс додаткове співвідношення $v_\lambda = v_\kappa = v_\alpha + v_\beta$ в першому.

Якщо має місце перший з описаних вище випадків $\Bigg($тобто єдиний цикл у складі σ^* має вигляд $\begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n & \lambda_1 & \dots & \lambda_s & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m & \lambda_1 & \dots & \lambda_s & \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$ із $s \ge 1\Bigg)$, то зведемо його до другого випадку, послідовно застосувавши до σ^* кроки індукції $\Pi^{\mathrm{le}}_{\beta_1\alpha_1}, \dots, \Pi^{\mathrm{le}}_{\beta_n\alpha_1}$. Як і у ситуації 4 з попереднього підпункту, мітки лівіше від α_1 у верхньому рядку циклічно переставляться (при цьому схема залишатиметься додатною, а отже ротаційною внаслідок відсутності обмежень на довжини), утворивши в кінці послідовність $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \beta_1, \dots, \beta_n$ — ту ж саму, яка знаходиться у нижньому рядку правіше від α_m.

Таким чином, ми в усіх випадках зрештою приходимо до ситуації, коли ротаційна схема σ має *канонічний вигляд*

$$\sigma_{\mathrm{can}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_n & \alpha_m \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} \alpha_{i+1} \\ \alpha_i \end{bmatrix},\ 1 \le i < m;\ \begin{bmatrix} \beta_{j+1} \\ \beta_j \end{bmatrix},\ 1 \le j < n \right\} \tag{7}$$

для певного набору попарно різних міток $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ і певних натуральних чисел m та n. Разом із дозволеним додатним вектором довжин $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{can}}$ ротаційна схема канонічного вигляду утворює ротаційне перекладання інтервалів $(\sigma_{\mathrm{can}}, \mathbf{v}_{\mathrm{can}})$ *канонічного вигляду*. Компоненти вектора довжин задовольняють співвідношення $v_{\alpha_1} = \ldots = v_{\alpha_m}$ і $v_{\beta_1} = \ldots = v_{\beta_m}$; ми ці дві довжини позначимо просто v_α та v_β відповідно (не виключено, що вони також рівні між собою).

У підсумку в останніх двох підпунктах ми конструктивним чином довели таке твердження.

Твердження 5. *Довільне незвідне ротаційне перекладання інтервалів можна привести до канонічного вигляду послідовним застосуванням скінченної кількості обернених елементарних кроків індукції та операцій злиття інтервалів, причому на кожному кроці цього процесу перетворюваний ПАІ залишатиметься незвідним ротаційним перекладанням інтервалів.*

***Зауваження* 4.** Як показує викладений алгоритм, фактично для приведення ротаційного перекладання до канонічного вигляду достатньо обмежитися застосуванням обернених елементарних кроків індукції лише двох типів, а саме, $(\Pi^{\mathrm{le}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta})^{-1}$. Цілком аналогічно, можна обмежитися застосуванням обернених елементарних кроків індукції лише інших двох типів, а саме, $(\Pi^{\mathrm{lb}}_{\alpha\beta})^{-1}$ і $(\Pi^{\mathrm{rb}}_{\alpha\beta})^{-1}$, яким відповідають елементарні кроки індукції $\Pi^{\mathrm{re}}_{\alpha\beta}$ і $\Pi^{\mathrm{rb}}_{\beta\alpha}$ відповідно у застосуванні до дуальної ротаційної схеми (згідно з теоремою 1 з [1]).

5.8. Побудова на колі. Для ротаційного перекладання інтервалів $(\sigma_{\mathrm{can}}, \mathbf{v}_{\mathrm{can}})$ канонічного вигляду (7), до якого ми привели вихідне ротаційне перекладання $(\sigma, \mathbf{v})$, візьмемо досить великі натуральні числа k_1 та k_2 і побудуємо поворот кола $R_{L,M}$ із $M = v_\beta + k_2 v_\alpha$ і $L = v_\alpha + k_1 M$, який розглядатимемо у проєкції на проміжок $[-v_\alpha, k_1 M)$ відповідно до (6) із $x_0 = -v_\alpha$, тобто як

$$R_{L,M} : x \mapsto \begin{cases} x + M, & x \in [-v_\alpha, (k_1 - 1)M), \\ x + M - L, & x \in [(k_1 - 1)M, k_1 M). \end{cases}$$

Відмітимо на $[-v_\alpha, k_1 M)$ точки $a_i = R^i_{L,M}(0)$, $0 \le i < q$, відрізка траєкторії довжини $q = 1 + k_1 + k_2 k_1$ точки $a_0 = 0$ під дією повороту $R_{L,M}$. Неважко переконатися, що зазначені $1 + k_1 + k_2 k_1$ точок упорядковані таким чином (зліва направо): $a_{k_1} = -v_\alpha$, $a_0 = 0$, далі йде блок із $k_2 + 1$ точок $a_{k_2 k_1 + 1} = v_\beta$, $a_{(k_2-1)k_1+1} = v_\beta + v_\alpha, \ldots, a_{k_1+1} = v_\beta + (k_2 - 1)v_\alpha$, $a_1 = M$, і далі послідовно ще $k_1 - 1$ таких блоків, зсунутих на $1 \le j < k_1$ поворотів $R_{L,M}$, тобто блоків із $k_2 + 1$ точок $a_{k_2 k_1 + 1 + j} = v_\beta + jM$, $a_{(k_2-1)k_1+1+j} = v_\beta + v_\alpha + jM, \ldots, a_{k_1+1+j} = v_\beta + (k_2 - 1)v_\alpha + jM$, $a_{1+j} = (1 + j)M$, причому в останньому з них (при $j = k_1 - 1$) остання точка $a_{1+(k_1-1)} = k_1 M$ є правим краєм проміжку $[-v_\alpha, k_1 M)$ і в проєкції збігається з його лівим краєм $a_{k_1} = -v_\alpha$, який ми вже згадали. Також зазначимо, що $a_q = R^q_{L,M}(0) = v_\beta - v_\alpha$.

З огляду на цей порядок і рівності $a_{k_1} = -v_\alpha$, $a_0 = 0$, $a_{k_2 k_1 + 1} = v_\beta$ легко бачити, що точками a_i, $0 \le i < q$, коло $[-v_\alpha, k_1 M)$ розбивається на k_1 дуг довжини v_β, а саме, дуги $R^i_{L,M}[0, v_\beta)$, $0 \le i < k_1$, та $k_2 k_1 + 1$ дуг довжини v_α, а саме, дуги $R^i_{L,M}[-v_\alpha, 0)$, $0 \le i < k_2 k_1 + 1$. Жодні дві з цих $1 + k_1 + k_2 k_1$ дуг не мають спільних точок і в об'єднанні дають усе коло. При цьому дуги $R^{k_1}_{L,M}[0, v_\beta) = [a_{k_1}, a_q) = [-v_\alpha, v_\beta - v_\alpha)$ та $R^{k_2 k_1 + 1}_{L,M}[-v_\alpha, 0) = [a_q, a_{k_2 k_1 + 1}) = [v_\beta - v_\alpha, v_\beta)$ також не перетинаються і в об'єднанні дають ту ж саму дугу $[-v_\alpha, v_\beta)$, яку дають в об'єднанні дуги $[0, v_\beta)$ та $[-v_\alpha, 0)$.

Виходячи з цієї конструкції, виділимо на колі дугу $[-v_\alpha, v_\beta)$, а також довільні $m - 1$ дуг з-поміж $R^i_{L,M}[-v_\alpha, 0)$, $0 \le i < k_2 k_1 + 1$, та довільні $n - 1$ дуг з-поміж $R^i_{L,M}[0, v_\beta)$, $0 \le i < k_1$, таким чином, щоб жодні дві з виділених дуг не дотикалися краями (це з очевидністю можливо, якщо k_1 та k_2 достатньо великі). Згідно з побудовою, динамічна система, визначена відображенням першого повернення для повороту кола $R_{L,M}$ на виділене об'єднання $n+m-1$ дуг, є ідентичною з динамічною системою ротаційного перекладання інтервалів канонічного вигляду $(\sigma_{\text{can}}, \mathbf{v}_{\text{can}})$. А оскільки це перекладання канонічного вигляду є одержаним в результаті послідовного застосування обернених кроків індукції та операцій злиття інтервалів до вихідного ротаційного перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{v})$, то динамічна система останнього, у свою чергу, визначається відображенням першого повернення на певне скінченне об'єднання підпроміжків фазового простору динамічної системи $(\sigma_{\text{can}}, \mathbf{v}_{\text{can}})$. Виділивши на колі об'єднання дуг, яке відповідає цьому об'єднанню підпроміжків, одержимо саме таке скінченне об'єднання дуг, відображення першого повернення на яке для повороту кола $R_{L,M}$ є еквівалентним до вихідного незвідного ротаційного перекладання інтервалів $(\sigma, \mathbf{x})$ з точністю до зсуву.

Частину 2 теореми 1 доведено.

6. Доведення третьої частини теореми. У третій частині теореми сформульовано критерій ротаційності схеми перекладання інтервалів у термінах відображення першого повернення на об'єднання дуг для ірраціонального повороту кола. Фактично її твердження майже випливає з доведених нами перших двох частин теореми, а саме, з першої частини випливає, що в разі існування згаданого відображення першого повернення відповідна до нього незвідна схема ПАІ є ротаційною, а з другої частини теореми випливає, що для незвідної ротаційної схеми існує відображення першого повернення з цією схемою. Єдине, що залишається довести, — це існування для незвідної ротаційної схеми відповідного відображення першого повернення саме для ірраціонального повороту кола. Зараз ми це зробимо, для чого повернемося до алгоритму приведення ротаційного перекладання інтервалів до канонічного вигляду, який ми застосовували в попередньому пункті.

Отже, нехай нам дано незвідну ротаційну схему перекладання інтервалів σ. Долучивши до цієї схеми довільний дозволений нею додатний вектор довжин $\mathbf{v}$, отримаємо ротаційне перекладання $(\sigma, \mathbf{v})$. Приведемо його до канонічного вигляду $(\sigma_{\text{can}}, \mathbf{v}_{\text{can}})$ відповідно до твердження 5. У підпункті 5.8 показано, що перекладання канонічного вигляду з довжинами v_α, v_β є відображенням першого повернення для повороту кола $R_{L,M}$ із $M = v_\beta + k_2 v_\alpha$, $L = v_\alpha + k_1 M$ з певними натуральними k_1, k_2. Число обертання цього повороту кола $\rho = M/L = 1/(k_1 + 1/(k_2 + \rho_0))$, де $\rho_0 = v_\beta / v_\alpha$, є раціональним або ірраціональним в залежності від раціональності або ірраціональності числа ρ_0. Отже, якщо довжини v_α і v_β несумірні, то необхідний ірраціональний поворот кола вже побудовано.

Припустимо, що довжини v_α і v_β є сумірними, тобто $\rho_0 = v_\beta / v_\alpha \in \mathbb{Q}$. У цьому випадку просто змінимо їх малим збуренням таким чином, щоб вони перестали бути сумірними, наприклад, замінивши довжину v_β на $v'_\beta = v_\beta + \varepsilon$, де $0 < \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon / v_\beta \notin \mathbb{Q}$. Тепер проведемо весь алгоритм приведення до канонічного вигляду у зворотному порядку. Перекладання $(\sigma_{\text{can}}, \mathbf{v}_{\text{can}})$ було отримано з $(\sigma, \mathbf{v})$ застосуванням скінченної кількості зворотних кроків індукції та операцій злиття інтервалів. Відповідно, у зворотному порядку застосуємо послідовно ті ж самі прямі кроки індукції та операції розділення інтервалів (на визначені частини). Очевидно, що кожна з цих операцій є грубою в тому сенсі, що при її застосуванні малі збурення дійсних компонент (довжин) перекладань залишаються малими, а отже і дискретні компоненти (схеми) перекладань на кожному кроці алгоритму при малих збуреннях залишаються незмінними. Тому зі збуреного вказаним чином канонічного перекладання $(\sigma_{\text{can}}, \mathbf{v}'_{\text{can}})$ в результаті застосування у зворотному порядку алгоритму приведення ми отримуємо збурене перекладання $(\sigma, \mathbf{v}')$ із тією ж самою заданою на початку схемою σ, і це збурене перекладання буде відображенням першого повернення вже для ірраціонального повороту кола з числом обертання $\rho' = 1/(k_1 + 1/(k_2 + \rho'_0))$, де $\rho'_0 = (v_\beta + \varepsilon)/v_\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Частину 3 теореми 1 доведено.

Роботу частково профінансовано Національною академією наук України в рамках проєкту „Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави”, реєстраційний номер 0123U100853.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. О. Ю. Теплінський, *Перекладальні ансамблі інтервалів*, Укр. мат. журн., **75**, № 2, 247 – 268 (2023).
2. M. Keane, *Interval exchange transformations*, Math. Z., **141**, 25 – 31 (1975).
3. W. A. Veech, *Interval exchange transformations*, J. Anal. Math., **33**, 222 – 272 (1978).
4. G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith., **34**, 315 – 328 (1979).
5. M. S. Keane, G. Rauzy, *Stricte ergodicité des échanges d'intervalles*, Math. Z., **174**, 203 – 212 (1980).
6. H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math., **115**, 169 – 200 (1982).
7. W. A. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math., **115**, 201 – 242 (1982).
8. О. Ю. Теплінський, *Гіперболічна підкова для дифеоморфізмів кола зі зламом*, Нелінійні коливання, **11**, № 1, 112 – 127 (2008).
9. K. Khanin, A. Teplinsky, *Renormalization horseshoe and rigidity for circle diffeomorphisms with breaks*, Comm. Math. Phys., **320**, 347 – 377 (2013).
10. K. M. Khanin, E. B. Vul, *Circle homeomorphisms with weak discontinuities*, Adv. Soviet Math., vol. 3, Dyn. Sstems and Statist. Mech., Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991), p. 57 – 98.
11. K. Cunha, D. Smania, *Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **30**, 441 – 462 (2013).
12. K. Cunha, D. Smania, *Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle*, Adv. Math., **250**, 193 – 226 (2014).

Одержано 30.08.23