DOI: 10.3842/umzh.v76i3.7785

УДК 517.9

Олександр Бойчук (Інститут математики НАН України, Київ),
Євген Панасенко (Запорізький національний університет),
Олександр Покутний[1] (Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
Інститут математики НАН України, Київ)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА. I

We study boundary-value problems for the Lyapunov operator-differential equation. By using the theory of Moore – Penrose pseudoinverse operators and its development, we establish conditions for the existence of generalized solutions and propose algorithms for their construction.

Статтю присвячено дослідженню крайових задач для операторно-диференціального рівняння Ляпунова. За допомогою теорії псевдообернених за Муром – Пенроузом операторів та її розвинення знайдено умови існування узагальнених розв'язків і побудовано алгоритми їх знаходження.

Ця стаття є оглядовою. В ній наведено низку результатів стосовно розв'язності операторно-диференціальних крайових задач для рівняння Ляпунова, які було отримано авторами протягом останніх років. І навіть більше, результати уточнено та більш деталізовано. В результаті розробки виокремився певний метод, що дозволяє будувати не лише звичайні розв'язки крайових задач, а й сильні узагальнені та сильні псевдорозв'язки. Це дає можливість розглядати, по-перше, задачі, лінійна частина яких є оператором, що не має оберненого, а по-друге, й у випадку, коли відповідний оператор має незамкнену множину значень. Відповідна методика працює як у випадку необмежених сталих операторних коефіцієнтів, так і у випадку нестаціонарних коефіцієнтів. Першу частину присвячено дослідженню лінійних та лінійно збурених крайових задач. У другій частині розглянуто нелінійну крайову задачу та наведено постановки задач, які можна розв'язати за допомогою методики й у випадку імпульсних крайових задач. І навіть більше, за рахунок отриманих розв'язків можна знаходити умови так званої input-to-state stability. Про це більш детально йтиметься у другій частині роботи.

1. Вступ. Крайові задачі для диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах займають важливе місце в якісній теорії диференціальних рівнянь. Серед останніх відомим є рівняння Ляпунова, яке досліджується як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках [13, 14, 16 – 23, 25 – 39, 41, 42]. Рівняння Ляпунова використовується в теорії стійкості руху, теорії керування та квантовій механіці. Воно відіграє важливу роль в теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні та теорії ігор [1]. Відома динамічна система, що породжується гамільтоніаном у чотиривимірному просторі, носить назву *configurational quantum cat* [22]. Рівняння Ляпунова розглядають як у матричному, так і операторному випадках [2, 5, 17]. Слід зауважити, що, як правило, досліджуються коректні нерезонансні задачі, коли існує єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правих частин рівняння. Окремо можна виділити роботу [4], в якій досліджуються лінійні і слабкозбурені лінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь у резонансному випадку. Розв'язок шукається у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметра ε, який містить два доданки з від'ємними степенями ε.

[1] Відповідальний за листування, e-mail: lenasas@gmail.com.

У цій частині буде досліджено крайові задачі для рівняння Ляпунова у резонансному (нерегулярному) випадку у просторах Банаха та Гільберта, коли розв'язок рівняння існує не для всіх правих частин і може порушуватися його єдиність. Буде знайдено умови біфуркації та розгалуження розв'язків у лінійному та нелінійному випадках і, зокрема, з рухомим правим кінцем відрізка, на якому розглядається відповідна крайова задача. Слід зауважити, що у скінченновимірних просторах аналогічна задача у періодичному випадку досліджувалась у роботі [2] для рівняння Ляпунова та Ріккаті. Біфуркаційні методи є досить розвиненим і потужним інструментом в теорії диференціальних рівнянь [10 – 12]. Слід також відмітити недавні роботи [45 – 47].

2. Рівняння Ляпунова зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де $Z = Z(t)$ — невідома оператор-функція; $A, B \in \mathcal{L}(B_1)$ — лінійні обмежені оператори, що діють з простору Банаха B_1 в себе; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом у просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервне відображення відрізка $[a; b]$ в простір $\mathcal{L}(B_1)$, $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(B_1))$; лінійний обмежений оператор ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ у простір Банаха B_2, тобто $\ell\colon C^1([a; b]; \mathcal{L}(B_1)) \to B_2$, α — елемент простору B_2.

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C([a; b], L(B_1))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]$ таку, що $K_\tau^t[\Phi] \in C([a; b] \times [a; b]; \mathcal{L}(B_1))$ і має вигляд [6 – 9, 24]

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}, \quad t, \tau \in [a; b].$$

За допомогою цього оператора загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int\limits_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]\, d\tau, \tag{3}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(B_1)$; $\tilde{Z}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд

$$\tilde{Z}(t) = \int\limits_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]\, d\tau.$$

Підставляючи (3) в крайову умову (2), отримуємо операторне рівняння щодо оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int\limits_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\, d\tau, \tag{4}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_a^{\cdot}[M] \colon \mathcal{L}(B_1) \to B_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор $\mathbf{L}$ це рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним [3].

В цьому випадку розв'язки рівняння (4) існують тоді й лише тоді [3], коли

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha-\ell\int\limits_a^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]\,d\tau\right]=0. \tag{5}$$

Тут $P_{Y_{\mathbf{L}}}$ — проєктор на підпростір $Y_{\mathbf{L}}$, ізоморфний ядру $N(\mathbf{L}^*)$ спряженого до $\mathbf{L}$ оператора $\mathbf{L}^*$ $(B_2=Y_{\mathbf{L}}\oplus R(\mathbf{L}))$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (4) множині значень оператора $\mathbf{L}$, тобто $\alpha-\ell\int_a^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]\,d\tau\in R(\mathbf{L})$.

За виконання умови розв'язності (5) операторне рівняння (4) має множину розв'язків вигляду

$$M=\mathbf{L}^{-}\left[\alpha-\ell\int\limits_a^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]\,d\tau\right]+P_{N(\mathbf{L})}C,$$

де C — довільний лінійний обмежений оператор ($C\in\mathcal{L}(B_1)$), $P_{N(\mathbf{L})}$ — проєктор на ядро оператора $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^{-}$ — узагальнено-обернений до оператора $\mathbf{L}$ [15]. Підставляючи оператор M в умову (3), отримуємо загальний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$Z(t,C)=\mathbf{K}_a^t[P_{N(\mathbf{L})}C]+(G[\Phi,\alpha])(t),$$

де узагальнений оператор Гріна визначається так:

$$(G[\Phi,\alpha])(t)=\int\limits_a^t\mathbf{K}_{\tau}^t[\Phi(\tau)]d\tau-\mathbf{K}_a^t\left[\mathbf{L}^{-}\ell\int\limits_a^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi(\tau)]d\tau\right]+\mathbf{K}_a^t[\mathbf{L}^{-}\alpha]. \tag{6}$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Крайова задача* (1), (2) *має розв'язки тоді й лише тоді, коли виконується умова* (5). *За виконання умови* (5) *розв'язки крайової задачі* (1), (2) *мають вигляд*

$$Z(t,C)=\mathbf{K}_a^t[P_{N(\mathbf{L})}C]+(G[\Phi,\alpha])(t)$$

для довільного оператора $C\in\mathcal{L}(B_1)$, *де* $(G[\Phi,\alpha])(t)$ — *узагальнений оператор Гріна, який визначається з* (6).

Якщо оператор $\mathbf{L}$ оборотний, то умова (5) виконується автоматично і крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.

2.1. Приклад. Розглянемо крайову задачу (1), (2) для рівняння Ляпунова у просторі Банаха $m=l_\infty$ обмежених числових послідовностей із діагональними операторами A, B й оператор-функцією $\Phi(t)\in C([0,p],\mathbf{B})$:

$$A=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right\},$$

$$B=\operatorname{diag}\{0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots\},$$

$$\Phi(t)=\operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t},e^{\frac{3}{2}t},e^{\frac{1}{2}t},e^{\frac{3}{2}t},\ldots,e^{\frac{1}{2}t},e^{\frac{3}{2}t},\ldots\right\}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z(\cdot) = (Z_{ii}(0) - Z_{ii}(p))_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in m, \quad p > 0.$$

Припускається, що простір $C([0,p],\mathbf{B})$ складається з таких оператор-функцій, яким відповідає зліченна матриця $Z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{N}}$:

$$\|Z\|_{C([0,p],\mathbf{B})} = \sup_{t\in[0,p]} \sup_k \sum_{i=1}^{+\infty} |z_{ki}(t)| < \infty.$$

Таким чином, $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(m)$. Знайдемо оператор-функцію $\mathbf{K}^t_\tau[\Phi](t,\tau \in [0;p])$. Оператори $e^{A(t-\tau)}$ та $e^{B(t-\tau)}$ визначаються так:

$$e^{A(t-\tau)} = \operatorname{diag}\big(e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau}, e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau}, \ldots\big), \qquad e^{B(t-\tau)} = \operatorname{diag}(1, e^{t-\tau}, \ldots),$$

звідки

$$\mathbf{K}^t_\tau[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)} = \operatorname{diag}\big(e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots\big).$$

Частинний розв'язок $\tilde{Z}(t)$ неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$\tilde{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{K}^t_\tau[\Phi(\tau)]\, d\tau = \operatorname{diag}\big(e^{\frac{1}{2}t}t, e^{\frac{3}{2}t}t, \ldots\big).$$

Загальний розв'язок рівняння (1) можна записати у вигляді (3), де $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ — лійнійний обмежений оператор з невідомими компонентами, які потрібно знайти. Знайдемо оператор-функцію $\mathbf{K}^t_0[M]$:

$$\mathbf{K}^t_0[M] = \big(e^{\frac{1}{2}t}m_{i2k-1}, e^{\frac{3}{2}t}m_{i2k}\big)_{i,k\in\mathbb{N}}. \tag{7}$$

Підставивши (7) у крайову умову (2), отримаємо, що в цьому випадку оператор $\mathbf{L}\colon \mathbf{B} \to m$ (на підпросторі $\mathcal{L}(m)$) діє на M таким чином:

$$\mathbf{L}M = \big(m_{11}(1 - e^{\frac{1}{2}p}), m_{22}(1 - e^{\frac{3}{2}p}), m_{33}(1 - e^{\frac{1}{2}p}), \ldots\big).$$

Легко бачити, що цей оператор діє неперервним чином і має множину узагальнено-обернених операторів $\mathbf{L}^-$, які можна визначити так:

$$\mathbf{L}^-(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = D = (d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in m,$$

де діагональні елементи

$$d_{2i2i} = \frac{\alpha_{2i}}{(1 - e^{\frac{3}{2}}p)}, \qquad d_{2i-12i-1} = \frac{\alpha_{2i-1}}{(1 - e^{\frac{1}{2}}p)},$$

а решту коефіцієнтів d_{ij} вибирають довільним чином за умови, щоб $\|D\|_{\mathbf{B}}$ була скінченною. Дія проєкторів $P_{N(\mathbf{L})}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ і $P_{Y_\mathbf{L}}\colon m \to m$ (у загальному вигляді) визначається таким чином:

$$P_{N(\mathbf{L})}M = (I - \mathbf{L}^{-}\mathbf{L})M = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}, \quad \text{де} \quad p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j, \\ m_{ij} - d_{ij}, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}$$

а проєктор $P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$. Отже, умова розв'язності (5) виконується автоматично. Тоді операторне рівняння $\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]\, d\tau$ має розв'язок вигляду

$$M = \mathbf{L}^{-}\left(\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]\, d\tau\right) + P_{N(\mathbf{L})}C, \quad C \in \mathbf{B},$$

або в розгорнутому вигляді

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} & c_{12} - d_{12} & c_{13} - d_{13} & \dots \\ c_{21} - d_{21} & \dfrac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1 - e^{\frac{3}{2}p}} & c_{23} - d_{23} & \dots \\ c_{31} - d_{31} & c_{32} - d_{32} & \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тут d_{ij} — довільні сталі з умовою, що $\|D\|_{\mathbf{B}} = \sup_k \sum_{i=1}^{+\infty} |d_{ki}| < \infty$ Таким чином, за допомогою отриманого оператора M можна записати загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dfrac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1 - e^{\frac{3}{2}p}} e^{\frac{3}{2}t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1 - e^{\frac{1}{2}p}} e^{\frac{t}{2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{3}{2}t}(c_{12} - d_{12}) & e^{\frac{t}{2}}(c_{13} - d_{13}) & e^{\frac{3}{2}t}(c_{14} - d_{14}) & \dots \\ e^{\frac{t}{2}}(c_{21} - d_{21}) & 0 & e^{\frac{t}{2}}(c_{23} - d_{23}) & e^{\frac{3}{2}t}(c_{24} - d_{24}) & \dots \\ e^{\frac{t}{2}}(c_{31} - d_{31}) & e^{\frac{3}{2}t}(c_{32} - d_{32}) & 0 & e^{\frac{3}{2}t}(c_{34} - d_{34}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Безпосередньою підстановкою (8) у крайову задачу (1), (2) можна переконатися в достовірності отриманого результату.

3. Рівняння Ляпунова зі змінними коефіцієнтами. Узагальнені розв'язки. Розглянемо крайову задачу для рівняння Ляпунова

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) - Z(t)B(t) + \Phi(t), \tag{9}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{10}$$

де $Z(t) \in C^1([a;b];\mathcal{L}(B_1))$, оператор-функції $A(t), B(t) \in \mathcal{L}(B_1)$ при кожному t (для простоти $A(t), B(t) \in C([a;b];\mathcal{L}(B_1)))$. Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить $\Phi(t)$ в оператор-функцію

$$K_\tau^t[\Phi] \in C([a;b]\times[a;b];\mathcal{L}(B_1)),$$

вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V(\tau)V^{-1}(t),$$

де $U(t),\ V(t)$ — еволюційні оператори операторно-диференціальних рівнянь

$$\dot{X}(t,\tau) = A(t)X(t,\tau), \qquad X(\tau,\tau) = I, \qquad U(t) := U(t,0),$$

$$\dot{Y}(t,\tau) = B(t)Y(t,\tau), \qquad Y(\tau,\tau) = I, \qquad V(t) := V(t,0),$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ (нормований у нулі) задовольняє операторно-диференціальне рівняння

$$\dot{Y}(t,\tau) = -Y(t,\tau)B(t), \quad Y(\tau,\tau) = I.$$

Для простоти будемо розглядати випадок, коли $[a,b] = [0,T]$. За допомогою цього оператора можна зобразити загальний розв'язок рівняння (9) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]\, d\tau, \tag{11}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(B_1)$. Підставляючи (11) у крайову умову (10), отримуємо операторне рівняння щодо оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell\int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\, d\tau, \tag{12}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_0^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(B_1) \to B_2$. Неважко показати, що за умови узагальненої оборотності оператора $\mathbf{L}$ для задачі зі змінними операторними коефіцієнтами буде справедливою теорема, аналогічна теоремі 1.

Покажемо, що цю задачу можна зробити розв'язною і в тому випадку, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор $\mathbf{L}$, що діє з простору Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ у простір Банаха B_2. Далі будемо вважати, що підпростори $N(\mathbf{L})$ і $\overline{R(\mathbf{L})}$ є доповнювальними, тобто мають місце розклади у прямі суми підпросторів

$$\mathcal{L}(B_1) = N(\mathbf{L}) \oplus X, \qquad B_2 = \overline{R(\mathbf{L})} \oplus Y \tag{13}$$

і відповідні розклади одиниці

$$I_{\mathcal{L}(B_1)} = P_{N(\mathbf{L})} + P_X, \qquad I_{B_2} = P_{\overline{R(\mathbf{L})}} + P_Y,$$

де $P_{N(\mathbf{L})}, P_X, P_{\overline{R(\mathbf{L})}}, P_Y$ — проєктори на відповідні підпростори. За аналогією з означенням [40, 43] допустимої пари введемо означення узагальненого $\mathbf{L}$-допустимого підпростору.

Нехай $\mathbf{L}\colon \mathcal{L}(B_1) \to B_2$ — лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ у простір Банаха B_2, а підпростори $X \subset \mathcal{L}(B_1)$, $\overline{R(\mathbf{L})} \subset B_2$ такі, що виконується умова (13). Тоді підпростори X і $\overline{R(\mathbf{L})}$ будемо називати узагальненими $\mathbf{L}$-допустимими.

Розглянемо звужений оператор $L_X\colon X \to \overline{R(\mathbf{L})}$, $L_X M = \mathbf{L}M$, $M \in X$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір X за нормою $\|M\| = \|L_X M\|_{B_2}$ і розширимо оператор L_X на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$. Тоді, як і у випадку гільбертових просторів [40], оператор $\overline{L}_X\colon \overline{X} \to \overline{R(\mathbf{L})}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R}(\mathbf{L})$. Будемо позначати через $\overline{\mathcal{L}(B_1)} = \overline{X} \oplus N(\mathbf{L})$ розширений вихідний простір.

Нехай $\mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(B_1), B_2)$ й X, $\overline{R(\mathbf{L})}$ — узагальнені $\mathbf{L}$-допустимі підпростори. Тоді відображення

$$\mathbf{L}_X^-\colon B_2 \to \overline{\mathcal{L}(B_1)},$$

$$\mathbf{L}_X^- y = \overline{L}_X^{-1} y_1, \quad y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})}, \quad y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним $(X, \overline{R}(L))$-узагальнено-оберненим до $\mathbf{L}$.

Безпосередньо з означення сильного $(X, \overline{R}(L))$-узагальнено-оберненого оператора випливають такі властивості:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}_X^-\mathbf{L} = \mathbf{L}, \qquad \mathbf{L}_X^-\mathbf{L}\mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^- \quad \text{на} \quad X$$

(або з заміною $\mathbf{L}$ на $\overline{L}_X$),

$$\overline{L}_X\mathbf{L}_X^-\overline{L}_X = \overline{L}_X, \qquad \mathbf{L}_X^-\overline{L}_X\mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^- \quad \text{на} \quad \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 з означення псевдооберненого оператора у загальному випадку немає.

Розглянемо тепер рівняння (12) у просторах Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ і B_2, яке запишемо у вигляді

$$\mathbf{L}M = y, \tag{14}$$

де

$$y = \alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\, d\tau$$

— елемент простору B_2, $\mathbf{L}$ — такий лінійний обмежений оператор, що підпростори X, $\overline{R(\mathbf{L})}$ є узагальненими $\mathbf{L}$-допустимими. Відомо [15], що у загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин і може бути не єдиним. Якщо розв'язок у звичайному сенсі не існує, то часто знаходять такий оператор $M = \overline{M} \in \mathcal{L}(B_1)$, який мінімізує норму нев'язки $\|\mathbf{L}\overline{M} - y\|_{B_2} = \inf_{M \in \mathcal{L}(B_1)} \|\mathbf{L}M - y\|_{B_2}$. Його називають квазірозв'язком [15, 44]. Для існування такого розв'язку умова замкненості множини значень оператора $\mathbf{L}$ є суттєвою, але у загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

Запропонуємо означення розв'язків для рівняння (14), щоб можна було гарантувати їх існування у тому чи іншому сенсі.

Використавши побудовану вище конструкцію, розширимо вихідний простір $\mathcal{L}(B_1)$ й оператор $\mathbf{L}$, заданий на ньому, таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення, яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами у загальному випадку, є багатозначним.

Означення узагальнених розв'язків. Для рівняння (14) будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1. *Класичні розв'язки.* Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ нормально-розв'язний. Як відомо [15], неоднорідність $y \in R(\mathbf{L})$ у рівнянні (14) належить образу оператора тоді й лише тоді, коли $P_Y y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено-обернений оператор $\mathbf{L}^-$, за допомогою якого множина розв'язків рівняння (14) у просторі Банаха має вигляд

$$M = \mathbf{L}^- y + P_{N(\mathbf{L})} C \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1).$$

2. *Сильні узагальнені розв'язки.* Розглянемо випадок, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою. Оскільки оператор $\mathbf{L}$ має $(X, \overline{R(\mathbf{L})})$-узагальнений $\mathbf{L}$-допустимий підпростір, то для просторів $\mathcal{L}(B_1), B_2$ справедливим є розклад (13).

Тоді ми можемо говорити про сильний узагальнений розв'язок рівняння (14). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(\mathbf{L})}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ і коректним буде таке означення.

Означення. *Довільний елемент з множини* $\big\{\overline{L}_X^{-1} y + P_{N(\mathbf{L})} C\big\}_{C \in \mathcal{L}(B_1)}$ *будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння* (14), *якщо* $y \in \overline{R(\mathbf{L})}$.

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (14) буде мати вигляд

$$M = \mathbf{L}_{\overline{X}}^- y + P_{N(\mathbf{L})} C \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1),$$

а оператор $\mathbf{L}_{\overline{X}}^- y := \overline{L}_X^{-1} y_1$, де $y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})},\ y_2 \in Y$.

3. *Узагальнені квазірозв'язки.* Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(\mathbf{L})}$. Для елемента y це рівносильно виконанню умови $P_Y y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі $\inf \big\|\overline{\mathbf{L}} M - y\big\|_{B_2}$, де $\overline{\mathbf{L}} = \overline{L}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$, а інфімум береться по всіх елементах (операторах) $M \in \overline{\mathcal{L}(B_1)}$. Тут $P_{\overline{X}}$ — проєктор на $\overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

Довільний елемент з множини

$$\big\{\mathbf{L}_{\overline{X}}^- y + P_{N(\mathbf{L})} C\big\}_{C \in \mathcal{L}(B_1)}$$

будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (14).

Зазначимо, що якщо $R(\mathbf{L}) = \overline{R(\mathbf{L})}$, то узагальнені квазірозв'язки збігаються зі звичайними квазірозв'язками [15].

З наведеного вище означення випливає, що оператор $\mathbf{L}_{\overline{X}}^- y$ може мати не найменшу норму на відповідному просторі, на відміну від $\overline{L}^+ y$.

З огляду на це повна теорема розв'язності крайової задачі (9), (10) набере такого вигляду.

Теорема 2. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *має узагальнені* $\mathbf{L}$*-допустимі підпростори* $(X, \overline{R(\mathbf{L})})$. *Тоді*:

1a) *крайова задача* (9), (10) *має сильні узагальнені розв'язки тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$P_Y \left[\alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\, d\tau \right] = 0; \tag{15}$$

якщо $\alpha - \ell \displaystyle\int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\, d\tau \in R(\mathbf{L})$, *то розв'язки будуть звичайними класичними*;

1б) *за виконання умови розв'язності* (15) *множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t,C) = \mathbf{K}_0^t[P_{N(\mathbf{L})}C] + \overline{(G[\Phi,\alpha])}(t) \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1),$$

де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$\overline{(G[\Phi,\alpha])}(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau - \mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}_X^-\ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\,d\tau\right] + \mathbf{K}_0^t[\mathbf{L}_X^-\alpha]; \tag{16}$$

2а) *крайова задача* (9), (10) *має сильні узагальнені квазірозв'язки тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$P_Y\left[\alpha - \ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]\,d\tau\right] \neq 0; \tag{17}$$

2б) *за виконання умови розв'язності* (17) *множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t,C) = \mathbf{K}_0^t[P_{N(\mathbf{L})}C] + \overline{(G[\Phi,\alpha])}(t),$$

де узагальнений оператор Гріна визначається з (16).

3.1. Приклад. Розглянемо однорідну крайову задачу ($\Phi(t) = 0$) зі сталими операторами A та B діагонального вигляду

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right), \qquad B = \operatorname{diag}(1,1,1,\ldots)$$

зі значеннями у підпросторі $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2)$, який складається із зліченних матриць $C = (c_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, елементи яких є квадратично сумовними $\sum_{i,j} c_{ij}^2 < \infty$ (кожній такій матриці відповідає лінійний обмежений оператор з $\mathcal{L}(l_2)$). Оператор-функція $Z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{N}} \in C^1([0;1];\mathbf{B})$, тобто

$$\|Z\| = \sup_{t\in[0;1]}\left\{\|Z(t)\|_{\mathbf{B}} + \|\dot{Z}(t)\|_{\mathbf{B}}\right\} < \infty,$$

а крайова умова має вигляд

$$\ell Z(\cdot) = \left(0, z_{22}(0), \frac{z_{33}(0)}{2}, \ldots, \frac{z_{ii}(0)}{i-1}, \ldots\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in l_2.$$

Тоді загальний розв'язок системи буде мати вигляд

$$Z(t,C) = K_0^t[C] = e^{\frac{3}{2}t}[C], \quad C \in \mathbf{B}. \tag{18}$$

Підставляючи (18) у крайову умову, отримуємо рівняння

$$\ell Z(\cdot) = \mathbf{L}C = \left(0, c_{22}, \frac{c_{33}}{2}, \ldots\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l_2.$$

Тут $\mathbf{L} : \mathbf{B} \to l_2$.

Покажемо, що оператор $\mathbf{L}$ має незамкнену множину значень. Для цього достатньо зауважити, що

$$l_2 \ni \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) = \lim_{k\to\infty} \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right),$$

$$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right) = \mathbf{L}C^k,$$

де як послідовність операторів C^k вибрано таку:

$$C^k = \operatorname{diag}\left(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k+1}, 0, 0, \ldots\right) \in \mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2),$$

і для $C = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$

$$\mathbf{L}C = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right).$$

Але C не належить підпростору $\mathcal{L}(l_2)$ квадратично сумовних послідовностей, оскільки $\|C\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1^2 \to \infty$. Таким чином, маємо послідовність C^k таку, що $\mathbf{L}C^k = y^k = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right) \in l_2$ й $y^k \to y = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$ у просторі l_2, якщо $k \to \infty$, але $y = \mathbf{L}C$, де C не належить підпростору $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2)$. Отже, оператор $\mathbf{L}$ має незамкнену множину значень. У цьому випадку для простору $\mathbf{B}$ має місце такий розклад у пряму суму підпросторів:

$$\mathbf{B} = N(\mathbf{L}) \oplus X,$$

де нуль-простір $N(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ складається з операторів вигляду

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & \ldots \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} & \ldots \\ c_{31} & c_{32} & \ldots & c_{3n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{cases} c_{ij}, & i \neq j, \text{ або } i = j = 1, \\ 0, & i = j, \ i \neq j \neq 1, \end{cases}$$

а підпростір X — з матриць

$$C = \begin{cases} c_{ii}, & i \neq 1, \\ 0, & i = 1. \end{cases}$$

На підставі викладеного вище маємо оператор $\mathbf{L}_X : X \to R(L)$, що буде лінійним та ін'єктивним. Поповнивши отриманий підпростір за нормою

$$\|C\|_{\overline{X}} = \|\mathbf{L}_X C\|_{l_2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{c_{ii}}{i}\right)^2,$$

отримаємо простір $\overline{X}$ і простір $\overline{\mathbf{B}}$, в якому розширений оператор $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$ буде нормально-розв'язним. У цьому випадку сильний псевдообернений оператор $\overline{\mathbf{L}}^+ : l_2 \to \overline{\mathbf{B}}$ буде мати вигляд

$$\overline{\mathbf{L}}^+ \alpha = \overline{\mathbf{L}}^+ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) = \operatorname{diag}(0, \alpha_2, 2\alpha_3, \ldots, (n-1)\alpha_n, \ldots).$$

Задача буде розв'язною тоді й лише тоді, коли $\alpha_1 = 0$. Тоді один з сильних узагальнених розв'язків крайової задачі буде мати вигляд

$$Z(t) = K_0^t [\overline{\mathbf{L}}^+ \alpha] = e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{diag}(0, \alpha_2, 2\alpha_3, \ldots, (n-1)\alpha_n, \ldots)$$

у просторі $C^1([0;1]; \overline{\mathbf{B}})$.

4. Крайова задача при лінійних збуреннях. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon)B + \varepsilon C(t) Z(t, \varepsilon) + \Phi(t), \tag{19}$$

$$\ell Z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 Z(\cdot, \varepsilon), \tag{20}$$

де $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні обмежені оператори, $\Phi(t), C(t) \in C([a,b]; \mathcal{L}(H_1))$ — неперервні оператор-функції, $\ell,\ l_1 : C^1([a,b]; \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ — лінійні обмежені оператори, ε — малий параметр, $\mathcal{L}(H_1)$ — простір лінійних та обмежених операторів, що діють з простору Гільберта H_1 у себе; $H_1,\ H_2$ — простори Гільберта, $\alpha \in H_2$. Шукаємо розв'язок $Z(t, \varepsilon) \in C^1([a,b]; \mathcal{L}(H_1)) \times C(0, \varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$. Для простоти будемо розглядати випадок, коли $[a,b] = [0,T]$. Можливі два випадки: породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки і не має розв'язків [23].

1. *Породжуюча крайова задача має розв'язки.* У цьому випадку розв'язок крайової задачі (19), (20) будемо шукати у вигляді ряду $Z(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t)$. Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях ε, отримуємо низку крайових задач.

Крайова задача при ε^0 буде мати вигляд

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + \Phi(t), \tag{21}$$

$$\ell Z_0(\cdot) = \alpha. \tag{22}$$

Для простоти будемо розглядати випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ нормально-розв'язний та узагальнено-оборотний. Тоді, згідно з теоремою 1, загальний розв'язок (21), (22) набирає вигляду

$$Z_0(t, C_0) = \mathbf{K}_0^t [P_{N(\mathbf{L})} C_0] + (G[\Phi, \alpha])(t)$$

для всіх $C_0 \in \mathcal{L}(H_1)$ при виконанні умови розв'язності

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} [\Phi] \, d\tau \right] = 0.$$

При ε^1 отримуємо крайову задачу

$$\dot{Z}_1(t) = AZ_1(t) - Z_1(t)B + C(t) Z_0(t, C_0), \tag{23}$$

$$\ell Z_1(\cdot) = l_1 Z_0(\cdot, C_0). \tag{24}$$

Загальний розв'язок рівняння (23) має вигляд

$$Z_1(t,\overline{C}_1) = e^{tA}\overline{C}_1 e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau,C_0)e^{(\tau-t)B}d\tau. \tag{25}$$

Підставляючи (25) в умову (24), отримуємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1, \tag{26}$$

де

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot,C_0) - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau,C_0)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau.$$

Умова розв'язності набирає вигляду

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_1 = 0. \tag{27}$$

Введемо до розгляду оператор $B_0 : \mathcal{L}(H_1) \to Y_{\mathbf{L}}$, дія якого визначається таким чином:

$$B_0 C_0 = P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1 e^{\cdot A}P_{N(\mathbf{L})}C_0 e^{-\cdot B} - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)e^{\tau A}P_{N(\mathbf{L})}C_0 e^{-\tau B}e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\right].$$

Підставляючи розв'язок Z_0 в умову розв'язності (27), одержуємо операторне рівняння щодо оператора C_0:

$$B_0 C_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1(G[\Phi,\alpha])(\cdot) - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[\Phi,\alpha])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\right]. \tag{28}$$

Припустимо, що оператор B_0 є узагальнено-оборотним. Тоді за виконання достатньої умови $P_{Y_{B_0}}P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$ $(Y_{\mathbf{L}} = Y_{B_0} \oplus R(B_0))$ рівняння (28) буде мати розв'язок

$$C_0 = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1(G[\Phi,\alpha])(\cdot) - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[\Phi,\alpha])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\right], \tag{29}$$

а розв'язок операторного рівняння (26) буде мати вигляд

$$\overline{C}_1 = P_{N(\mathbf{L})}C_1 + \mathbf{L}^- g_1. \tag{30}$$

Підставляючи (30) у загальний розв'язок, отримуємо

$$Z_1(t,C_1) = e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_1 e^{-tB} + e^{tA}\mathbf{L}^- g_1 e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau,C_0)e^{(\tau-t)B}d\tau,$$

де C_0 визначається з рівності (29). Враховуючи визначення оператора Гріна, загальний розв'язок крайової задачі (23), (24) можна записати у вигляді

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_1 e^{-tB} + (G[CZ_0, l_1 Z_0])(t).$$

Діючи за індукцією, отримуємо при ε^i таку крайову задачу:

$$\dot{Z}_i(t) = AZ_i(t) - Z_i(t)B + C(t)Z_{i-1}(t), \tag{31}$$

$$\ell Z_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot). \tag{32}$$

Загальний розв'язок рівняння (31) має вигляд

$$Z_i(t, \overline{C}_i) = e^{tA}\overline{C}_i e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)B} d\tau. \tag{33}$$

Підставляючи (33) в крайову умову (32), одержуємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_i = g_i,$$

де

$$g_i = l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau. \tag{34}$$

Умова розв'язності набере вигляду

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_i = 0. \tag{35}$$

Підставляючи (34) в умову (35), отримуємо операторне рівняння

$$B_0 C_{i-1} = -P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[l_1 (G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\cdot) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) (G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \Bigg].$$

Тоді

$$C_{i-1} = -B_0^+ P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[l_1 \big(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}]\big)(\cdot) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \big(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}]\big)(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \Bigg],$$

$$\overline{C}_i = P_{N(\mathbf{L})} C_i + \mathbf{L}^- g_i,$$

і загальний розв'язок крайової задачі (31), (32) має вигляд

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + \big(G[CZ_{i-1}, l_1 Z_{i-1}]\big)(t).$$

Таким чином, отримали таку теорему.

Теорема 3 (достатня умова розв'язності). *Нехай оператори* $\mathbf{L}$, B_0 *узагальнено-оборотні та виконуються умови*

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left\{\alpha - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\right\} = 0$$

і

$$P_{Y_{B_0}}P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0.$$

Тоді крайова задача (19), (20) *має розв'язок у вигляді ряду* $Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i Z_i(t)$, *коефіцієнти якого знаходяться таким чином*:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_0e^{-tB} + (G[\Phi,\alpha])(t), \quad C_0 \in \mathcal{L}(B_1),$$

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_ie^{-tB} + \big(G[CZ_{i-1}, l_1Z_{i-1}]\big)(t), \quad C_i \in \mathcal{L}(B_1),$$

де $(G[\cdot,\cdot])(t)$ — *узагальнений оператор Гріна, що визначається з* (6). *Оператори* C_i, $i \in N\cup\{0\}$, *визначаються так*:

$$C_0 = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1(G[\Phi,\alpha])(\cdot) - \ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[\Phi,\alpha])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\right],$$

$$C_i = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[l_1\big(G[CZ_{i-1}, l_1Z_{i-1}]\big)(\cdot)$$

$$-\ell\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\big(G[CZ_{i-1}, l_1Z_{i-1}]\big)(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\Bigg].$$

Зауваження. Розроблена методика дозволяє досліджувати умови існування лінійно збуреної крайової задачі для рівняння Ляпунова й у тому випадку, коли множини значень операторів $\mathbf{L}$ і B_0 не є замкненими, $R(\mathbf{L}) \neq \overline{R(\mathbf{L})}$, $R(B_0) \neq \overline{R(B_0)}$, тобто оператори $\mathbf{L}$, B_0 не є нормально-розв'язними. У такому випадку побудована вище процедура буде давати узагальнені розв'язки або квазірозв'язки і задача може бути досліджена повністю. Доведення проводиться аналогічно доведенню теорем 2, 3.

2. *Породжуюча крайова задача не має розв'язків*. У цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i Z_i(t). \tag{36}$$

Підставимо ряд (36) у крайову задачу (19), (20) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

При ε^{-1} приходимо до однорідної крайової задачі

$$\dot{Z}_{-1}(t) = AZ_{-1}(t) - Z_{-1}(t)B, \tag{37}$$

$$\ell Z_{-1}(\cdot) = 0. \tag{38}$$

Задача (37), (38) має розв'язок

$$Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_{-1} e^{-tB} \tag{39}$$

для довільного оператора $C_{-1} \in \mathcal{L}(B_1)$, який буде знайдений нижче.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, отримуємо крайову задачу для $Z_0(t)$:

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + C(t)Z_{-1}(t, C_{-1}) + \Phi(t), \tag{40}$$

$$\ell Z_0(\cdot) = \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}). \tag{41}$$

Операторне рівняння (40) має розв'язок вигляду

$$Z_0(t, \overline{C}_0) = e^{tA}\overline{C}_0 e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}\big[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\big]e^{(\tau-t)B} d\tau.$$

Підставляючи $Z_0(t, \overline{C}_0)$ в крайову умову (41), одержуємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_0 = g_0, \tag{42}$$

де

$$g_0 = \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\big[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\big]e^{(\tau-\cdot)B} d\tau.$$

Знову будемо припускати, що оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним. Розв'язок рівняння (42) існує тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_0 = 0.$$

Підставляючи в отриману умову розв'язності розв'язок (39), приходимо до операторного рівняння

$$B_0 C_{-1} = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right], \tag{43}$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_{-1} = P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1 e^{\cdot A} P_{N(\mathbf{L})} C_{-1} e^{-\cdot B} - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\tau A} P_{N(\mathbf{L})} C_{-1} e^{-\tau B} e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right].$$

Рівняння (43) є розв'язним тоді й лише тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right] = 0. \tag{44}$$

За виконання достатньої умови

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0 \tag{45}$$

умова розв'язності (44) буде виконуватись автоматично й операторне рівняння (43) буде мати принаймні один розв'язок вигляду

$$C_{-1} = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right].$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $\mathbf{L}\overline{C}_0 = g_0$ буде мати вигляд

$$\overline{C}_0 = \mathbf{L}^- g_0 + P_{N(\mathbf{L})} C_0, \quad C_0 \in \mathcal{L}(B_1),$$

або

$$\overline{C}_0 = \mathbf{L}^- \left[\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} [C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right] + P_{N(\mathbf{L})} C_0.$$

Таким чином, розв'язок $Z_0(t, C_0)$ можна записати у вигляді

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_0 e^{-tB} + \overline{Z}_0(t)$$

для довільного оператора $C_0 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче. Тут

$$\overline{Z}_0(t) = e^{tA} \big[\mathbf{L}^- \{ \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \} \big] e^{-tB} + \big(G[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)] \big)(t),$$

де оператор Гріна має вигляд

$$\begin{aligned} &\big(G\big[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot) \big] \big)(t) \\ &= \int_0^t e^{(t-\tau)A} \big[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \big] e^{(\tau-t)B} d\tau \\ &\quad - e^{tA} \left[\mathbf{L}^- \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \big[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \big] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right] e^{-tB}. \end{aligned}$$

При ε^1 отримуємо крайову задачу для визначення $Z_1(t)$ вигляду

$$\dot{Z}_1(t) = A Z_1(t) - Z_1(t) B + C(t) Z_0(t, C_0), \tag{46}$$

$$\ell Z_1(\cdot) = l_1 Z_0(\cdot, C_0). \tag{47}$$

Операторне рівняння (46) має розв'язок

$$Z_1(t, \overline{C}_1) = e^{tA} \overline{C}_1 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B} d\tau. \tag{48}$$

Підставляючи $Z_1(t)$ в крайову умову (47), отримуємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1,$$

де

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot, C_0) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau.$$

Розв'язок операторного рівняння існує тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_1 = 0.$$

Підставляючи в отриману умову розв'язності зображення для $Z_0(t, C_0)$, одержуємо операторне рівняння щодо оператора C_0:

$$B_0 C_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right]. \tag{49}$$

За виконання умови (45) операторне рівняння (49) має принаймні один розв'язок у вигляді

$$C_0 = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right].$$

У цьому випадку розв'язок рівняння $\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1$ буде мати вигляд

$$\overline{C}_1 = \mathbf{L}^- g_1 + P_{N(\mathbf{L})} C_1, \quad C_1 \in \mathcal{L}(H_1),$$

або

$$\overline{C}_1 = \mathbf{L}^- \left[l_1 Z_0(\cdot, C_0) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} [C(\tau) Z_0(\tau, C_0)] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right] + P_{N(\mathbf{L})} C_1.$$

Таким чином, розв'язок $Z_1(t, C_1)$ можна записати у вигляді

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_1 e^{-tB} + \overline{Z}_1(t)$$

для довільного оператора $C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче. Тут

$$\overline{Z}_1(t) = e^{tA} \big[\mathbf{L}^- l_1 Z_0(\cdot, C_0) \big] e^{-tB} + \big(G \big[C(\cdot) Z_0(\cdot, C_0) \big] \big)(t).$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $Z_i(t)$ при ε^i ряду (36) маємо таку крайову задачу:

$$\dot{Z}_i(t) = A Z_i(t) - Z_i(t) B + C(t) Z_{i-1}(t, C_{i-1}), \tag{50}$$

$$\ell Z_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}). \tag{51}$$

За виконання умови (45), крайова задача (50), (51) має розв'язок

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t),$$

де частинний розв'язок

$$\overline{Z}_i(t) = e^{tA}\big[\mathbf{L}^{-} l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\big] e^{-tB} + \big(G\big[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\big]\big)(t).$$

Оператор $C_i \in \mathcal{L}(H_1)$ знаходиться за формулою

$$C_i = -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[l_1 \overline{Z}_i(\cdot) - \ell \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_i(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right].$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (50), (51):

$$Z_i(t, C_i) = \begin{cases} e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB}, & i = -1, \\ e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t), & i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{52}$$

$$C_i = \begin{cases} -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right], & i = -1, \\ -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[l_1 \overline{Z}_i(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_i(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right], & i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{53}$$

$$\overline{Z}_i(t) = \begin{cases} e^{tA}[\mathbf{L}^{-}(\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}))] e^{-tB} + (G[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)])(t), & i = 0, \\ e^{tA}[\mathbf{L}^{-} l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})] e^{-tB} + (G[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})])(t), & i = \overline{1, \infty}. \end{cases} \tag{54}$$

Узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$\big(G\big[C(\cdot) Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\big]\big)(t)$$

$$= \begin{cases} \int_0^t e^{(t-\tau)A} [C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-t)B} d\tau \\ \qquad - e^{tA} \left[Q^{+} l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} [C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right] e^{-tB}, & i = 0, \\ \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)B} d\tau \\ \qquad - e^{tA} \left[Q^{+} l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} [C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right] e^{-tB}, & i = \overline{1, \infty}. \end{cases} \tag{55}$$

Отже, достатня умова розв'язності крайової задачі (19), (20) має такий вигляд.

Теорема 4 (достатня умова розв'язності)**.** *Якщо оператори* $\mathbf{L}$, B_0 *є узагальнено-оборотними, породжуюча крайова задача, отримана із* (19), (20) *при* $\varepsilon = 0$, *не має розв'язків і* $P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$, *то збурена крайова задача* (19), (20) *має принаймні один розв'язок у вигляді ряду*

$$Z(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, *коефіцієнти якого визначаються ітераційним алгоритмом* (52) – (55).

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. E. Bryson (Jr.), Yu-Chi Ho, *Applied optimal control: optimization, estimation and control*, 1st ed., Taylor Francis Group, New York, London (1975).
2. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation*, Different. Equat., **37**, № 4, 464 – 471 (2001).
3. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Институт математики НАН Украины, Киев (1995).
4. I. A. Bondar, *Linear boundary-value problems for systems of integrodifferential equations with degenerate kernel. Resonance case for a weakly perturbed boundary-value problem*, J. Math. Sci., **274**, № 6, 822 – 832 (2023); DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06645-1.
5. Ju. L. Daleckii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc. (2002).
6. S. G. Krein, *Linear equations in Banach spaces*, Birkhäuser (1982); DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8068-9.
7. S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc. (1972).
8. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лінійній частині*, Нелінійні коливання, **16**, № 4, 518 – 526 (2013).
9. О. О. Покутний, *Узагальнено-обернений оператор у просторах Фреше, Банаха та Гільберта*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка, Сер. фіз.-мат. науки, № 4, 158 – 161 (2013).
10. V. I. Arnold, *Catastrophe theory*, Springer (1992); DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-58124-3.
11. M. M. Vainberg, *Theory of branching of solutions of nonlinear equations*, Monogr. and Textbooks Pure and Appl. Math., Noordhoff International Publ. (1974).
12. A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*, Wiley, New York (1973).
13. B. Bamieh, M. Dahleh, *Energy amplification in channel flows with stochastic excitation*, Phys. Fluids, **13**, 3258 – 3269 (2001).
14. Bhatia Rajendra, *A note on the Lyapunov equation*, Linear Algebra and Appl., **259**, 71 – 76 (1997).
15. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter (2016).
16. O. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion for the solvability of matrix equations of the Lyapunov type*, Ukr. Math. J., **50**, № 8, 1162 – 1169 (1998).
17. S. M. Chuiko, *On the solution of matrix Lyapunov equations*, Visn. Kharkiv. Univ., Ser. Mat., Prikl. Mat., Mekh., № 1120, 85 – 94 (2014).
18. R. Datko, *Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. and Appl., **32**, 610 – 616 (1970).
19. V. Druskin, L. Knizhnerman, V. Simoncini, *Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation*, SIAM J. Numer. Anal., **49**, № 5, 1875 – 1898 (2011).
20. T. E. Duncana, B. Maslowski, B. Pasik-Duncana, *Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise*, Stochast. Process. and Appl., **115**, 1357 – 1383 (2005).
21. H. Kielhöfer, *On the Lyapunov-stability of stationary solutions of semilinear parabolic differential equations*, J. Different. Equat., **22**, 193 – 208 (1976).
22. V. I. Man'ko, R. Vilela, *Mendes Lyapunov exponent in quantum mechanics. A phase-space approach*, Physica D, **145**, 330 – 348 (2000).
23. E. V. Panasenko, O. O. Pokutnyi, *Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces*, J. Math. Sci., **223**, 1 – 7 (2017).
24. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лінійній частині*, Нелінійні коливання, **16**, № 4, 518 – 526 (2013); ***English translation:*** J. Math. Sci., **203**, № 3, 366 – 374 (2014).
25. A. Pazy, *On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal., **3**, № 2, 291 – 294 (1972).
26. K. Maciej Przyluski, *The Lyapunov equation and the problem of stability for linear bounded discrete-time systems in Hilbert space*, Appl. Math. and Optim., **6**, 97 – 112 (1980).
27. I. G. Rosen, C. Wang, *A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic Riccati equations*, SIAM J. Numer. Anal., **32**, № 2, 514 – 541 (1995).

28. D. Sather, *Branching of solutions of an equation in Hilbert space*, Arch. Ration. Mekh. and Anal., **36**, 47 – 64 (1970).
29. Vu Ngoc Phat, Tran Tin Kiet, *On the Lyapunov equation in Banach spaces and applications to control problems*, Int. J. Math. and Math. Sci., **29**, № 3, 155 – 166 (2002).
30. Wen John Ting-Yung, J. M. Balas, *Robust adaptive control in Hilbert space*, J. Math. Anal. and Appl., **143**, 1 – 26 (1989).
31. Davor Dragicevic, Ciprian Preda, *Lyapunov theorems for exponential dichotomies in Hilbert spaces*, Int. J. Math., **27**, № 4 (2016).
32. Ciprian Preda, Petre Preda, *Lyapunov operator inequalities for exponential stability of Banach space semigroups of operators*, Appl. Math. Lett., **25**, 401 – 403 (2012).
33. M. Gil', *Solution estimates for the discrete Lyapunov equation in a Hilbert space and applications to difference equations*, Axioms, **8**, № 1 (2019).
34. Lucas Jodar, *An algorithm for solving generalized algebraic Lyapunov equations in Hilbert space, applications to boundary value problems*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **31**, 99 – 105 (1988).
35. Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith, *Lyapunov theorems for Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **31**, № 1, 44 – 49 (1994).
36. P. Gahinet, M. Sorine, A. J. Laub, C. Kenney, *Stability margins and Lyapunov equations for linear operators in Hilbert space*, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control Honolulu (1990), p. 2638 – 2639.
37. R. P. Ivanov, I. L. Raykov, *Parametric Lyapunov function method for solving nonlinear systems in Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **17**, 893 – 901 (1996).
38. A. Polyakov, *On homogeneous Lyapunov function theorem for evolution equations*, IFAC 2020 — International Federation of Automatic Control, 21st World Congress, Jul 2020, Berlin/Virtual, Germany (2020).
39. M. Gil', *Stability of linear equations with differentiable operators in a Hilbert space*, IMA J. Math. Control and Inform., 1 – 8 (2018).
40. А. А. Бойчук, А. А. Покутний, *Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта*, Укр. мат. журн., **67**, № 9, 1181 – 1188 (2015).
41. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта*, Нелінійні коливання, **20**, № 3, 373 – 390 (2017); ***English translation:*** J. Math. Sci., **236**, № 3, 313 – 332 (2019).
42. Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, *Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі* L_p, Нелінійні коливання, **21**, № 4, 523 – 536 (2018); ***English translation:*** J. Math. Sci., **246**, № 4, 394 – 409 (2020).
43. E. Deutch, *Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation*, Linear Algebra and Appl., **4**, 313 – 322 (1971).
44. A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, John Wiley, New York (1977).
45. H. Harbrecht, M. Schmidlin, C. Schwab, *The Gevrey class implicit mapping theorem with application to* UQ *of semilinear elliptic PDEs*; arXiv:2310.01256 (2023).
46. H. Harbrecht, I. Kalmykov, *Sparse grid approximation of the Riccati operator for closed loop parabolic control problems with Dirichlet boundary control*, SIAM J. Control and Optim., **59**, № 6, 4538 – 4562 (2021).
47. V. Kaloshin, Ke. Zhang, *Arnold diffusion for smooth systems of two and a half degrees of freedom*, Princeton and Oxford (2020).

Одержано 05.09.23