DOI: 10.3842/umzh.v76i5.7786

УДК 517.923

Олександр Бойчук (Інститут математики НАН України, Київ),
Євген Панасенко (Запорізький національний університет),
Олександр Покутний[1] (Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
Інститут математики НАН України, Київ)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА. II

We investigate the bifurcation conditions of the solutions for the nonlinearly perturbed Lyapunov equation. Statements of boundary-value problems are proposed for the coupled systems of Lyapunov equations.

Досліджуються умови біфуркації розв'язків для нелінійно збуреного рівняння Ляпунова. Запропоновано постановки крайових задач для зв'язаних систем рівнянь Ляпунова.

1. Біфуркація розв'язків. Ця стаття є продовженням роботи [1]. У цій частині досліджуються умови розв'язності нелінійної крайової задачі для операторно-диференціального рівняння Ляпунова. Отримано умови біфуркації розв'язків та запропоновано загальні постановки задач для подальших досліджень.

Розглянемо автономну крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B + \varepsilon R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon) + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon) \in C^1\big([a;b(\varepsilon)];\ \mathcal{L}(H_1)\big) \times C(0;\varepsilon_0]$ при фіксованому $\varepsilon_0 > 0$ — невідома оператор-функція; $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні обмежені оператори, оператор-функція $\Phi(t) \in C([a;b(\varepsilon)];\ \mathcal{L}(H_1)])$, H_1, H_2 — гільбертові простори, $\alpha \in H_2$; нелінійна по Z оператор-функція $R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ неперервно диференційовна по $Z(t,\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку і неперервна по ε в околі нуля:

$$R(Z(\cdot,\varepsilon)) \in C^1\big[\|Z - Z_0\| \le q\big], \qquad R(Z,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0];$$

q — достатньо мала константа; $\ell\colon C^1([a;b(\varepsilon)];\ \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ — лінійний обмежений оператор; нелінійний оператор $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ неперервно диференційовний по Z у розумінні Фреше. Знайдемо необхідну та достатню умови існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в породжуючий розв'язок $Z_0(t,C)$ на $[a;b^*]$ $(b^* = b(0))$ вигляду

$$Z_0(t,C) = \mathbf{K}_a^t[P_{N(\mathbf{L})}C] + (G[\Phi,\alpha])(t).$$

Правий кінець $b(\varepsilon)$ відрізка $[a;b(\varepsilon)]$, на якому шукається розв'язок задачі (1), (2), невідомий, і його потрібно визначити у процесі побудови розв'язку. Будемо шукати його у вигляді

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(0) = \beta^*.$$

Виконаємо заміну змінної [2, с. 209]

[1] Відповідальний за листування, e-mail: lenasas@gmail.com.

© ОЛЕКСАНДР БОЙЧУК, ЄВГЕН ПАНАСЕНКО, ОЛЕКСАНДР ПОКУТНИЙ, 2024

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)).$$

Отримаємо нелінійну автономну крайову задачу з невідомою оператор-функцією $Z = Z(\tau, \varepsilon)$, яка визначена на відрізку $[a; b^*]$ фіксованої довжини, з простору $C^1([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)) \times C(0; \varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(\tau, \varepsilon) &= AZ(\tau, \varepsilon) - Z(\tau, \varepsilon)B + \Phi \\ &\quad + \varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\big(AZ(\tau, \varepsilon) - Z(\tau, \varepsilon)B + \Phi\big) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))R(Z(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\Big), \\ \ell Z(\cdot, \varepsilon) &= \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \tag{3}$$

Виконаємо у крайовій задачі (1), (3) заміну змінних

$$Z(\tau, \varepsilon) = Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon).$$

Розв'язок $Z(\tau, \varepsilon) = Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язку породжуючої задачі $(\varepsilon = 0)$. Враховуючи, що $Z_0(\tau, C^0)$ є розв'язком породжуючої крайової задачі, отримуємо таку крайову задачу:

$$\begin{aligned} \dot{Y}(\tau, \varepsilon) &= AY(\tau, \varepsilon) - Y(\tau, \varepsilon)B \\ &\quad + \varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\big(A(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon)) - (Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon))B + \Phi(\tau)\big) \\ &\quad + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))R\big(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\big)\Big), \\ \ell Y(\cdot, \varepsilon) &= \varepsilon J\big(Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau, \varepsilon), \varepsilon\big) \end{aligned} \tag{4}$$

на фіксованому відрізку $[a; b^*]$. Застосовуючи теорему розв'язності (див. [1]) до задачі (1), (4), приходимо до необхідної умови існування розв'язків задачі (1), (2):

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}\left[J(Z_0(\cdot, C^0), 0) - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\Big[\beta^*\big(AZ_0(\tau, C^0) - Z_0(\tau, C^0)B + \Phi(\tau)\big) + R\big(Z_0(\tau, C^0), 0\big)\Big]d\tau\right] = 0.$$

Вводячи позначення

$$F_0(\tau, C^0) = \beta^*\big[AZ_0(\tau, C^0) - Z_0(\tau, C^0)B + \Phi\big] + R\big(Z_0(\tau, C^0), 0\big),$$

приходимо до такого твердження.

Теорема 1. *Нехай автономна крайова задача* (1), (3) *має розв'язок* $Z(\tau, \varepsilon) \in C^1\big([a; b^*]; \mathcal{L}(H_1)\big) \times C(0; \varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *обертається у породжуючий розв'язок* $Z_0(\tau, 0) = Z_0(\tau, C^0)$ $(\varepsilon = 0)$. *Тоді оператор* $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$ *задовольняє операторне рівняння*

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[J(Z_0(\cdot, C^0), 0) - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\big[F_0(\tau, C^0)\big]d\tau\right] = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) будемо називати *рівнянням для породжуючих операторів* крайової задачі (1), (2).

Знайдемо достатню умову існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2). Нехай оператор C_0 задовольняє рівняння для породжуючих операторів (5). Розв'язок крайової задачі (1), (4) має вигляд

$$Y(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]+Y^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

де

$$\begin{aligned}Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)&=\varepsilon\mathbf{K}_0^t\big[\mathbf{L}^-J\big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)\big]\\&\quad+\varepsilon G_1\Big\{\beta(\varepsilon)\Big[A(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon))-(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon))B+\Phi\Big]\\&\quad+\big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\big)R\big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big\}(\tau)\end{aligned}$$

і

$$G_1\{F\}(t)=\int\limits_0^t\mathbf{K}_\tau^t[F]d\tau-\mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-\ell\int\limits_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[F]d\tau\right].$$

Виділимо в оператор-функції $R(Z_0+Y,\varepsilon)$ і оператора $J(Z_0+Y,\varepsilon)$ лінійну частину по Y і члени нульового порядку по ε:

$$R\big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)=R\big(Z_0(\tau,C^0),0\big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon),\tag{6}$$

$$J\big(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)=J\big(Z_0(\cdot,C^0),0\big)+\ell_1Y(\cdot,\varepsilon)+J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big),\tag{7}$$

де

$$A_1(\tau)=\frac{\partial}{\partial Z}R(Z,0)|_{Z=Z_0(\tau,C^0)},\qquad\varphi_1(0,0)=0,\qquad\frac{\partial\varphi_1(0,0)}{\partial Y}=0,$$

$$\ell_1=\frac{\partial}{\partial Z}J(Z,0)|_{Z=Z_0(\tau,C^0)},\qquad J(0,0)=0,\qquad\frac{\partial}{\partial Y}J(0,0)=0.$$

Перетворимо неоднорідність системи (1), використавши розклад (6):

$$\begin{aligned}&\beta\big[A(Z_0+Y)-(Z_0+Y)B+\Phi\big]+(1+\varepsilon\beta)R\big(Z_0+Y,\varepsilon\big)\\&\quad=\beta AZ_0+\beta AY-\beta Z_0B-\beta YB+\beta\Phi+R\big(Z_0,0\big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon)+\varepsilon\beta R(Z,\varepsilon)\\&\quad=\beta^*AZ_0+\overline{\beta}AZ_0+\beta^*AY+\overline{\beta}AY-\beta^*Z_0B-\overline{\beta}Z_0B-\beta^*YB-\overline{\beta}YB+\beta^*\Phi-\overline{\beta}\Phi\\&\qquad+R\big(Z_0,0\big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon)+\varepsilon\beta R(Z,\varepsilon)\\&\quad=F_0(\tau,C^0)+\beta^*AY+A_1(\tau)Y-\beta^*A\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]-A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]\\&\qquad+\beta^*A\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]+A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]-\beta^*YB+\beta^*\mathbf{K}_0^\tau\big[P_{N(\mathbf{L})}C^0\big]B\end{aligned}$$

$$- \beta^* \mathbf{K}_0^\tau \big[P_{N(\mathbf{L})} C^0\big] B + \overline{\beta} A Z_0 - \overline{\beta} Z_0 B - \overline{\beta}\Phi + \overline{\beta} A Y - \overline{\beta} Y B + \varphi_1(Y,\varepsilon) + \varepsilon\beta R(Z,\varepsilon)$$
$$= F_0(\tau, C^0) + \overline{A}_1[c](\tau) + \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big] Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) B + R_1(Y,\varepsilon),$$

де введено такі позначення:

$$\overline{A}_1[\cdot](\tau) = \Big\{ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big] \mathbf{K}_0^\tau \big[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\big] - \beta^* \mathbf{K}_0^\tau \big[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\big] B, AZ_0 - Z_0 B + \Phi \Big\}$$

– блочний оператор; $c = \big(C_0\ \overline{\beta}\big)$, $\overline{\beta} = \beta - \beta^* \in \mathbb{R}^1$, а оператор $R_1(Y,\varepsilon)$ має вигляд

$$R_1(Y,\varepsilon) = \overline{\beta} A Y - \overline{\beta} Y B + \varepsilon\beta R\big(Z_0 + Y, \varepsilon\big) + \varphi_1(Y,\varepsilon).$$

Таким чином, приходимо до задачі побудови розв'язку $Y(\tau,\varepsilon)$:

$$Y(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\ \mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0], \quad \tau \in [a;b^*], \quad \varepsilon \in [0;\varepsilon_0], \quad Y(\tau,0) = 0$$

операторно-диференціального рівняння

$$\frac{dY(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY(\tau,\varepsilon) - Y(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\Big\{ F_0(\tau, C^0) + \overline{A}_1[c](\tau)$$
$$+ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big] Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) B + R_1(Y,\varepsilon)\Big\}, \tag{8}$$

яке задовольняє крайову умову

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\big(Z_0(\cdot, C^0) + Y(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\big). \tag{9}$$

Умова розв'язності крайової задачі (1), (4) і, відповідно, задачі (8), (9) у нових позначеннях набирає вигляду

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[J\big(Z_0(\cdot, C^0), 0\big) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$
$$- \ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^\cdot \Big[F_0(s, C^0) + \overline{A}_1[c](s) + \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big] Y^{(1)}(s,\varepsilon)$$
$$- \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon) B + R_1(Y,\varepsilon)\Big] ds \Bigg] = 0.$$

З урахуванням умови (5) маємо

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[\ell_1 \mathbf{K}_0^\cdot \big[P_{N(\mathbf{L})} C_0\big] - \ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^\cdot \big[\, \overline{A}_1 \big[(C_0)\overline{\beta}\,\big](s)\big] ds \Bigg]$$
$$= -P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

Отримуємо операторне рівняння

$$B_0 C_0 = G_0, \tag{10}$$

де

$$B_0 C = P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\ell_1 \mathbf{K}_0^{\cdot}\big[P_{N(\mathbf{L})}C\big] - \ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\left[\overline{A}_1\left[\left(\frac{C}{\beta}\right)\right](s)\right]ds\right],$$

$$G_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

Для розв'язності рівняння (10) за умови узагальненої оборотності оператора B_0 необхідно і достатньо, щоб

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] = 0.$$

Достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (10) є умова

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0.$$

Таким чином, для побудови розв'язку

$$Y(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\, \mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0], \qquad Y(\tau,0) = 0$$

крайової задачі (8), (9) приходимо до операторної системи

$$Y(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^{\tau}[P_{N(\mathbf{L})}C^0] + Y^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$C_0 = -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] + \mathcal{P}_{N(B)}\overline{C}_0, \tag{11}$$

$$Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{K}_0^t\big[\mathbf{L}^{-} J\big(Z_0 + Y,\varepsilon\big)\big] + \varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0) + \overline{A}_1[c](s)$$

$$+ \big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big\}(\tau),$$

де

$$G_1\{F\}(t) = \int\limits_a^{b^*} \mathbf{K}_\tau^t[F]d\tau - \mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^\cdot[F]d\tau\right], \quad c = (C_0\ \beta).$$

Операторна система (11) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовується збіжний при всіх $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$ метод простих ітерацій, причому величину ε^* можна оцінити знизу за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова.

Перше наближення $Y_1(\tau,\varepsilon)$ системи (11) природно шукати як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY_1(\tau,\varepsilon) - Y_1(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon F_0(\tau, C^0),$$
$$\ell Y_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\big(Z_0(\cdot,C^0),0\big),$$

яке має вигляд

$$Y_1(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[P_{N(\mathbf{L})}C_0] + Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad C^0 = 0,$$
$$Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{K}_0^t\big[\mathbf{L}^-J\big(Z_0,0\big)\big] + \varepsilon G_1\big\{F_0(s,C^0)\big\}(\tau).$$

Друге наближення $Y_2(\tau,\varepsilon)$ шукаємо як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY_2(\tau,\varepsilon) - Y_2(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\Big\{F_0(\tau,C^0) + \overline{A}_1[c](\tau)$$
$$+ \big[\beta^*A + A_1(\tau)\big]Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^*Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\},$$
$$\ell Y_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\big(Z_0(\cdot,C^0) + Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

у вигляді

$$Y_2(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[P_{N(\mathbf{L})}C_1] + Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$
$$Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{K}_0^t\big[\mathbf{L}^-J\big(Z_0+Y_1,\varepsilon\big)\big] + \varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0) + \overline{A}_1[c](s)$$
$$+ \big[\beta^*A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^*Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\}(\tau).$$

З умови розв'язності системи для другого наближення отримаємо рівняння щодо оператора C_1:

$$B_0C_1 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$
$$-\ell\int\limits_a^{b^*}\mathbf{K}_s^\cdot\Big[\big[\beta^*A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^*Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big]ds\Bigg],$$

розв'язок якого має вигляд

$$C_1 = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[\ell_1 Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] + P_{N(B)}\overline{C}_1.$$

Продовжуючи обчислення далі, приходимо до висновку, що розв'язок операторної системи (11) можна знайти за допомогою такого ітераційного процесу:

$$C_k = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}} \Bigg[\ell_1 Y_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big)$$

$$-\ell \int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big]ds\Bigg] + P_{N(B)}\overline{C}_k,$$

$$Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{K}_0^t\Big[\mathbf{L}^- J\big(Z_0(\cdot,C^0) + Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\big)\Big] + \varepsilon G_1(F_0(s,C^0)$$

$$+ \overline{A}_1\big[C_k\,\overline{\beta}\big](s) + \big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)(\tau), \tag{12}$$

$$Y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[P_{N(\mathbf{L})}C_k] + Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$Y_0(\tau,\varepsilon) = Y_0^{(1)}(\tau,\varepsilon) = 0, \quad k = 0,1,2,3,\ldots.$$

Теорема 2 (достатня умова розв'язності)**.** *Припустимо, що оператор B_0 є узагальнено-оборотним і виконується умова $P_{Y_{B_0}}P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$. Тоді для кожного оператора C^0, що є коренем рівняння для породжуючих операторів* (5)*, крайова задача* (1), (3) *має розв'язок $Z(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$, $Z(\tau,0) = Z(\tau,C^0)$, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу* (12)*, збіжного при $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$:*

$$Z_k(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau,C^0) + Y_k(\tau,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

2. Огляд досліджень зі стійкості стану за входом. Концепцію стійкості входу за станом (input-to-state stability (ISS)), яка об'єднує класичну теорію Ляпунова та теорію ISS і має широке застосування в теорії нелінійного керування, зокрема для надійної стабілізації нелінійних систем, введено в роботах E. D. Sontag [14 – 16] для звичайних диференціальних рівнянь.

У роботі [3] розроблено інструменти для дослідження властивостей ISS нескінченновимірних систем керування. Побудовано локальні і глобальні ISS функції Ляпунова для абстрактних рівнянь у банахових просторах. Доведено принцип лінеаризації, який дозволяє побудувати локальну ISS функцію Ляпунова для системи, лінійним наближенням якої є ISS.

У роботі [4] розглядаються імпульсні системи, які мають ISS функцію Ляпунова. Забезпечено побудову локальних ISS функцій Ляпунова методом лінеаризації. Результати узагальнено на випадок банахового простору.

У роботі [5] досліджується стійкість нелінійної системи для параболічного рівняння у частинних похідних, на яку впливають зовнішні збурення. Авторами розроблено підхід до побудови відповідної коерцитивної функції Ляпунова, за допомогою якої встановлюється коректність розглянутої системи та встановлюються умови, які гарантують властивість ISS.

У роботі [6] показано, що існування некоерцитивних функцій Ляпунова передбачає нормо-інтегральну стійкість ISS для рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Ця властивість, у свою чергу, еквівалентна ISS, якщо система задовольняє певні м'які припущення щодо регулярності.

У статті [7] розроблено метод орієнтованих многовидів для дослідження геометричних властивостей множин траєкторій нелінійних диференціальних систем з керуванням. Новий метод дослідження стійкості нелінійних збурених диференціальних систем започатковано на концепції матричнозначних функцій Ляпунова. Цей метод узагальнено для систем з імпульсною дією, диференціальних рівнянь з розривними правими частинами та гібридних систем. Розроблений метод орієнтованих многовидів звів проблему керованості до дослідження розв'язності диференціальних рівнянь щодо допоміжних функцій при загальних припущеннях щодо регулярності векторних полів керованої системи. Отримані результати демонструють ефективність застосування методу траєкторій множин для розв'язування обернених задач теорії керування.

У статті [8] надано інструменти на основі функцій Ляпунова для встановлення integral input-to-state stability (iISS) і ISS для деяких класів нелінійних параболічних рівнянь. Показано, що для взаємозв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними вибір правильного стану та вхідних просторів є вирішальним, зокрема для підсистем iISS, які не є ISS.

У роботі [9] наведено метод побудови iISS функцій Ляпунова для білінійних нескінченновимірних систем керування у гільбертовому просторі. Виділено проблеми, що виникають через нескінченну вимірність простору.

Робота [10] містить огляд та основні результати щодо властивості ISS для нескінченновимірних систем, а також широку бібліографію з цієї тематики. Показано, що метод Ляпунова корисний як для лінійних, так і для нелінійних систем, включаючи параболічні та гіперболічні диференціальні рівняння з частинними похідними.

У роботі [11] розглянуто нелінійні імпульсні системи зі збуреннями у банахових просторах. Знайдено умови часу затримки, що гарантують властивість ISS. На відміну від багатьох існуючих результатів, ці умови охоплюють випадок, коли неперервна та дискретна динаміка може бути водночас нестійкою.

У роботі [12] доведено, що властивість ISS нелінійних систем над банаховими просторами еквівалентна існуванню коерцитивної неперервної за Ліпшицем ISS функції Ляпунова для цієї системи. Для лінійних нескінченновимірних систем показано, що властивість ISS еквівалентна існуванню некоерцитивної ISS функції Ляпунова. Побудовано дві простіші конструкції коерцитивної та некоерцитивної ISS функцій Ляпунова для таких систем.

У роботі [13] узагальнено відомі критерії ISS, доведені E. D. Sontag і Y. Wang для систем звичайних диференціальних рівнянь. В окремих випадках для диференціальних рівнянь у банахових просторах доведено навіть ширші критерії для властивостей ISS. У цій же роботі введено нове поняття сильної ISS, яка еквівалентна ISS у випадку звичайних диференціальних рівнянь, але є строго слабшою, ніж ISS у нескінченновимірному випадку.

Як показує цей огляд робіт, властивості ISS відіграють вирішальну роль при дослідженні задач, що у свою чергу свідчить про велику кількість нерозв'язаних проблем і перспективність даної тематики.

3. Застосування отриманих методів до дослідження операторних та операторно-диференціальних крайових задач для зв'язаних систем Ляпунова. Запропоновані вище методи можуть бути використані при дослідженні таких крайових задач.

1. *Зв'язані системи лінійних операторних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо систему зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) = H_i + \varepsilon\overline{H}_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Тут $A_{ij}, B_{ii}, H_i, \overline{H}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(\varepsilon)$ цієї системи у двох випадках ($X_i(\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча система рівнянь $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки;

б) породжуюча система не має розв'язків.

2. *Зв'язані системи нелінійних операторних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо систему зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon R_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), \ldots, X_n(\varepsilon)) = H_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут $A_{ii}, B_{ii}, H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$A_{ii}X_i^0 + X_i^0 B_{ii} = H_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

3. *Зв'язані системи керування лінійних операторних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо систему керування зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + C_iU_i = H_i + \varepsilon\overline{H}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут $A_{ij}, B_{ii}, C_i, H_i, \overline{H}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків X_i системи (13) за додаткових умов

$$\ell_i X_i(\varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,n},$$

де $\ell_i,\ i = \overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що діють з простору $\mathcal{H}$ у простір $\mathcal{H}_1$ $(\ell_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1))$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$ у двох випадках ($X_i(\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча система рівнянь $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки;

б) породжуюча система не має розв'язків.

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

4. *Зв'язані системи керування нелінійних операторних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо систему зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$A_{ii}X_i(\varepsilon) + X_i(\varepsilon)B_{ii} + \varepsilon R_i(X_1(\varepsilon), X_2(\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(\varepsilon), X_{i+1}(\varepsilon), \ldots, X_n(\varepsilon)) + C_iU_i = H_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут $A_{ii}, B_{ii}, C_i, H_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з додатковими умовами

$$\ell_i X_i(\varepsilon) = \alpha_i.$$

Необхідно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки.

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

5. *Зв'язані системи лінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо крайову задачу для операторно-диференціальних систем зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t) + \varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right) + H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in J,$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(t,\varepsilon)$ системи (13) у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча крайова задача $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки;

б) породжуюча крайова задача не має розв'язків.

Така задача становить окремий інтерес як у випадку сталих операторних коефіцієнтів $(A_{ii}(t) = A_{ii},\ B_{ii}(t) = B_{ii})$, так і у випадку необмежених операторних коефіцієнтів. І навіть більше, окремим випадком є дослідження розв'язків таких задач на всій осі (з крайовими умовами на нескінченності).

6. *Зв'язані системи нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо крайову задачу для операторно-диференціальних нелінійних систем зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), \ldots, X_n(t,\varepsilon))$$
$$+ H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$.

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків $X_i^0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i^0(\cdot) = \alpha_i.$$

7. *Зв'язані системи керування лінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо операторно-диференціальну крайову задачу для системи керування зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + C_i(t)U_i + H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. Задача розглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча задача $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки;

б) породжуюча задача не має розв'язків.

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

8. *Зв'язані системи керування нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова.* Розглянемо систему зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), \ldots, X_n(t,\varepsilon))$$
$$+ C_i(t)U_i + H_i(t),$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon)=\alpha_i.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j=\overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t\in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t\in J,\ J\subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i\in\mathcal{H}_1$. Задача розглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon=0)$ має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt}=A_{ii}(t)X_i^0(t)+X_i^0(t)B_{ii}(t)+C_i(t)U_i+H_i(t),\quad i=\overline{1,n},$$

$$\ell_i X_i^0(\cdot,\varepsilon)=\alpha_i.$$

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

9. *Зв'язані системи лінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова з імпульсами.* Розглянемо крайову задачу для операторно-диференціальних систем зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта з імпульсними умовами

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt}=A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon)+X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+\varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}A_{ik}X_k(t,\varepsilon)\right)+H_i(t)+\varepsilon\overline{H}_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in J,$$

$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon)=\alpha_i,$$

$$\phi_i^j x_i(\cdot,\varepsilon):=E_jX_i(\tau_j+,\varepsilon)-(E_j+S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon)=G_i^j,\quad j=\overline{1,p}.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),\ i,j=\overline{1,n},$ — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t\in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t\in J,\ J\subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i\in\mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j=\overline{1,p}$.

Необхідно знайти достатні умови існування розв'язків $X_i(t,\varepsilon)$ відповідної крайової задачі у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча крайова задача $(\varepsilon=0)$ має розв'язки;

б) породжуюча крайова задача не має розв'язків.

Така задача становить окремий інтерес як у випадку сталих операторних коефіцієнтів $(A_{ii}(t)=A_{ii},\ B_{ii}(t)=B_{ii})$, так і у випадку необмежених операторних коефіцієнтів. І навіть більше, окремим випадком є дослідження розв'язків таких задач на всій осі (з крайовими умовами на нескінченності).

10. *Зв'язані системи нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова з імпульсами.* Розглянемо крайову задачу для операторно-диференціальних нелінійних систем зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта з імпульсами

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), \ldots, X_n(t,\varepsilon))$$
$$+ H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i,$$
$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j, \quad j = \overline{1,p}.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j = \overline{1,p}$.

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків $X_i^0(t)$ породжуючої крайової задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i^0(\cdot) = \alpha_i,$$
$$\phi_i^j X_i^0(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i^0(\tau_j+) - (E_j + S_j)X_i^0(\tau_j-) = G_i^j, \quad j = \overline{1,p}.$$

11. *Зв'язані системи керування лінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова з імпульсами.* Розглянемо операторно-диференціальну крайову задачу для системи керування зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n} A_{ik}X_k(\varepsilon)\right) + C_i(t)U_i + H_i(t) + \varepsilon\overline{H}_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{1,n},$$
$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j, \quad j = \overline{1,p}.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j = \overline{1,p}$. Задача розглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори):

а) породжуюча задача $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки;

б) породжуюча задача не має розв'язків.

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

12. *Зв'язані системи керування нелінійних операторно-диференціальних рівнянь Ляпунова з імпульсами.* Розглянемо систему зв'язаних рівнянь Ляпунова у просторі Гільберта з імпульсами

$$\frac{dX_i(t,\varepsilon)}{dt} = A_{ii}(t)X_i(t,\varepsilon) + X_i(t,\varepsilon)B_{ii}(t)$$
$$+ \varepsilon R_i(X_1(t,\varepsilon), X_2(t,\varepsilon), \ldots, X_{i-1}(t,\varepsilon), X_{i+1}(t,\varepsilon), \ldots, X_n(t,\varepsilon))$$
$$+ C_i(t)U_i + H_i(t),$$
$$\ell_i X_i(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i,$$
$$\phi_i^j X_i(\cdot,\varepsilon) := E_j X_i(\tau_j+,\varepsilon) - (E_j + S_j)X_i(\tau_j-,\varepsilon) = G_i^j, \quad j = \overline{1,p}.$$

Тут $A_{ij}(t), B_{ii}(t), H_i(t), \overline{H}_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $i,j = \overline{1,n}$, — лінійні та обмежені оператори, що при кожному $t \in J$ діють у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ $(t \in J,\ J \subset R)$. Лінійні та обмежені оператори ℓ_i переводять розв'язки операторно-диференціальної системи у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_1$, $\alpha_i \in \mathcal{H}_1$. E_j, S_j — лінійні та обмежені оператори у функціональних просторах, що переводять відповідні розв'язки у деякий простір Гільберта $\mathcal{H}_3$, $G_i^j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ з певними додатковими умовами продовжуваності через точки розриву τ_j, $j = \overline{1,p}$. Задача розглядається у двох випадках ($X_i(t,\varepsilon)$ — лінійні та обмежені оператори).

Потрібно знайти необхідні та достатні умови існування розв'язків такої системи за умови, що породжуюча система $(\varepsilon = 0)$ має розв'язки і відповідні розв'язки $X_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ прямують до розв'язків X_i^0 породжуючої задачі

$$\frac{dX_i^0(t)}{dt} = A_{ii}(t)X_i^0(t) + X_i^0(t)B_{ii}(t) + C_i(t)U_i + H_i(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ell_i X_i^0(\cdot,\varepsilon) = \alpha_i,$$
$$\phi_i^j X_i^0(\cdot) := E_j X_i^0(\tau_j+) - (E_j + S_j)X_i^0(\tau_j-) = G_i^j, \quad j = \overline{1,p}.$$

І навіть більше, необхідно знайти умови на норми розв'язків X_i в залежності від норм U_i та α_i (аналоги так званих умов ISS).

Умови на нелінійності R_i залежать від відповідної задачі і будуть визначені окремо.

Зауваження. Аналогічні задачі можна розглядати у випадку різницевих операторних крайових задач для системи рівнянь Ляпунова та задач на часових шкалах.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Олександр Бойчук є членом редколегії „Українського математичного журналу". Відповідальним редактором з розгляду цієї статті був інший член редколегії. Стаття пройшла належне таємне рецензування. Олександр Бойчук не був залучений до процесу рецензування і прийняття рішення щодо публікації цієї статті.

Фінансування. Цю роботу підтримано грантом Simons Foundations (1290607, О. Бойчук, О. Покутний).

Авторські внески. Всі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. О. Бойчук, Є. Панасенко, О. Покутний, *Крайові задачі для рівняння Ляпунова, I*, Укр. мат. журн., **76**, № 3, 353 – 372 (2024).
2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Институт математики НАН Украины, Киев (1995).
3. S. Dashkovskiy, A. Mironchenko, *Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems*; arXiv.org (1202.3325 [math.OC]): 1 – 33 (2012); DOI: https://DOI.org/10.48550/arXiv.1202.3325.
4. S. Dashkovskiy, A. Mironchenko, *Input-to-state stability of nonlinear impulsive systems*; arXiv.org (1212.5481 [math.DS]), 1 – 26 (2012); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1212.5481.
5. S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, V. Slynko, *Well-posedness and robust stability of a nonlinear ODE-PDE system*; arXiv.org (2103.15747 [math.AP]), 1 – 45 (2021); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.15747.
6. B. Jacob, A. Mironchenko, *Noncoercive Lyapunov functions for input-to-state stability of infinite-dimensional systems*; arXiv.org (1911.01327 [math.OC]), 1 – 27 (2019); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.01327.
7. A. M. Kovalev, A. A. Martynyuk, O. A. Boichuk, A. G. Mazko, R. I. Petryshyn, V. Yu. Slyusarchuk, A. L. Zuyev, V. I. Slyn'ko, *Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability, and control problems*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **9**, № 2, 117 – 145 (2009).
8. A. Mironchenko, H. Ito, *Construction of Lyapunov functions for interconnected parabolic systems: an iISS approach*; arXiv.org (1410.3058 [math.DS]), 1 – 20 (2014); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1410.3058.
9. A. Mironchenko, H. Ito, *Integral input-to-state stability of bilinear infinite-dimensional systems*, Proc. of the 53th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, (2014), p. 3115 – 3160.
10. A. Mironchenko, C. Prieur, *Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: recent results and open questions*; arXiv.org (1910.01714 [math.OC]), 1 – 83 (2020); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.01714.
11. A. Mironchenko, V. Slynko, *Dwell-time stability conditions for infinite dimensional impulsive systems*; arXiv.org (2106.11224 [math.DS]), 1 – 15 (2021); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.11224.
12. A. Mironchenko, F. Wirth, *Lyapunov characterization of input-to-state stability for semilinear control systems over Banach spaces*, Systems and Control Lett., **119**, 64 – 70 (2018).
13. A. Mironchenko, F. Wirth, *Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems*; arXiv.org (1701.08952 [math.OC]), 1 – 16 (2017); DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.08952.
14. E. D. Sontag, *Comments on integral variants of ISS*, Systems and Control Lett., **34**, № 1-2, 93 – 100 (1998).
15. E. D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Trans. Automat. Control, **34**, № 4, 435 – 443 (1989).
16. E. D. Sontag, Y. Wang, *On characterizations of the input-to-state stability property*, Systems and Control Lett., **24**, № 5, 351 – 359 (1995).

Одержано 05.09.23