УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский, акад.,
А. А. Березовский, Т. А. Плотницкий, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии

Рассмотрены задачи со свободными границами для искомой скалярной функции и поверхности ее уровня. Исследованы вопросы единственности, монотонности, пространственной локализации и существования решений. Дан обзор разработанных конструктивных методов решения конкретных задач и математического прогнозирования в соответствующих областях естествознания.

Розглянуто задачі з вільними границями для шуканої скалярної функції та поверхні її рівня. Досліджені питання єдиності, монотонності, просторової локалізації та існування розв'язків. Зроблено огляд розроблених конструктивних методів розв'язку конкретних задач та математичного прогнозування в відповідних областях природознавства.

Начально-краевая задача для оператора $k\partial/\partial t - \Delta$ состоит в нахождении в заданной области D решения $u = u(x, t)$ уравнения $\Delta u - ku_t = -f$, удовлетворяющего начальному условию $u = \psi$ в D и краевому условию $\nabla u + \alpha(u - \varphi) = 0$ на границе ∂D области D. Решение ряда насущных проблем естествознания, в частности, металлургии, медицины, экологии, приводит к необходимости исследования нового типа эволюционных задач со свободными границами для нелинейного уравнения $u_t - k\Delta u = -f(u)$ [1]. Это уравнение рассматривается в области $\Omega(t)$, только часть $S(t)$ границы $\partial\Omega(t)$ которой задана, тогда как остальная часть $\Gamma(t)$ априори неизвестна. Если функция $k(u)$ терпит разрыв первого рода в точке $u = u^*$, то возникает неизвестная поверхность $\Phi^*(t)$, разделяющая область на две подобласти $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$. Обе свободные поверхности $\Gamma(t)$: $\Phi(x, t) = 0$ и $\Phi^*(t)$: $\Phi^*(x, t) = 0$ должны быть определены вместе с решением дифференциального уравнения. Для этого привлекаются дополнительные граничные условия на этих поверхностях.

1. Постановка задачи. В общем случае требуется определить $u(x, t)$, $\Phi^*(t)$ и $\Gamma(t)$ такие, что

$$\begin{gathered}
\Delta u - k(u) u_t = -f(u) \text{ в } \Omega(t) \equiv \{u < c = \text{const}\}, \quad t > 0, \\
u(x, 0) = \psi(x) \text{ в } \Omega(0), \\
\nabla u + \alpha(u)(u - \varphi) = 0 \text{ на } S(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap \partial D, \quad t > 0, \\
[u] = 0,\ u = u^*,\ [\nabla u, \nabla\Phi^*] = p\Phi^*_t \text{ на } \Phi^*(t) \equiv \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t), \quad t > 0, \\
u = c, \quad \nabla u = 0 \text{ на } \Gamma(t) = \partial\Omega(t) \cap D, \quad t > 0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\Omega(t)$ — область, ограниченная заданной поверхностью $S(t)$ и неизвестной поверхностью $\Gamma(t)$; $k(u)$ и $\alpha(u)$ — заданные функции, терпящие разрыв первого рода в точке $u(t) = u^*(t) = \text{const}$; $f(u)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям $f(c) = 0$, $f'(c) = -\infty$ и допускающая разрыв первого рода в точке $u = c$; $\psi(x)$ и $\varphi(x, t) < 0$ — заданные функции в $\Omega(0)$ и на $S(t)$; $\Phi^*(x, t) = 0$ — внутренняя свободная поверхность, появляющаяся как поверхность уровня $u(x, t) = u^*$; $\Gamma(t)$ или $\Phi(t)$ — поверхность $u(x, t) - c = 0$; $p = \text{const}$ — заданная константа; знак $[\ ]$ означает скачок стоящей под ним функции при переходе через указанные поверхности.

По смыслу соответствующих физических явлений эволюция происходит в ограниченной области $\Omega(t) \subset D \subset R^3$, изменяющейся во времени с конечной скоростью. Вне $\Omega(t)$ $u(x, t) = c$ и поэтому продолженное по непрерывности в D решение $u = u(x, t)$ имеет характер волны, фронт которой $\Gamma(t)$ распространяется по постоянному невозмущенному фону с конечной скоростью. Имеет место пространственная локализация. Существование, в общем случае, обобщенных решений волнового типа налагает определенные ограничения на характер поведения функции $f(u)$ вблизи $u = c$, из которых укажем условия [1, 2]

$$f(c) = 0, \quad \int_b^c \frac{du}{\sqrt{\int_u^c f(u)\,du}} < \infty. \tag{2}$$

Наконец, как правило, область $\Omega(t)$ при $t = 0$ вырождается и отпадают начальные условия в задаче (1).

2. Стационарная задача со свободной границей. Если порождающая решение функция $\varphi(x, t)$ при $t \to \infty$ преобразуется в функцию $\varphi(x)$, то и $u(x, t)$ преобразуется в $u(x)$, а $S(t)$, $\Omega(t)$, $\Phi^*(t)$ и $\Gamma(t)$ преобразуются соответственно в S, Ω, Φ^* и Γ. Для определения u и Γ получаем стационарную задачу

$$\begin{gathered} \Delta u = -f(u) \text{ в } \Omega \equiv \{u < c\}, \\ \nabla u + \alpha(u)(u - \varphi) = 0 \text{ на } S \equiv \partial\Omega \cap \partial D, \\ u = c, \quad \nabla u = 0 \text{ на } \Gamma \equiv \partial\Omega \cap D. \end{gathered} \tag{3}$$

Поверхность Φ^* при этом находится по решению этой задачи как множество нулей $\{u - u^* = 0\}$.

Стационарная задача со свободной границей (3) допускает вариационную формулировку, не содержащую в постановке свободной границы Γ. Исследованию такого рода задач методами вариационных неравенств посвящена обширная литература (см., например, [3]).

3. Задача для поверхностей уровня. Поверхности $\Phi^*(t)$ и $\Gamma(t)$ будут связными только при монотонном изменении $\psi(x)$ в $\Omega(0)$ и $\varphi(x, t)$ на $S(t)$ (как по x, так и по t), если к тому же $\psi(x) > \varphi(x, t)$ на $S(t)$. Выполнение этих условий приводит к упорядоченному расслоению области $\Omega(t)$ поверхностями уровней $u(x, t) = \text{const}$. Такие поверхности уровня будем представлять в виде [4, 5]

$$z = z(x, y, u, t), \tag{4}$$

где x, y и z — декартовы координаты. Формулы дифференцирования обратных функций

$$\begin{gathered} u_x = -z_x/z_u, \quad u_y = -z_y/z_u, \quad u_z = 1/z_u, \quad u_t = -z_t/z_u, \\ u_{xx} = -\frac{1}{z_u}\left[z_{xx} - (z_x^2/z_u)_u\right], \\ u_{yy} = -\frac{1}{z_u}\left[z_{yy} - (z_y^2/z_u)_u\right], \quad u_{zz} = \frac{1}{z_u}\left(\frac{1}{z_u}\right)_u \end{gathered} \tag{5}$$

позволяют переформулировать задачу (1) для u в задачу со свободными границами для z [6—9]

$$\begin{gathered} Az - k(u)z_t = f(u)z_u \text{ в } \underset{u \neq u^*}{\Omega_u}(t), \quad t > 0, \\ z(x, y, u, 0) = z_0(x, y, u \text{ в } \Omega_u(0), \\ \frac{\tilde{\nabla} z}{z_u} + \alpha(u)(u - \varphi) = 0, \quad u = \underline{u}(x, y, t), \quad t > 0, \\ [z] = 0, \quad \left[\frac{|\tilde{\nabla} z|^2}{z_u}\right] = -pz_t, \quad u = u^*, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{1}{z_u} = 0, \quad u = c, \quad t > 0,$$

$$z = z_s(x, y, t), \quad u = \underline{u}(x, y, t), \quad t > 0,$$

где

$$Az = \Delta_\tau z - \left(\frac{|\widetilde{\nabla} z|^2}{z_u} \right)_u, \quad \Delta_\tau z = \widetilde{\nabla}_\tau \widetilde{\nabla}_\tau z,$$
$$\Delta_\tau z = z_{xx} + z_{yy}, \quad \widetilde{\nabla} z = \{-z_x, -z_y, 1\}. \tag{7}$$

Здесь $\Omega\ (t)$ — область изменения независимых переменных x, y, u, ограниченная априори неизвестной поверхностью $\Gamma_u\ (t)$, задаваемой в несимметричной форме $\underline{u} = u\ (x,\ y,\ t)$ и плоскостью $u = c$; $z_s\ (x,\ y,\ t)$ —функция, задающая поверхность $s\ (t) : z - z_s\ (x,\ y,\ t) = 0$; $z_0\ (x,\ y,\ u)$ определяется из уравнения [10, 11]

$$\psi(x, y, z_0) - u = 0 \tag{8}$$

Сложность исследования начально-краевой задачи (6), (7) состоит как в нелинейности оператора A, краевых условий и условий сопряжения на плоскости $u = u^*$, так и в необходимости определить свободную границу $\Gamma_4\ (t) : u - \underline{u}\ (x,\ y,\ t) = 0$. Если в задаче (1) надлежит определить поверхность $\Phi^*\ (t)$ по дополнительному условию $u\ (x,\ t) = u^*$, то в задаче (6) она определяется по решению $-\Phi^*\ (t)$: $z = z\ (x,\ y,\ u^*,\ t)$. В случае же, когда на $S\ (t)$ задано условие Дирихле $u = \varphi$ на $s\ (t)$, становится известной и граница $\Gamma_u\ (t) : u - \underline{u}\ (x,\ y,\ t) = u - \varphi\ (x,\ y,\ t) = 0$. Для $z = z\ (x,\ y,\ u,\ t)$ при этом получаем нелинейную задачу на сопряжение в известной области $\Omega_u\ (t) : \{x,\ y \in \mathcal{D}_u,\ \varphi\ (x,\ y,\ t) \leqslant u \leqslant c\}$.

Отметим, что в физических приложениях переход к постановкам задач со свободными границами для поверхностей уровня диктуется существом дела.

4. Монотонность оператора A и теорема единственности. Интегрированием по частям легко устанавливается аналог первой формулы Грина для нелинейного оператора

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} v \cdot Azdu = \int\limits_{b}^{c} du \oint\limits_{\partial\Omega_u} v \cdot (\widetilde{\nabla}_\tau z, \vec{n})\, dl - \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} \Bigg[(\widetilde{\nabla}_\tau v, \widetilde{\nabla}_\tau z) -$$
$$- \frac{|\widetilde{\nabla} z|^2}{z_u} v_u \Bigg] du - \iint\limits_{\mathcal{D}} v \frac{|\widetilde{\nabla} z|^2}{z_u} \Bigg|_{\underline{u}}^{c} dxdy, \tag{9}$$

где $\mathcal{D}$ — сечение области $\Omega_u\,(t)$ плоскостью $u = c$, а $\mathcal{D}_u$ — произвольной плоскостью; $\mathcal{D}_u \subset \mathcal{D}$; $b = \min\limits_{x,u} \underline{u}\,(x, y, t)$; $\vec{n}$ — орт внешней нормали к замкнутому контуру $\partial\Omega_u$, ограничивающему $\mathcal{D}_u$; $v\,(x, y, u, t)$ и $z\,(x, y, u, t)$ — произвольные. дважды непрерывно дифференцируемые функции; $\widetilde{\nabla}_\tau z = \{-z_x, -z_y\}$.

Полагая в (9) $v = z_1 - z_2$ и $z = z_1$, а затем $z = z_2$, получаем два равенства, из которых после вычитания второго из первого следует соотношение

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\, du = \int\limits_{b}^{c} du \oint\limits_{\partial\mathcal{D}_u} (\widetilde{\nabla}_\tau (z_1 - z_2), \vec{n})(z_1 - z_2)\, dl -$$
$$- \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} \left[|\widetilde{\nabla}_\tau (z_1 - z_2)|^2 - \left(\frac{|\widetilde{\nabla} z_1|^2}{z_{1u}} - \frac{|\widetilde{\nabla} z_2|^2}{z_{2u}} \right)(z_{1u} - z_{2u}) \right] du -$$
$$- \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{|\widetilde{\nabla}_\tau z_1|^2}{z_{1u}} - \frac{|\widetilde{\nabla}_\tau z_2|^2}{z_{2u}} \right)(z_1 - z_2)\Big|_{\underline{u}}^{c} dxdy. \tag{10}$$

Преобразуем подынтегральное выражение второго интеграла правой части (10):

$$|\tilde{\nabla}_\tau (z_1 - z_2)|^2 - \left(\frac{|\tilde{\nabla} z_1|^2}{z_{1u}} - \frac{|\tilde{\nabla} z_2|^2}{z_{2u}}\right)(z_{1u} - z_{2u}) = |\tilde{\nabla} z_1|^2 \frac{z_{2u}}{z_{1u}} +$$

$$+ |\tilde{\nabla} z_2|^2 \frac{z_{1u}}{z_{2u}} - 2(\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2). \tag{11}$$

В результате окончательно получаем

$$\iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\, du = \int_{b}^{c} du \oint_{\partial \mathscr{D}_u} (z_1 - z_2) \frac{\partial (z_1 - z_2)}{\partial n}\, dl =$$

$$- \iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} \left[|\tilde{\nabla} z_1|^2 \frac{z_{2u}}{z_{1u}} + |\tilde{\nabla} z_2|^2 \frac{z_{1u}}{z_{2u}} - 2(\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2)\right] du -$$

$$- \iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{|\tilde{\nabla} z_1|^2}{z_{1u}} - \frac{|\tilde{\nabla} z_2|^2}{z_{2u}}\right)(z_1 - z_2)\Big|_{\underline{u}}^{c} dxdy. \tag{12}$$

Пусть $z_1 = z_1(x, y, u, t)$ и $z_2 = z_2(x, y, u, t)$ — два различных решения задачи (6). Для таких решений выполняются равенства

$$z_1 - z_2 = 0, \quad u = \underline{u}, \quad u = c,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(z_1 - z_2) = -\alpha(u)(u - \varphi)\frac{\partial}{\partial u}(z_1 - z_2), \quad u = \underline{u}, \tag{13}$$

вытекающие из краевых условий задачи (6). С их учетом формула (12) упрощается к виду

$$\iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\, du = - \int_{b}^{c} \alpha(u)(u - \varphi)\, du \times$$

$$\times \oint_{\partial \mathscr{D}_u} (z_1 - z_2) \frac{\partial}{\partial u}(z_1 - z_2)\, dl - \iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} \left[|\tilde{\nabla} z_1|^2 \frac{z_{2u}}{z_{1u}} + |\tilde{\nabla} z_2|^2 \frac{z_{1u}}{z_{2u}} -\right.$$

$$\left. - 2(\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2)\right] du. \tag{14}$$

Воспользовавшись равенством

$$(u - \varphi)\frac{\partial}{\partial u}(z_1 - z_2)^2 = [(z_1 - z_2)^2 (u - \varphi)]_u - (z_1 - z_2)^2, \tag{15}$$

найдем

$$(u - \varphi)(z_1 - z_2)(z_1 - z_2)_u = \frac{1}{2}\{[(u - \varphi)(z_1 - z_2)^2]_u - (z_1 - z_2)^2\}. \tag{16}$$

В случае кусочно-постоянной зависимости $\alpha(u) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\eta(u - u^*)$, где $\eta(u)$ — функция Хевисайда, после интегрирования по u с учетом краевых условий формула Грина (14) окончательно преобразуется к виду

$$\iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\, du = -\frac{1}{2}\int_{b}^{c} \alpha(u)\, du \oint_{\partial \Omega_u} (z_1 - z_2)^2\, dl -$$

$$- \iint_{\mathscr{D}} dxdy \int_{\underline{u}}^{c} \left[|\tilde{\nabla} z_1|^2 \frac{z_{2u}}{z_{1u}} + |\tilde{\nabla} z_2|^2 \frac{z_{1u}}{z_{2u}} - 2(\tilde{\nabla} z_1, \tilde{\nabla} z_2)\right] du. \tag{17}$$

Так как z_1 и z_2 — монотонные функции по переменной u, то $z_{1u}/z_{2u} > 0$, $z_{2u}/z_{1u} > 0$. Это позволяет, воспользовавшись неравенством Юнга $2xy \leqslant \leqslant a^2x^2 + a^{-2}y^2$, получить оценку

$$\frac{z_{2u}}{z_{1u}} |\widetilde{\nabla} z_1|^2 + \frac{z_{1u}}{z_{2u}} |\widetilde{\Delta} z_2|^2 > 2(\widetilde{\nabla} z_1, \widetilde{\nabla} z_2). \tag{18}$$

В силу этого неравенства правая часть (17) неположительна, что и устанавливает монотонность оператора A на решениях задачи (6). Монотонность оператора A позволяет доказать теорему единственности решения этой задачи. Нетрудно видеть, что условия сопряжения в (6) можно включить с помощью дельта-функции Дирака $\delta(u - u^*)$ в дифференциальное уравнение

$$Az = k(u) z_t + f(u) z_u + pz_t\delta(u - u^*) \text{ в } \Omega_u(t). \tag{19}$$

Исключая Az_1 и Az_2, с помощью (19) преобразуем правую часть (17) к виду

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} (Az_1 - Az_2)(z_1 - z_2)\, du - \iint\limits_{\mathscr{D}} dxdy \int\limits_{\underline{u}}^{c} \{[k(u) + p\delta(u - u^*)] \times$$

$$\times (z_1 - z_2) + f(u)(z_1 - z_2)_u\} (z_1 - z_2)\, du = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathscr{D}} \Big\{ p(z_1 - z_2)_t^2 |_{u^*} +$$

$$+ \int\limits_{\underline{u}}^{c} [k(u)(z_1 - z_2)_t^2 - f'(u)(z_1 - z_2)^2]\, du \Big\}\, dxdy. \tag{20}$$

Если $f(u)$ — монотонно убывающая функция ($f'(u) < 0$), то из (20) следует, что левая часть (17) неотрицательна. Действительно, так как при $t = 0$ в силу начальных условий задачи (6) $(z_1 - z_2)^2 = 0$ и величина $(z_1 - z_2)^2 \geqslant \geqslant 0$ при $t > 0$, то $(z_1 - z_2)_t^2 \geqslant 0$. Правая часть (17) в силу монотонности оператора A неположительна. Выход из этого противоречия возможен только в случае, когда обе они равны нулю, что возможно лишь при равенстве $z_1 = z_2$, x, y, $u \in \Omega_u(t)$, $t > 0$. Это и доказывает теорему единственности решения задачи (6).

5. Монотонность решения (один простой пример). Рассмотрим простейшую задачу, являющуюся частным случаем задачи (6)

$$\begin{gathered} z_t + \left(\frac{1}{z_u}\right)_u + f(u) z_u = 0, \quad 0 < u < 1, \quad t > 0, \\ z(u, 0) = z_0(u), \quad 0 < u < 1, \\ z(0, t) = 0, \quad z_u(1, t) = \infty, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Пусть $k > 1$ — нечетное число. Умножим (21) на $(1/z_u^k)_u$. Несложный подсчет приводит к тождеству

$$\left(\frac{z_t}{z_u^k}\right)_u + \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{z_u^{k-1}}\right)_t + \frac{4k}{(k+1)^2}\left(\frac{1}{z_u^{\frac{k+1}{2}}}\right)_u^2 + \frac{k}{k-1}\left(\frac{f}{z_u^{k-1}} - \frac{f_u}{z_u^{k-1}}\right) = 0. \tag{22}$$

Предположим, что $f(0) = 0$ и введем обозначение $\int\limits_0^1 a(u)\, du = \langle a \rangle$. Проинтегрируем (22) от 0 до 1. Учитывая (21), получаем

$$\frac{1}{k-1}\langle \frac{1}{z_u^{k-1}} \rangle_t + \frac{4k}{k-1}\langle \left(\frac{1}{z_u^{(k+1)/2}}\right)_u^2 \rangle = \frac{k}{k-1}\langle \frac{f_u}{z_u^{k-1}} \rangle. \tag{23}$$

Обозначая $\| a \|_{L_p(0,1)} = \langle a^p \rangle^{\frac{1}{p}} = \| a \|$, отсюда получаем неравенство

$$\left\| \frac{1}{z_u} \right\| \leqslant \frac{k+1}{k} \tilde{f}_u \left\| \frac{1}{z_u} \right\|, \quad (\tilde{f}_u = f_u(\tilde{u}), \quad u \in (0, 1)), \tag{24}$$

серию оценок

$$\left\| \frac{1}{z_u} \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{z_{0u}} \right\| e^{\frac{k+1}{k} \tilde{f}_u t} \tag{25}$$

и включение

$$\frac{1}{z_u^{\frac{k+1}{2}}} \in L_\infty(0, t; L_2(0, 1)) \cap L_2(0, t; W_2^1(0, 1)). \tag{26}$$

Поскольку из условия $\tilde{f}_u < \infty$ следует $\frac{k+1}{k} \tilde{f}_u < \infty$, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\frac{1}{z_u} \in C((0, t) \times (0, 1)). \tag{27}$$

Если в начальный момент $z = z_0(u)$ монотонная функция такая, что $z_u > > \alpha > 0$, то такой же она останется и при $t > 0$ в случае $\alpha = \alpha(t)$. Таким образом, решение задачи (21) при

$$z_{0u} > \alpha > 0, \quad f_u < \infty, \quad f(0) = 0 \tag{28}$$

монотонно и, следовательно, единственно.

Следует заметить, что включение (26) можно получить при более слабых предположениях относительно функции f, если последнее слагаемое (22) представить в виде

$$\frac{kf}{k-1} \left(\frac{1}{z_u^{k-1}} \right)_u = \frac{2kf}{k+1} \left(\frac{1}{z_u^{\frac{k+1}{2}}} \right)_u \frac{1}{z_u^{\frac{k-3}{2}}} \tag{29}$$

и воспользоваться неравенством Гельдера.

6. Пространственная локализация (достаточные условия). Умножив (21) на z^k, получим тождество

$$\frac{z_t^{k+1}}{k+1} + \left(\frac{z^k}{z_u} \right)_u - kz^{k-1} + \left(\frac{f}{k+1} z^{k+1} \right)_u - \frac{f_u}{k+1} z^{k+1} = 0. \tag{30}$$

Проинтегрируем его от 0 до $\bar{u} \leqslant 1$, обозначив $a(\bar{u})$ через $\bar{a}$. Используя условия (21), получаем

$$\frac{\langle z^{k+1} \rangle_t}{k+1} + \frac{\bar{z}^k}{\bar{z}_u} - k \langle z^{k-1} \rangle + \frac{\bar{f} \bar{z}^{k+1}}{k+1} - \frac{\bar{f}_u}{k+1} \langle z^{k+1} \rangle = 0, \tag{31}$$

откуда следует неравенство

$$\frac{\| z \|_t^2}{2} \leqslant \frac{\tilde{f}_u}{k+1} \| z \|^2 + k \tag{32}$$

и соответствующая оценка

$$\| z \|^2 \leqslant \| z_0 \|^2 e^{\frac{2 \tilde{f}_u t}{k+1}} - \frac{k^2 + k}{\tilde{f}_v}. \tag{33}$$

Это значит, что $\| z \| < \infty$ при $t > 0$, и, следовательно,

$$\frac{\bar{z}^k}{\bar{z}_u} + \frac{\bar{f} \bar{z}^{k+1}}{k+1} < \infty. \tag{34}$$

Если $f > 0$, то отсюда следует, что $z < \infty$ при всех $u < 1$, а при $f(1) > 0$ z будет ограничена и при $u = 1$, т. е. локально по t будет иметь место пространственная локализация. Чтобы локализация была равномерной по t, необходимо, чтобы в (33) $\tilde{f}_u$ было отрицательным. Это условие на f достигается при достаточно больших k, если $f_u < 0$ в окрестности $u = 1$, поскольку z — монотонно возрастающая по u функция и $\bar{u}$ можно выбрать достаточно близким к 1. Таким образом, при выполнении условий

$$\bar{z}_{0u} > \alpha > 0, \quad f > 0, \quad f_u < \infty, \quad f_u < 0, \quad (u > u_1), \quad f(1) > 0, \quad f(0) = 0 \tag{35}$$

решение задачи (21) монотонно, единственно и пространственно локализовано.

7. Существование решения. Обоснование оценок будем проводить традиционно—методом конечных разностей по t. По заданному $z = z_0(u)$ на слое $\underline{t} = 0$ построим решение на слое $t - \underline{t} = \Delta t$ как решение «приближенной» задачи

$$\frac{z}{\Delta t} + \left(\frac{1}{z_u}\right)_u + f(u) z_u = \frac{\underline{z}}{\Delta t}, \quad z(0) = \frac{1}{z_u(1)} = 0. \tag{36}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\zeta}{\Delta t} + \left(\frac{1}{z_u}\right)_u + f(u) z_u = \frac{z}{\Delta t}, \quad \zeta(0) = z(0) = \frac{1}{z_u(1)} = 0. \tag{37}$$

При $\zeta = \underline{z}$ получаем стационарное решение

$$\left(\frac{1}{z_u}\right)_u + f(u) z_u = 0, \quad f = -qq_u \Rightarrow q = -\sqrt{2\int_u^1 f(u)\,du},$$
$$z_u = \frac{1}{q} \Rightarrow z_c = \int_0^u \frac{du}{q(u)}. \tag{38}$$

Если предположить, что

$$q > 0, \quad q_u < 0, \quad q(1) = 0, \quad \int_0^1 \frac{du}{q(u)} < \infty, \tag{39}$$

то $z_c(u)$ — монотонная, ограниченная функция, т. е. решение стационарной задачи пространственно локализовано. Пусть

$$\underline{z} = z_0 < z_c, \quad \underline{z} \leqslant \zeta \leqslant z_c, \tag{40}$$

тогда для $y = 1/z_u$ получаем задачу Коши

$$y_u + \frac{f(u)}{y} = -\frac{\zeta - \underline{z}}{\Delta t}, \quad y(1) = 0, \tag{41}$$

откуда следует, что увеличение (локально по u) ζ обусловливает увеличение y, поскольку $f(u) > 0$, и, следовательно, уменьшение z. Таким образом, решение (37) не превышает $z_c(u)$ при $\zeta > \underline{z}$ и неподвижная точка соответствия $\zeta \to z$ является решением задачи (36) $\bar{z} \leqslant z \leqslant z_c$, позволяющим вычислить z на последующем слое, и т. д. Приближенное решение будет гладким и $\forall t > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\underline{z} < z < z_c. \tag{42}$$

Таким образом, мы получили следующий результат: если выполнены условия

$$q \in C^1(0, 1), \quad q_u < 0, \quad q(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 \frac{du}{q(u)} < \infty,$$

$$\frac{1}{z_{0u}} > \frac{1}{q}, \quad z_0(0) = \frac{1}{z_{0u}(1)} = 0, \quad f = -qq_u, \tag{43}$$

то задача (21) имеет единственное монотонное решение, удовлетворяющее неравенствам

$$z_0(u) \leqslant z(u, t) \leqslant z_c(u) = \int\limits_u^1 \frac{du}{q(u)}. \tag{44}$$

Исследованию конкретных задач со свободными границами для нелинейных эволюционных уравнений, возникающих при решении актуальных проблем металлургии, биологии и экологии, посвящены работы [12—29], в которых рассмотрены математические модели тепловых и диффузионных процессов электронно-лучевой плавки металлов, криодеструкции биологических тканей и перераспределения концентраций кислорода и сероводорода по глубине Черного моря. Двумерные стационарные задачи со свободной границей сведены к решению нелинейных интегральных уравнений минимальной размерности. Их решение осуществлено методом конечных элементов с использованием малых ЭВМ. Для решения одномерных нестационарных задач со свободными границами применены специальные вариационные методы, метод Роте с последующим переходом к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра, неявные разностные схемы.

В проблемах спецэлектрометаллургии, связанных с расчетами тепловых полей в автотигле при вакуумной электронно-лучевой гарнисажной плавке металлов и сплавов, точные, приближенные аналитические и численно-аналитические решения одно- и двумерных задач позволили установить практически важные для прогнозирования простые функциональные зависимости, описать динамику процесса плавления [4, 6—10, 23, 24].

Весьма актуальной для современной медицины является проблема расчета и прогноза воздействия низких температур на живую биологическую ткань. В частности, для хирургии необходимо прогнозирование результатов замораживания и деструкции. В отличие от спецэлектрометаллургии здесь возникают задачи с источниками, существенно зависящими от температуры. Это приводит к таким качественно новым результатам, как стабилизация решений к предельному стационарному состоянию и реально наблюдаемая пространственная локализация — тепловое возмущение локально.

Полученные решения одномерных нестационарных задач позволяют просчитать ряд типичных случаев замораживания биотканей, с достаточной точностью определить частные и общие закономерности процесса, составить серии номограмм, необходимых для использования в практической медицине, наметить дальнейшие направления исследований [12, 13, 15, 17, 21, 25—28].

Проблема разработки методов и средств предотвращения возможной негативной перестройки экологической системы Черного моря, как и других внутриматериковых водоемов и отдельных районов Мирового океана, содержащих растворенный в воде сероводород, связана с оценкой и прогнозом пространственно-временной изменчивости растворенных концентраций кислорода и сероводорода, обусловленных изменением природных и антропогенных факторов. Простейшие диффузионные, химические и биологические представления о динамике процесса приводят здесь к задачам типа Стефана для системы нелинейных эволюционных уравнений диффузии с реакцией.

Результаты расчетов конкретных вариантов даже при неполных входных данных хорошо согласуются с экспериментально измеренными распределениями концентрации по глубине. Анализ полученных решений показывает, что основную роль в процессе перераспределения играет коэффициент турбулентной диффузии [5—7, 14, 18, 20, 22, 29].

Указанные приложения подчеркивают актуальность исследования задач со свободными границами (1) и (6).

1. *Мартинсон Л. К.* О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1976.— 16, № 5.— С. 1233—1241.
2. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Там же.— 1974.— 14, № 4.— С. 891—905.
3. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами.— М. : Наука, 1990.— 536 с.
4. *Березовский А. А., Плотницкий Т. А., Леонтьев Ю. В.* Обратные преобразования в задачах кристаллизации // Обратные задачи в задачах кристаллизации и физики моря.— Киев, 1983.— С. 3—9.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.54).
5. *Березовский А. А., Богуславский С. Г.* Математическая модель формирования физических и химических полей глубинных вод Черного моря // Обратные преобразования в задачах кристаллизации и физике моря.— Киев, 1983.— С. 10—15.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.54).
6. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1987.— Вып. 7.— С. 50—60.
7. *Березовский А. А.* Классические и специальные постановки задач Стефана // Нестационарные задачи Стефана.— Киев, 1988.— С. 3—20.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
8. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана в металлургии, криохирургии и физике моря.— Киев, 1989.— 42 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 89.11).
9. *Березовский А. А.* Проекционно-сеточный метод решения одномерных задач Стефана // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1985.— Вып. 4.— С. 71—76.
10. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики: В 2-х ч.— Киев : Наук. думка, 1976.— Ч. 1.— 452 с.; Ч. 2.— 292 с.
11. *Березовский А. А.* Двумерные математические модели криодеструкции биоткани // Математическое моделирование физических процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 14—38.
12. *Березовский А. А.* Одномерная локальная задача Стефана плоскопараллельной криодеструкции биологической ткани // Задачи теплопроводности с подвижными границами.—Киев, 1985.— С. 3—8.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.2).
13. *Березовский А. А.* Пространственная локализация криовоздействия на биологические ткани // Пространственная локализация в задачах Стефана.— Киев, 1987.— С. 3—12.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.60).
14. *Березовский А. А., Богуславская Е. С.* Задачи типа Стефана в проблеме динамики сероводородной зоны Черного моря // Там же.— С. 15—22.
15. *Березовский А. А.* Одномерные математические модели криодеструкции биологической ткани // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 3—18.
16. *Березовский А. А.* Двухфазные осесимметричные стационарные задачи Стефана // Некоторые вопросы асимптотических методов нелинейной механики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 26—33.
17. *Березовский А. А.* Одномерная локальная задача Стефана плоско-параллельной криодеструкции биологической ткани // Задачи теплопроводности с подвижными границами.— Киев, 1985.— С. 3—8.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, 85.5).
18. *Березовский А. А., Богуславская Е. С.* Математическая модель динамики зоны существования кислорода и сероводорода в Черном море // Там же.— С. 9—17.
19. *Березовский А. А., Богуславская Е. С.* Математическое прогнозирование динамики сероводородной зоны Черного моря // Мор. гидрофиз. журн.— 1986.— № 6.— С. 32—39.
20. *Математическое* моделирование динамики сероводородной зоны Черного моря / Ю. А. Митропольский, В. И. Беляев, С. Г. Богуславский, А. А. Березовский // Вестн. АН УССР.— 1987.— № 5.— С. 16—26.
21. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Математическое прогнозирование в криохирургии // Наука в Сибири.— 1985.— 28 нояб. (№ 46).— С. 5.
22. *Березовский А. А., Богуславская Е. С.* К расчету верхней границы сероводородной зоны Черного моря // Задачи Стефана в спецэлектрометаллургии и физике моря.— Киев, 1986.— С. 41—47.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.19).
23. *Андреева Т. А., Березовский А. А., Довбня В. Д.* Математическое моделирование динамики образования жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Там же.— С. 3—21.
24. *Андреева Т. А., Березовский А. А., Довбня В. Д.* Динамика развития жидкой ванны в автотигле при электронно-лучевой гарнисажной плавке // Математические проблемы энергетики.— Киев : Наук. думка, 1988.— С. 133—152.

25. *Березовский А. А., Плотницкий Т. А., Андреева Т. А.* Задачи Стефана в проблемах криовоздействия на биоткани.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.71).
26. *Березовский А. А.* Асимптотическое интегрирование двумерных осесимметричных задач Стефана в криобиологии // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их прил.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 14—16.
27. *Березовская Л. М., Березовский А. А., Жураев К. О.* Основные уравнения осесимметричной гипотермии и криодеструкции биоткани // Задачи Стефана со свободными границами.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990.— С. 5—8.
28. *Березовский А. А., Жураев К. О., Юртин И. И.* Нестационарные задачи сферически-симметричной гипотермии биоткани // Там же.— С. 9—20.
29. *Березовский А. А., Ивахненкова В. В., Андреева Т. А.* Численно-аналитическая реализация пространственно локализованных и стабилизирующихся за конечное время решений нелинейного эволюционного уравнения // Нелинейные задачи диффузии и сложного теплообмена.— Киев, 1990.— С. 1—18.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.42).
30. *Хайнов Н.* Опасное цветение // Труд.— 1988.— 21 апр. (№ 91).— С. 6.

Получено 22.10.91