УДК 517.928+517.986.7

Ю. А. Митропольский, акад.,
Ю. В. Роговченко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Усреднение импульсных эволюционных систем

Для импульсной эволюционной системы

$$dx/dt + Ax = f(\omega t, x), \quad t \neq \omega^{-1} t_i(x),$$

$$\Delta x|_{t=\omega^{-1} t_i(x)} = \omega^{-1} I_i(x),$$

где A — секториальный оператор в банаховом пространстве X, обоснован принцип усреднения.

Для імпульсної еволюційної системи

$$dx/dt + Ax = f(\omega t, x), \quad t \neq \omega^{-1} t_i(x),$$

$$\Delta x|_{t=\omega^{-1} t_i(x)} = \omega^{-1} I_i(x),$$

де A — секторіальний оператор у банаховому просторі X, обгрунтовано принцип усереднення.

Известно, что метод усреднения [1—3] является эффективным методом исследования нелинейных колебательных систем, в том числе и активно изучаемых в последнее время дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [3—5]. В настоящей работе приводится обоснование принципа усреднения Н. Н. Боголюбова для нелинейных эволюционных систем с быстро осциллирующей правой частью и малым импульсным возмущением на гиперповерхностях. Обоснованию метода усреднения для абстрактных параболических уравнений без учета импульсного воздействия посвящена работа [6].

Рассмотрим импульсную эволюционную систему (ИЭС)

$$dx/dt + Ax = f(\omega t, x), \quad t \neq \omega^{-1} t_i(x), \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\omega^{-1} t_i(x)} = \omega^{-1} I_i(x),$$

где $t > 0$, $\omega > 0$, A — секториальный оператор в банаховом пространстве X [7], $\operatorname{Re} \sigma(A) > \gamma > 0$, а следовательно, для $\alpha > 0$ определены дробные степени оператора A^α и пространства $X^\alpha = D(A^\alpha)$ с нормой $|x|_{X^\alpha} = |x|_X + |A^\alpha x|_X$; отображения $f: \mathbb{R}_+ \times U \to X$, $I_i: U \to X^\alpha$, $t_i: U \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, определены и непрерывны по своим переменным в соответствующих областях, $U = \{x \in X^\alpha; |x|_{X^\alpha} \leqslant \rho\}$.

Определение. *Под решением задачи Коши $x(0) = x_0$ для ИЭС (1) на интервале $[0, s)$ будем понимать кусочно-непрерывную с разрывами первого рода функцию $x_\omega(t)$; $x: [0, s) \times (\omega_0, +\infty) \to X$ такую, что отображение $f(\omega t, x_\omega(t)): [0, \omega s) \to X$ непрерывно, $x_\omega(t) \in D(A)$ для произвольного $\omega \in (\omega_0, +\infty)$ и $x_\omega(t)$ удовлетворяет при $t \neq \omega^{-1}t_i(x)$ первому уравнению в (1), а при $t = \omega^{-1}t_i(x)$ — второму уравнению.*

Будем предполагать, что ИЭС (1) является одноударной, т. е. интегральная кривая произвольного решения ИЭС (1) пересекается с каждой из гиперповерхностей $t = \omega^{-1}t_i(x)$ не более одного раза (примеры одноударных систем и условия, обеспечивающие одноударность, см. в [8, 9]).

Пусть для ИЭС (1) выполнены следующие предположения:

1) отображение f гельдерово по t и равномерно C^1-гладко по $x \in U$;

2) отображение I_i равномерно C^1-гладко по $x \in U$ для произвольного натурального i;

3) отображения t_i таковы, что для произвольного натурального i выполнены условия

$$0 < \Theta_1 \leqslant \inf_{x \in U} t_{i+1}(x) - \sup_{x \in U} t_i(x) \leqslant \Theta_2 < +\infty;$$

4) равномерно по $x \in U$ существуют пределы

$$\lim_{N \leftarrow \infty} \Big| N^{-1} \int_0^N f(t, x)\, dt - f_0(x) \Big|_X = 0,$$

$$\lim_{N \leftarrow \infty} \Big| N^{-1} \sum_{0 < t_i(x) < N} I_i(x) - I_0(x) \Big|_{X^\alpha} = 0.$$

Замечание 1. Из условий 1 и 2 следует, что отображения f и I_i удовлетворяют условию Липшица по переменной x с постоянными N и K и ограничены постоянными M и L соответственно. Нетрудно убедиться в том, что аналогичными свойствами будут обладать и отображения f_0 и I_0.

Замечание 2. Для гиперповерхностей класса C^1 оценка сверху в условии 3 может быть получена непосредственно из условия отделимости гиперповерхностей.

Сопоставим ИЭС (1) систему (будем называть ее усредненной)

$$dz/dt + Az = f_0(z) + I_0(z) \tag{2}$$

и покажем близость решений ИЭС (1) и усредненной системы (2) на отрезке $[0, \Omega]$, где Ω — положительная постоянная, которая может быть выбрана как угодно большой.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1—4. Тогда если решение задачи Коши $z(0) = x_0$ для усредненной системы (2) $z = z(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$ и расположено в области U вместе с некоторой своей ρ-окрестностью, то для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\Omega > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ и $t \in [0, \Omega]$ будет справедливо неравенство $|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Будем непосредственно оценивать уклонение решения $x_\omega(t)$ ИЭС (1) от решения $z(t)$ усредненной системы (2) на отрезке $t \in [0, \Omega]$, заменив системы (1) и (2) интегральными уравнениями. По аналогии с [8] нахождение решений задачи Коши $x(0) = x_0$ для ИЭС (1) равносильно нахождению решений интегрального уравнения

$$x_\omega(t, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(p)}) = e^{-At} x_0 + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(\omega\tau, x_\omega(\tau, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)}))\, d\tau +$$

$$+\omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i(y^{(i)})<t} e^{-A(t-\omega^{-1}t_i(y^{(i)}))}I_i(y^{(i)}), \qquad (3)$$

где фиксированные элементы $y^{(i)}\in U$, $i=\overline{1,p}$, подбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$y^{(i)}+I_i(y^{(i)})=x_\omega(\omega^{-1}t_i(y^{(i)}),y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(p)}),\quad i=\overline{1,p},$$

а p — число гиперповерхностей $t=\omega^{-1}t_i(x)$, попадающих в интервал $(0,\ \Omega)$.

Введем обозначения

$$t_1(y^{(1)})=t_1^0,\quad t_2(y^{(2)})=t_2^0,\ldots,t_p(y^{(p)})=t_p^0,$$

при этом

$$0\equiv\omega^{-1}t_0^0<\omega^{-1}t_1^0<\omega^{-1}t_2^0<\ldots<\omega^{-1}t_p^0<\omega^{-1}t_{p+1}^0\equiv\Omega$$

и тогда уравнение (3) перепишется в виде

$$x_\omega(t)=e^{-At}x_0+\int_0^t e^{-A(t-\tau)}f(\omega\tau,x_\omega(\tau))\,d\tau+$$

$$+\omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\omega^{-1}t_i^0)}I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)),\quad t\in[0,\Omega]. \qquad (4)$$

В то же время решение задачи Коши $z(0)=x_0$ для усредненной системы (2) удовлетворяет интегральному уравнению [7]

$$z(t)=e^{-At}x_0+\int_0^t e^{-A(t-\tau)}[f_0(z(\tau))+I_0(z(\tau))]\,d\tau, \qquad (5)$$

$$t\in[0,\Omega].$$

Нетрудно заметить, что при принятых предположениях уравнения (4) и (5) будут иметь единственное решение.

В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть A — секториальный оператор в X, $\operatorname{Re}\sigma(A)>\gamma>0$. Тогда существуют точные верхние грани*

$$\sup_{\substack{t-\tau\geqslant\eta>0\\ t,\tau\in[0,\Omega]}}|e^{-A(t-\tau)}|_{X^\alpha}=F,\qquad \sup_{\substack{t-\tau\geqslant\eta>0\\ t,\tau\in[0,\Omega]}}|e^{-A(t-\tau)}|_X=G,$$

$$\sup_{\substack{t-\tau\geqslant\eta>0\\ t,\tau\in[0,\Omega]}}|e^{-A(t-\tau)}-E|_{X^\alpha}=H.$$

Доказательство леммы несложно и проводится с использованием следующих оценок, справедливых при $t>0$ [7]:

$$|e^{-At}|_X\leqslant Ce^{-\gamma t},\quad |A^\alpha e^{-At}|_X\leqslant C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\gamma t},$$

$$|(e^{-At}-E)x|_X\leqslant\frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^\alpha|A^\alpha x|_X,$$

где C, C_α, $C_{1-\alpha}$ — некоторые положительные постоянные, причем C_α ограничена по α на каждом компактном интервале, лежащем в $(0,+\infty)$.

Лемма 2. *Пусть $x_\omega(t)$ — решение задачи Коши $x(0)=x_0$ для ИЭС (1), $z(t)$ — решение задачи Коши $z(0)=x_0$ для усредненной системы (2). Тогда функция $z(t)$ будет локально гельдерова из $(0,\Omega)$ в X^α, а функция $x_\omega(t)$ — локально гельдерова из $(\omega^{-1}t_i^0,\ \omega^{-1}t_{i+1}^0)$ в X^α для всех $i=\overline{0,p}$, т. е. существуют такие положительные постоянные Q и R, что*

$$|z(t+h)-z(t)|_{X^\alpha}\leqslant Qh^{\delta_1},\quad 0<\delta_1<1-\alpha,$$

$$|x_\omega(t+h)-x_\omega(t)|_{X^\alpha}\leqslant Rh^{\delta_2},\quad 0<\delta_2\leqslant 1.$$

Первая часть утверждения леммы 2 обоснована в ходе доказательства леммы 3.3.2 [7], а вторая часть устанавливается с помощью теоремы 3.5.2 из [7] аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [8].

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1. Согласно принятым предположениям отрезок $[0, \Omega]$ изменения t разбивается точками $\omega^{-1}t_i^0$ на $p+1$ отрезков $(\omega^{-1}t_i^0, \omega^{-1}t_{i+1}^0)$, $i=\overline{0,p}$, длина каждого из которых не превышает $\omega^{-1}\Theta_2$. Поскольку вторая часть утверждения леммы 2 верна только на интервалах непрерывности решения $x_\omega(t)$ ИЭС (1), будем учитывать этот факт, выполняя оценки на интервалах $(\omega^{-1}t_i^0, \omega^{-1}t_{i+1}^0)$, $i=\overline{0,p}$.

Рассмотрим теперь разность решений $|x_\omega(t)-z(t)|_{X^\alpha}$, представив ее в следующем виде:

$$|x_\omega(t)-z(t)|_{X^\alpha} \leqslant \Big|\int_0^t e^{-A(t-\tau)}[f(\omega\tau, x_\omega(\tau)) - f_0(x_\omega(\tau))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+\Big|\int_0^t e^{-A(t-\tau)}[f_0(x_\omega(\tau)) - f_0(z(\tau))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} + \Big|\omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\omega^{-1}t_i^0)} \times$$

$$\times I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - \omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\tau)} I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0))\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+\Big|\omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\tau)} I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - \int_0^t e^{-A(t-\tau)} I_0(z(\omega^{-1}t_i^0))\,d\tau\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+\Big|\int_0^t e^{-A(t-\tau)}[I_0(z(\omega^{-1}t_i^0)) - I_0(z(\tau))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} = \sum_{j=1}^5 S_j \qquad (6)$$

и оценим каждое из слагаемых в отдельности.

Для первого слагаемого имеем

$$S_1 \leqslant \sum_{k=0}^p \Big| \sum_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}[f(\omega\tau, x_\omega(\tau)) - f(\omega\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+\sum_{k=0}^p \Big| \int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}[f(\omega\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)) - f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))]\,d\tau +$$

$$+\sum_{k=0}^p \Big| \int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}[f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)) - f_0(x_\omega(\tau))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha}. \qquad (7)$$

Первое и третье слагаемые из (7) с помощью леммы 2 оцениваются следующим образом ($p_0 = p+1$):

$$\sum_{k=0}^p \Big| \int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}[f(\omega\tau, x_\omega(\tau)) - f(\omega\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^p FN\,|x_\omega(\tau) - x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)|_{X^\alpha}\,\omega^{-1}(t_{k+1}^0 - t_k^0) \leqslant FNRp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta},$$

$$\sum_{k=0}^p \Big| \int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}[f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)) - f_0(x_\omega(\tau))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} \leqslant \sum_{k=0}^p FN\,|x_\omega|(\omega^{-1}t_k^0) -$$

$$- x_\omega(\tau)\Big|_{X^\alpha}\omega^{-1}(t_{k+1}^0 - t_k^0) \leqslant FNRp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_2}.$$

Для оценки второго слагаемого воспользуемся следующим преобразованием:

$$\int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} f(\omega\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\,d\tau = \frac{1}{\omega}\Big\{\int_0^{t_{k+1}^0} f(\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\,d\tau -$$

$$- \int_0^{t_k^0} f(\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\,d\tau\Big\} = \frac{t_{k+1}^0}{\omega}\Big\{\frac{1}{t_{k+1}^0}\int_0^{t_{k+1}^0} f(\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\,d\tau - f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\Big\} +$$

$$+ \frac{t_k^0}{\omega}\Big\{f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)) - \frac{1}{t_k^0}\int_0^{t_k^0} f(\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))\,d\tau\Big\} + \omega^{-1}(t_{k+1}^0 - t_k^0)\,f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)).$$

В силу условия 4 можно построить такую монотонно убывающую функцию $g(t)$, стремящуюся к нулю при $t \to +\infty$, что при всех $x \in U$

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau, x)\,d\tau - f_0(x)\right|_{X^\alpha} + \left|\frac{1}{t}\sum_{0<t_i<t} I_i(x) - I_0(x)\right|_{X^\alpha} \leqslant g(t),$$

поэтому второе слагаемое в (7) оценивается так:

$$\sum_{k=0}^{p}\Big|\int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} e^{-A(t-\tau)}\,[f(\omega\tau, x_\omega(\omega^{-1}t_k^0)) - f_0(x_\omega(\omega^{-1}t_k^0))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} F\left[\frac{t_{k+1}^0}{\omega}g(t_{k+1}^0) + \frac{t_k^0}{\omega}g(t_k^0)\right] \leqslant 2F\Omega p_0\omega^{-1}g(\Omega).$$

Таким образом, для первого слагаемого S_1 имеем оценку

$$S_1 \leqslant 2Fp_0\,[NR(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_2} + \Omega\omega^{-1}g(\Omega)]. \tag{8}$$

Оценка для S_2 очевидна:

$$S_2 \leqslant FN\int_0^t |x_\omega(\tau) - z(\tau)|_{X^\alpha}\,d\tau. \tag{9}$$

Оценим теперь третье слагаемое:

$$S_3 \leqslant \sum_{k=0}^{p}\omega^{-1}\sum_{t_k^0<t_i^0<t_{k+1}^0} |e^{-A(t-\tau)}(e^{-A(\tau-\omega^{-1}t_i^0)} - E)\,I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0))\Big|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \omega^{-1}\sum_{k=0}^{p}\sum_{t_k^0<t_i^0<t_{k+1}^0} GHL \leqslant GHLp_0\Theta_2\omega^{-2}. \tag{10}$$

Перейдем к оценке четвертого слагаемого:

$$S_4 \leqslant \Big|\omega^{-1}\sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\tau)}I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - \int_0^t e^{-A(t-\tau)}I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0))\,d\tau\Big|_{X^\alpha} +$$

$$+ \Big|\int_0^t e^{-A(t-\tau)}\,[I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - I_0(z(\omega^{-1}t_i^0))]\,d\tau\Big|_{X^\alpha}. \tag{11}$$

Первое слагаемое в правой части (11) оценивается так:

$$\left| \omega^{-1} \sum_{0<\omega^{-1}t_i^0<t} e^{-A(t-\tau)} I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - \int_0^t e^{-A(t-\tau)} I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0))\, d\tau \right|_{X^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \omega^{-1} G \sum_{k=0}^{p} \left\{ t_{k+1}^0 \left| \frac{1}{t_{k+1}^0} \sum_{0<t_i^0<t_{k+1}^0} I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) \right|_{X^\alpha} + \right.$$

$$\left. + t_k^0 \left| \frac{1}{t_k^0} \sum_{0<t_i^0<t_k^0} I_i(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) \right|_{X^\alpha} \right\} \leqslant \omega^{-1} G p_0 [t_{k+1}^0 g(t_{k+1}^0) +$$

$$+ t_k^0 g(t_k^0)] \leqslant 2\omega^{-1} G p_0 \Omega g(\Omega).$$

Второе слагаемое в (11) оценивается очевидным образом:

$$\left| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} [I_0(x_\omega(\omega^{-1}t_i^0)) - I_0(z(\omega^{-1}t_i^0))]\, d\tau \right|_{X^\alpha} \leqslant GK \int_0^t |x_\omega(\tau) - z(\tau)|_{X^\alpha} d\tau.$$

Таким образом, для S_4 имеем следующую оценку:

$$S_4 \leqslant 2\omega^{-1} G p_0 \Omega g(\Omega) + GK \int_0^t |x_\omega(\tau) - z(\tau)|_{X^\alpha} d\tau. \tag{12}$$

И, наконец, оценка для S_5 легко получается с помощью леммы 2:

$$S_5 \leqslant \sum_{k=0}^{p} G \int_{\omega^{-1}t_k^0}^{\omega^{-1}t_{k+1}^0} K |z(\omega^{-1}t_i^0) - z(\tau)|_{X^\alpha} d\tau \leqslant GKQp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_1}. \tag{13}$$

Объединяя оценки (8) — (11), (13), получаем

$$|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} \leqslant 2FNRp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_2} + GKQp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_1} +$$

$$+ 2p_0\omega^{-1}(F+G)\Omega g(\Omega) + (FN+GK) \int_0^t |x_\omega(\tau) - z(\tau)|_{X^\alpha} d\tau + GHLp_0\Theta_2\omega^{-2}. \tag{14}$$

Возьмем теперь произвольно малое $\varepsilon > 0$ и выберем $\omega_0 > 0$ столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$2FNRp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_2} < \frac{\varepsilon}{4} e^{-(FN+GK)\Omega},$$

$$GKQp_0(\omega^{-1}\Theta_2)^{1+\delta_1} < \frac{\varepsilon}{4} e^{-(FN+GK)\Omega},$$

$$2(F+G)\, p_0 \Omega g(\Omega)\omega^{-1} < \frac{\varepsilon}{4} e^{-(FN+GK)\Omega},$$

$$GHLp_0\Theta_2\omega^{-2} < \frac{\varepsilon}{4} e^{-(FN+GK)\Omega}.$$

Тогда для $\omega > \omega_0$ оценка (14) примет вид

$$|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} < \varepsilon e^{-(FN+GK)\Omega} + (FN+GK) \int_0^t |x_\omega(\tau) - z(\tau)|_{X^\alpha} d\tau,$$

откуда в силу неравенства Гронуолла — Беллмана получаем следующую оценку при $t \in [0, \Omega]$:

$$|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} \leqslant \varepsilon e^{-(FN+GK)\Omega} e^{\int\limits_0^\Omega (FN+GK)d\tau} = \varepsilon,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Перейдем к обоснованию метода усреднения на бесконечном временном интервале и установим связь между устойчивостью стационарных решений усредненной системы (2) и устойчивостью соответствующих периодических решений ИЭС (1) для больших значений ω. Для этого нам потребуется дополнительно следующее условие: 5) ИЭС (1) является T-периодической, т. е. для некоторого $T > 0$ существует натуральное число q такое, что

$$t_{i+q}(x) = t_i(x) + T, \quad f(t+T, x) = f(t, x), \quad I_{i+q}(x) = I_i(x).$$

Определение. *Если для каждого x_0 из некоторого множества $U_1 \subset U \subset X^\alpha$ определено единственное решение x_ω (t, x_0) задачи Коши $x(0) = x_0$ для ИЭС (1), то оператор V_t $(x_0, \omega) = x_\omega$ (t, x_0), определенный для произвольного $t \in [0, \Omega]$ и ставящий в соответствие каждому x_0 значение указанного решения задачи Коши в точке t (при некотором $\omega > 0$), будем называть оператором сдвига по траекториям ИЭС (1), или сокращенно оператором сдвига (ср. с [10, 11]).*

Теорема 2. *Пусть — для ИЭС выполнены предположения 1—3, 5. Тогда*

1) *стационарному решению z_0 усредненной системы (2) при больших частотах ω соответствует единственное $\omega^{-1}T$-периодическое решение ИЭС (1), т. е. найдутся такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $\omega_\varepsilon > 0$, что для всех $\omega > \omega_\varepsilon$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ ИЭС (1), периодическое с периодом $\omega^{-1}T$ и такое, что $|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} \leqslant \varepsilon$;*

2) *если весь спектр оператора $\Lambda = A - D_x(f_0 + I_0)(z_0)$ расположен строго в правой полуплоскости, то указанное $\omega^{-1}T$-периодическое решение ИЭС (1) асимптотически устойчиво при больших значениях ω, т. е. существуют такие $\omega_0 > \omega_\varepsilon$, $C > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для произвольных начальных данных x_* таких, что $|z_0 - x_*|_{X^\alpha} < \varepsilon_1$, решение $x(t)$ ИЭС (1) существует на бесконечном временном интервале и справедлива оценка*

$$|x(t) - x_\omega(t)|_{X^\alpha} \leqslant Ce^{-\beta t}|x_* - x_0|_{X^\alpha},$$

где $\beta = \min\limits_{\lambda \in \sigma(\Lambda)} \operatorname{Re}\lambda > 0.$

Доказательство. Пусть z_0 — устойчивая стационарная точка усредненной системы (2). Выберем $\omega_1 > 0$ и $\rho_1 > 0$ так, чтобы при $\omega > \omega_1$ и $x_0 \in S_{\rho_1} = \{x \in X^\alpha : |x - z_0|_{X^\alpha} \leqslant \rho_1\}$ существовало решение задачи Коши $x(0) = x_0$ для ИЭС (1), соответствующее решению z_0 усредненной системы (2) (это можно сделать в силу теоремы 1). Обозначим указанное решение через $x_\omega(t, x_0)$ и введем оператор сдвига $W(x_0, \omega, t) = x_\omega(t, x_0)$. При принятых предположениях этот оператор осуществляет согласно [10, 11] непрерывное по всем переменным и непрерывно-дифференцируемое по x_0 отображение $W: S_{\rho_1} \times (\omega_1, +\infty) \times (0, \Omega] \to X^\alpha$, причем в силу условий теоремы спектр оператора $D_{x_0}W(x_0, +\infty, t)$ (при $\omega = +\infty$) состоит из нуля и чисел вида $e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \sigma(\Lambda)$. Поскольку $0 \bar{\in} \sigma(\Lambda)$, то единица не будет принадлежать спектру оператора $D_{x_0}W(x_0, +\infty, t)$. Тогда в силу теоремы о неявной функции найдутся такие $\rho_2 > 0$ и $\omega_2 > \omega_1$, что при $\omega > \omega_2$ уравнение

$$W(x_0, \omega, t) = x_* \tag{15}$$

будет иметь при $t \in (0, \Omega)$ единственное непрерывное решение $x_0^\omega(t)$ в шаре $S_{\rho_2} = \{x \in X^\alpha : |x - z_*|_{X^\alpha} \leqslant \rho_2\}$ такое, что $x_0^\omega(0) = x_0$. Таким образом, установлено, что при больших частотах ω будет существовать единственное $\omega^{-1}T$-периодическое решение ИЭС (1), начальные данные которого определяются из уравнения (15). При этом в силу теоремы 1 будет справедлива оценка $|x_\omega(t) - z(t)|_{X^\alpha} \leqslant \varepsilon$, что и завершает первую часть доказательства теоремы 2.

Вторая часть утверждения теоремы 2 основывается на том, что условия теоремы обеспечивают возможность применения к ИЭС (1) результатов § 3 работы [8], обеспечивающих асимптотическую устойчивость $\omega^{-1}T$-периодического решения $x_\omega(t)$ ИЭС (1) и необходимую оценку. Теорема доказана.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1974.— 440 с.
3. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелнннейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 364 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 56—64.
5. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика.— 1971.— Вып. 9.— С. 101—117.
6. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.— 1970.— 81, № 1.— С. 53—61.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.
8. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость.— Киев, 1986.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.65).
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема «биений» в импульсных системах.— Киев, 1990.— 46 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.11).
10. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 332 с.
11. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 500 с.

Получено 14.06.91