

УДК 517.927.4

Н. И. Ронто, д-р физ.-мат. наук,
О. М. Мартынюк, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Исследование периодических решений счетных систем второго порядка

Приведен численно-аналитический метод исследования существования и приближенного построения периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений второго порядка.

Наведено чисельно-аналітичний метод дослідження існування та наближеної побудови періодичних розв'язків злічених систем диференціальних рівнянь другого порядку.

Обоснование правомочности применения численно-аналитического метода последовательных периодических приближений к бесконечным системам дифференциальных уравнений имеет ряд особенностей [1, 2].

В настоящей работе этот метод распространяется на новый класс уравнений, а именно на счетные системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ — точка пространства m ограниченной числовой последовательности с нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$, $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t,$

x), ...) — непрерывная, периодическая по t с периодом T в области

$$(t, x, \dot{x}) \in (-\infty, \infty) \times D_1 \times D_2 \quad (2)$$

функция, принимающая значение в пространстве $\mathbf{m}$; D_1, D_2 — ограниченные замкнутые области пространства $\mathbf{m}$.

Рассматривается задача исследования существования и приближенного нахождения T -периодического решения (1), т. е. решения T -периодической краевой задачи (1), (3)

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T). \quad (3)$$

Под T -периодическим решением системы (1) будем понимать счетную вектор-функцию $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), \dots)$, определенную при $t \in (-\infty, \infty)$, принимающую значения в пространстве $\mathbf{m}$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (1), а также условию (3).

Предположим, что в области (2) правая часть $f(t, x, \dot{x})$ системы (1) удовлетворяет условию ограниченности счетным вектором $M = (M_1, \dots, M_n, \dots) \in \mathbf{m}$ и условию Липшица со счетными матрицами K_1, K_2 с неотрицательными элементами

$$|f(t, x, y)| \leq M,$$

$$|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leq K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|, \quad (4)$$

$$t \in (-\infty, \infty), \quad x', x'' \in D_1, \quad y', y'' \in D_2,$$

где $|f(t, x, y)| = (|f_1(t, x, y)|, \dots, |f_n(t, x, y)|, \dots)$.

Предположим, что параметры M, K_1, K_2, T, D_1, D_2 краевой задачи (1), (3) таковы, что для них выполняются условия:

1) множество D_β точек $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}, \dots) \in \mathbf{m}$, содержащихся в области D_1 вместе со своей $\beta = \frac{T^2}{4} M$ -окрестностью, непусто, и множество D_γ , образованное $\gamma = \frac{5}{6} TM$ -окрестностью нулевого вектора пространства $\mathbf{m}$, лежит в области D_2

$$D_\beta \neq \emptyset, \quad D_\gamma \subset D_2; \quad (5)$$

2) оператор Q_0 , порождаемый матрицей

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -\frac{T^2}{4} K_1 & \frac{T^2}{4} K_2 \\ \frac{5}{6} TK_1 & \frac{5}{6} TK_2 \end{bmatrix},$$

является вполне регулярным [3]

$$\|Q_0\| \leq q_0 < 1. \quad (6)$$

1. Сходимость последовательных периодических приближений. Для рассматриваемой задачи (1), (3) построим последовательность счетных функций $x_m(t, x_0) = (x_{m1}(t, x_0), \dots, x_{mn}(t, x_0), \dots)$, зависящих от точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots)$, как от параметра, и удовлетворяющих периодическим краевым условиям (3) для всех m при произвольном $x_0 \in D_\beta$. Докажем сходимость этой последовательности и выясним связь ее предельной функции с периодическим решением задачи (1), (3).

Нам понадобится в дальнейшем линейный оператор L , который действует на непрерывную при $t \in [0, T]$ счетную вектор-функцию $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t), \dots)$ согласно формуле

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds, \quad (7)$$

где S — оператор интегрального среднего

$$Sf(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (8)$$

Если оператором L подействовать на функцию (7), то

$$\begin{aligned} L(Lf(t)) = L^2f(t) &= \int_0^t [Lf(t) - S(Lf(t))] dt = \int_0^t \left[\int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds - \right. \\ &\quad \left. - S\left(\int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds\right) \right] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) — (9) вытекают следующие свойства операторов S, L, L^2 :

$$\frac{d}{dt} Lf(t) = f(t) - Sf(t), \quad \frac{d}{dt} L^2f(t) = Lf(t) - S(Lf(t)), \quad (10)$$

$$S^2f(t) = Sf(t), \quad (11)$$

$$\int_0^T Sf(t) dt = S\left(\int_0^T f(t) dt\right) = \int_0^T f(t) dt,$$

$$Lf(t)_{t=T} = \int_0^T \left[f(t) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right] dt = Lf(t)_{t=0} = 0, \quad (12)$$

$$L^2f(t)_{t=T} = 0 = L^2f(t)_{t=0}, \quad S(Lf(t))_{t=0} = S(Lf(t))_{t=T} = S(Lf(t)). \quad (13)$$

Очевидно, что если $f(t)$ — периодическая с периодом T функция, то функции $Lf(t)$ и $L^2f(t)$, вычисленные согласно (7), (9), также будут периодическими функциями с периодом T .

Согласно лемме 3.1 [1, с. 13], которая справедлива и в случае счетномерной вектор-функции $f(t)$, имеем

$$|Lf(t)| \leq \alpha_1(t) |f(t)|_0, \quad (14)$$

где

$$|f(t)|_0 = \left(\sup_{t \in [0, T]} |f_1(t)|, \dots, \sup_{t \in [0, T]} |f_n(t)|, \dots \right), \quad (15)$$

$$\alpha_1(t) = 2t \left(1 - \frac{t}{T} \right) \leq \frac{T}{2}.$$

Далее, в силу (9), (14), (15) для всех $t \in [0, T]$

$$|L^2f(t)| \leq \alpha_1(t) |Lf(t)|_0 \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) |f(t)|_0 \leq \frac{T^2}{4} |f(t)|_0. \quad (16)$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} x_m(t, x_0) &= x_0 + L^2f(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0) + p_2 t^2 + p_1 t, \\ m &= 1, 2, \dots, x_0(t, x_0) = x_0 \in D_B, \\ x_m(t, x_0) &= (x_{m1}(t, x_0), \dots, x_{mn}(t, x_0), \dots), \end{aligned} \quad (17)$$

где x_0, p_2, p_1 — параметры, принадлежащие пространству m .

Выберем параметры p_1 и p_2 таким образом, чтобы функции вида (17) удовлетворяли периодическим краевым условиям (3) для всех m при произвольном значении $x_0 \in D_B$.

С учетом (10) из (17) следует

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t, x_0) &= Lf(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0)) - S(Lf(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0)) + \\ &\quad + 2p_2 t + p_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в периодические краевые условия (3) и принимая во внимание равенства (12), (13), для определения p_1 и p_2 получаем бесконечноммерную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}x_0 &= x_0 + p_2 T^2 + p_1 T, \\p_1 &= 2p_2 T + p_1,\end{aligned}$$

откуда находим $p_1 = p_2 = 0$. Следовательно, все члены последовательности функций

$$\begin{aligned}x_m(t, x_0) &= x_0 + L^2 f(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0)), \\m &= 1, 2, \dots, x_0(t, x_0) = x_0 \in D_B,\end{aligned}\tag{19}$$

зависящих от x_0 , как от параметра, удовлетворяют периодическим краевым условиям (3) при произвольном x_0 .

Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательных приближений $x_m(t, x_0)$ вида (19).

Т е о р е м а 1. Пусть правая часть $f(t, x, y)$ счетной системы дифференциальных уравнений определена, непрерывна, периодическая по t с периодом T в области (2) и принимает значения в пространстве m , а также выполнены условия (4)–(6).

Тогда последовательность функций $x_m(t, x_0)$ вида (19), зависящих от x_0 , как от параметра, и удовлетворяющих периодическим краевым условиям (3), равномерно сходится при $m \rightarrow \infty$ вместе со своей производной $\dot{x}_m(t, x_0)$ относительно области

$$(t, x_0) \in [0, T] \times D_B\tag{20}$$

к предельным функциям соответственно $x^*(t, x_0)$, $\dot{x}^*(t, x_0)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t, x_0) = \dot{x}^*(t, x_0).\tag{21}$$

При этом $x^*(t, x_0)$ является удовлетворяющим при $t = 0$ начальным условиям

$$x(0) = x^*(0, x_0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^*(0, x_0) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0)))\tag{22}$$

и одновременно T -периодическим условиям (3) решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + L^2 f(t, x(t), \dot{x}(t)),\tag{23}$$

т. е. решением краевой задачи

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) - S(f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))).\tag{24}$$

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))).$$

Кроме того, справедливы следующие оценки погрешности:

$$\|x_m(t, x_0) - x^*(t, x_0)\| \leq \frac{T^2}{4} \frac{q^m}{1-q} \|M\|,\tag{25}$$

$$\|\dot{x}_m(t, x_0) - \dot{x}^*(t, x_0)\| \leq \frac{5}{6} T \frac{q^m}{1-q} \|M\|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\|x(t)\| = \sup_n \max_{t \in [0, T]} |x_n(t)|, \quad \|Q\| = \left\| \frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} T K_2 \right\| \leq q < 1.$$

Доказательство. Сначала покажем, что если $x_0 \in D_B$, то все функции $x_m(t, x_0) \in D_1$, а $\dot{x}_m(t, x_0) \in D_2$ при $t \in [0, T]$. Полагая в (19) $m=0$, на основании (16) и условия ограниченности (4) имеем

$$x_1(t, x_0) - x_0 = L^2 f(t, x_0, 0),$$

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leq \frac{T^2}{4} M. \quad (26)$$

Дифференцируя (19) с учетом (10), получаем последовательность

$$\dot{x}_m(t, x_0) = Lf(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0)) - S(Lf(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0))),$$

$$m = 1, 2, \dots, x_0(t, x_0) = x_0. \quad (27)$$

Из (27) при $m=0$ в силу (4), (14), учитывая, что

$$\int_0^T \alpha_1(t) dt = \frac{T^2}{3},$$

получаем

$$|\dot{x}_1(t, x_0)| \leq \alpha_1(t) M + \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_1(t) dt M \leq \frac{5}{6} TM. \quad (28)$$

Если учесть предположение (5), то на основании неравенств (26), (28) заключаем, что $x_1(t, x_0) \in D_1$, а $\dot{x}_1(t, x_0) \in D_2$, если $x_0 \in D_B$.

Методом математической индукции нетрудно установить, что для всех $m = 1, 2, \dots, t \in [0, T]$ и любого $x_0 \in D_B$ действительно все функции $x_m(t, x_0)$ вида (19) принадлежат области D_1 , а производные $\dot{x}_m(t, x_0)$, вычисляемые по (27), не выходят из области D_2 :

$$x_m(t, x_0) \in D_1, \quad \dot{x}_m(t, x_0) \in D_2, \quad m = 1, 2, \dots, x_0 \in D_B.$$

Переходя к доказательству сходимости последовательности (19), оценим разности

$$x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0), \quad \dot{x}_2(t, x_0) - \dot{x}_1(t, x_0).$$

На основании (19), (27) с учетом (14), (16) и условия Липшица (4) имеем

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leq |L^2[f(t, x_1(t, x_0), \dot{x}_1(t, x_0)) - f(t, x_0, 0)]| \leq$$

$$\leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) |f(t, x_1(t, x_0), \dot{x}_1(t, x_0)) - f(t, x_0, 0)|_0 \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) [K_1 |x_1(t, x_0) - x_0|_0 + K_2 |\dot{x}_1(t, x_0)|_0], \quad (29)$$

$$|\dot{x}_2(t, x_0) - \dot{x}_1(t, x_0)| \leq |L[f(t, x_1(t, x_0), \dot{x}_1(t, x_0)) - f(t, x_0, 0)]| +$$

$$+ S |L[f(t, x_1(t, x_0), \dot{x}_1(t, x_0)) - f(t, x_0, 0)]| \leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) |f(t, x_1(t, x_0), \dot{x}_1(t, x_0)) - f(t, x_0, 0)|_0 \leq$$

$$\leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) [K_1 |x_1(t, x_0) - x_0|_0 + K_2 |\dot{x}_1(t, x_0)|_0]. \quad (30)$$

Принимая во внимание (26), (28), из соотношения (29) получаем

$$|x_2(t, x_0) - x_1(t, x_0)| \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) \left[\frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} TK_2 \right] M = \frac{T}{2} \alpha_1(t) QM, \quad (31)$$

а из (30) —

$$|\dot{x}_2(t, x_0) - \dot{x}_1(t, x_0)| \leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) \left[\frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} TK_2 \right] M =$$

$$= \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) Q M, \quad (31')$$

где

$$Q = \frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} T K_2.$$

На основании (31), (31') методом математической индукции можно доказать, что для любого номера $m \geq 1$ справедливы неравенства

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) Q^m M, \quad (32)$$

$$|\dot{x}_{m+1}(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x_0)| \leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) Q^m M. \quad (33)$$

Так как

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq |x_{m+j}(t, x_0) - x_{m+j-1}(t, x_0)| + |x_{m+j-1}(t, x_0) - x_{m+j-2}(t, x_0)| + \dots + |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|,$$

то с учетом (32) имеем

$$|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) M. \quad (34)$$

Аналогично в силу (33) находим

$$|\dot{x}_{m+j}(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x_0)| \leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right) M. \quad (35)$$

Переходя в соотношениях (34), (35) к оценкам по норме, получаем

$$\|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\| \leq \frac{T^2}{4} \|Q\|^m \left\| \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right\| \|M\|, \quad (36)$$

$$\|\dot{x}_{m+j}(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x_0)\| \leq \frac{5}{6} T \|Q\|^m \left\| \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \right\| \|M\|.$$

Так как на основании (6)

$$\|Q_0\| = \max \left(\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T^2}{4} K_{1ij} + \frac{T^2}{4} K_{2ij} \right), \right.$$

$$\left. \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6} T K_{1ij} + \frac{5}{6} T K_{2ij} \right) \right) \leq q_0 < 1,$$

то легко видеть, что

$$\|Q\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T^2}{4} K_{1ij} + \frac{5}{6} T K_{2ij} \right) = q \leq q_0 < 1, \quad (37)$$

т. е. оператор, порождаемый матрицей $Q = \frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} T K_2$, является вполне регулярным. Следовательно, в силу (37) из (36) вытекает, что при $m \rightarrow \infty$ относительно области (20) действительно имеет место сходимость (21).

Принимая во внимание, что все функции $x_m(t, x_0)$, $\dot{x}_m(t, x_0)$ последовательностей (19), (27) удовлетворяют периодическим краевым условиям (3), легко заключить, что предельные функции (21) также удовлетворяют им.

При стремлении $j \rightarrow \infty$ из (36) для всех $m = 1, 2, \dots$ получаем требуемые оценки (25).

Если в равенствах (19), (27) перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$ и учесть соотношения (11)–(13), (21), то легко проверить, что предельная функция

$x^*(t, x_0)$ удовлетворяет уравнению (23) и начальным условиям (22), откуда на основании (10) следует, что $x^*(t, x_0)$ — решение краевой задачи (24).

Из (24) видно, что всякое решение $x^*(t, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0)$ этой задачи, для которого

$$S(f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))) = 0,$$

является в то же время и удовлетворяющим периодическим краевым условиям (3) решением исходного уравнения (1), причем таким, что его начальное значение задается по (22).

2. Исследование свойств предельной функции. В правую часть рассматриваемой системы счетных дифференциальных уравнений (1) всегда можно аддитивно ввести дополнительный счетный управляющий параметр μ и выбрать начальное значение производной y_0 таким, что при любом значении $x_0 \in D_B$ решение задачи Коши

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) + \mu, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots), \quad (38)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0 \quad (39)$$

будет удовлетворять заодно и периодическим краевым условиям (3).

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то для любой точки $x_0 \in D_B$ найдутся такие единственные значения счетного управляющего параметра

$$\mu = -S[f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))] \quad (40)$$

и начальной скорости

$$y_0 = -S[Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))], \quad (41)$$

где $x^*(t, x_0)$, $\dot{x}^*(t, x_0)$ вычисляются согласно (21), что решение $x(t) = x^*(t, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0)$ начальной задачи (38), (39) будет удовлетворять периодическим краевым условиям (3).

Доказательство. На основании теоремы 1 убеждаемся, что функция $x(t) = x^*(t, x_0)$ является решением краевой задачи (24). Тем самым найдены значения параметра μ вида (40) и начальной скорости y_0 вида (41), при которых функция $x(t) = x^*(t, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0)$ является решением краевой задачи (38), (3) при краевых условиях (39).

Покажем, что это значение параметра μ единственно, т. е. при любом отличном от (40) значении решение задачи Коши (38), (39) не будет удовлетворять периодическим краевым условиям (3).

Предположим, что существуют такие два значения μ' , μ'' , $\mu' \neq \mu''$, что решения $x(t, x_0, \mu')$, $x(t, x_0, \mu'')$ задачи Коши (38), (39) соответственно при $\mu = \mu'$ и $\mu = \mu''$ удовлетворяют периодическим краевым условиям (3), т. е. является решением уравнения (23). Тогда

$$|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| = |L^2(f(t, x(t, x_0, \mu''), \dot{x}(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu'), \dot{x}(t, x_0, \mu')))|, \quad (42)$$

$$|\dot{x}(t, x_0, \mu'') - \dot{x}(t, x_0, \mu')| = |L[f(t, x(t, x_0, \mu''), \dot{x}(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu'), \dot{x}(t, x_0, \mu'))] - S[f(t, x(t, x_0, \mu''), \dot{x}(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu'), \dot{x}(t, x_0, \mu'))]|.$$

Аналогично установлению оценок (29) — (31) из соотношений (42) получаем

$$|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| \leq \frac{T}{2} \alpha_1(t) [K_1 |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| +$$

$$+ K_2 |\dot{x}(t, x_0, \mu'') - \dot{x}(t, x_0, \mu')|], \quad (43)$$

$$|\dot{x}(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| \leq \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) [K_1 |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| + \\ + K_2 |\dot{x}(t, x_0, \mu'') - \dot{x}(t, x_0, \mu')|].$$

Обозначим через $z(t, x_0, \mu', \mu'')$ вектор

$$z(t, x_0, \mu', \mu'') = \begin{pmatrix} |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| \\ |\dot{x}(t, x_0, \mu'') - \dot{x}(t, x_0, \mu')| \end{pmatrix}.$$

Из (43) имеем

$$z(t, x_0, \mu', \mu'') \leq Q_0(t) z_0(t, x_0, \mu', \mu''), \quad (44)$$

где

$$Q_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \frac{T}{2} K_1 & \alpha_1(t) \frac{T}{2} K_2 \\ \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) K_1 & \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3} \right) K_2 \end{pmatrix}, \\ z_0(t, x_0, \mu', \mu'') = \begin{pmatrix} |x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')|_0 \\ |\dot{x}(t, x_0, \mu'') - \dot{x}(t, x_0, \mu')|_0 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$|y(t, x_0, \mu)|_0 = (\sup_i |y_1(t, x_0, \mu)|, \dots, \sup_i |y_n(t, x_0, \mu)|, \dots).$$

Так как матрица $Q_0(t)$ вида (45) мажорируется матрицей Q_0 , фигурирующей в (6), то итерируя (44), находим

$$z_0(t, x_0, \mu', \mu'') \leq Q_0^m z_0(t, x_0, \mu', \mu''). \quad (46)$$

В силу условия (6) $\lim_{m \rightarrow \infty} Q_0^m = 0$. Поэтому, переходя в (46) к пределу при $m \rightarrow \infty$, убеждаемся, что получаемое при этом соотношение возможно лишь при

$$z_0(t, x_0, \mu', \mu'') = 0,$$

т. е. при

$$x(t, x_0, \mu'') = x(t, x_0, \mu'),$$

$$\dot{x}(t, x_0, \mu'') = \dot{x}(t, x_0, \mu'), \quad \mu' = \mu''.$$

Противоречие с предположением об отличии друг от друга параметров μ' и μ'' завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. В качестве приближенного значения управляющего параметра (40) и начальной скорости (41) можно принять соответственно

$$\mu_m = -S[f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0))],$$

$$y_0^{(m)} = -S[f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0))].$$

При этом в норме пространства m справедливы оценки

$$\|\mu - \mu_m\| \leq \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$\|y_0 - y_0^{(m)}\| \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость последних неравенств непосредственно следует из (7), (8) с учетом условия Липшица (4) и неравенств (14), (34)—(36), (25).

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых предельная функция последовательности $x_m(t, x_0)$ вида (19) совпадает с решением исходной краевой задачи (1), (3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда решение $x = x^*(t)$ задачи Коши

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(0) = x_0, \quad (47)$$

$$\dot{x}(0) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))) = y_0,$$

где $x^*(t, x_0)$ — предельная функция (21), совпадает с периодическим решением краевой задачи (1), (3) тогда и только тогда, когда начальное значение x_0 является решением определяющего уравнения

$$\Delta(x_0) = 0. \quad (48)$$

При этом

$$x^*(t) = x^*(t, x_0) \quad (49)$$

и при всех $m = 1, 2, \dots$ для отклонения точного T -периодического решения $x = x^*(t) = x^*(t, x_0)$ счетной системы (1) от ее приближенного T -периодического решения $x_m(t, x_0)$ вида (19), а также для соответствующих производных справедливы оценки

$$\|x^*(t) - x_m(t, x_0)\| \leq \frac{T^2}{4} \frac{q^m}{1-q} \|M\|, \quad (50)$$

$$|\dot{x}^*(t) - \dot{x}_m(t, x_0)| \leq \frac{5}{6} T \frac{q^m}{1-q} \|M\|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Для установления достаточности условия (48) учтем, что $x^*(t, x_0)$ является T -периодическим решением (23), проходящим при $t = 0$ через точку x_0 . Но (23) эквивалентно

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Lf(t, x, \dot{x}) - S(Lf(t, x, \dot{x})), \\ \dot{x}(0) &= -S(Lf(t, x, \dot{x})), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) - S(f(t, x, \dot{x})), \quad x(0) = x_0.$$

Если выполняется условие (48), то из (51) получаем, что $x^*(t, x_0)$ является также решением задачи Коши (47). Из единственности ее решения следует справедливость равенства (49).

Необходимость условия (48) следует из таких рассуждений. Если $x = x^*(t)$ — решение периодической краевой задачи (1), (3), удовлетворяющее начальным условиям (47), то решение $x = x(t, \mu)$ задачи Коши (38), (39) будет удовлетворять периодическим краевым условиям (3) тогда, когда значение параметра μ , вычисленное по (40), равно нулю.

На основании теоремы 2 решение задачи Коши (38), (39) является также и решением периодической краевой задачи (1), (3) только при единственном значении параметра μ вида (40) и начальной скорости (41). Такое значение параметра мы уже указали при $\mu = \Delta(x_0) = 0$ и при этом выполняется равенство (49), из которого, используя (25), получаем оценки (50).

3. Достаточные условия существования периодических решений. Наряду с точным определяющим уравнением (48) введем в рассмотрение и приближенный вида

$$\Delta_m(x_0) = S[f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0))] = 0. \quad (52)$$

Лемма 1. При всех $x_0 \in D_B$ для определяющего уравнения (48) и приближенного вида (52) в норме пространства m справедлива оценка

$$\|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\| \leq \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|. \quad (53)$$

Доказательство. По определению

$$\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0) = S[f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0)) - f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0))].$$

С учетом условия Липшица (4) и неравенств (34), (35) из последнего неравенства получаем

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| \leq S[K_1|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| + K_2|x^*(t, x_0) - \dot{x}_m(t, x_0)|] \leq \left[\frac{T}{2} K_1 S(\alpha_1(t)) + K_2 S\left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3}\right) \right] Q^m (E - Q)^{-1} M,$$

или

$$\|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\| \leq \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

откуда следует оценка (53).

Теорема 4. Пусть система (1), заданная в области (2), удовлетворяет условиям (4)–(6) и следующим предположениям:

1) для некоторого целого m отображение

$$\Delta_m: \Delta_m = \Delta_m(x_0) = f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0)) \quad (54)$$

области D_B в область $\Delta_m(D_B)$ имеет слабую точку

$$\Delta_m(x^0) = 0; \quad (55)$$

2) существует замкнутая, ограниченная область D_3 , принадлежащая D_B , содержащая точку x^0 и такая, что оператор Δ_m топологически отображает D_3 на $\Delta_m D_3$;

3) на границе Γ_{D_3} области D_3 выполняется неравенство

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_3}} \|\Delta_m(x)\| \geq \frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| \right). \quad (56)$$

Тогда система (1) имеет периодическое с периодом T решение $x = x(t)$, для которого $x(0) \in D_3$.

Доказательство. Учитывая оценку (53) и лемму [1, с. 82], замечаем, что множество $\Delta_m D_3 \setminus \Pi \left(\frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| \right) \right)$ содержится в ΔD_3 . Если это множество содержит начало системы координат $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^n, \dots)$, то и множество ΔD_3 содержит его. Этого достаточно, чтобы система (1) имела периодическое по t с периодом T решение.

Для доказательства теоремы достаточно доказать соотношение

$$0 \in \Delta_m D_3 \setminus \Pi \left(\frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| \right) \right).$$

Так как отображение $\Delta_m(x)$ — топологическое, то $\Delta_m D_3$ — область и граница $\Gamma_{\Delta_m D_3}$ области $\Delta_m D_3$ есть образ границы Γ_{D_3} области D_3

$$\Gamma_{\Delta_m D_3} = \Delta_m \Gamma_{D_3}. \quad (57)$$

В силу условия 1 теоремы множество $\Delta_m D_3$ содержит нулевую точку системы $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^n, \dots)$. Эта точка принадлежит множеству $\Delta D_3 \setminus \Pi(r)$, если все точки z границы $\Gamma_{\Delta_m D_3}$ множества $\Delta_m D_3$ находятся от нее на расстоянии, не меньшем r . Из этого следует, что нуль принадлежит множеству

$$\Delta_m D_3 \setminus \Pi \left(\frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| \right) \right)$$

при

$$\inf_{z \in \Gamma_{\Delta_m D_3}} \|z\| \geq \frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| \right). \quad (58)$$

В силу равенства (57) справедливо соотношение

$$z \Rightarrow \Delta_m(x)|_{x \in \Gamma_{D_3}}, \quad (59)$$

с учетом которого неравенство (58) принимает вид

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_3}} \|\Delta_m(x)\| \geq \frac{q^m}{1-q} \left(\left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \right) \|M\|. \quad (60)$$

Из сказанного следует, что при выполнении неравенства (60) система (1) имеет периодическое с периодом T решение, что и требовалось доказать.

1. *Самойленко А. М., Ронто П. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1984.— 214 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.

Получено 04.07.91