

УДК 517.91/943

А. М. Самойленко, чл.-корр. АН Украины
(Ин-т математики АН Украины, Киев)
М. Илолов, канд. физ.-мат. наук (Тадж. ун-т, Душанбе)

Неоднородные эволюционные уравнения с импульсными воздействиями

Для эволюционных уравнений с импульсными воздействиями доказаны основные теоремы теории возмущений. Приведен пример из теории дифференциальных уравнений в частных производных с импульсными воздействиями.

Для еволюційних рівнянь з імпульсними діями доведено основні теореми теорії збурень. Наведено приклад з теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних з імпульсними діями.

Эволюционные уравнения с импульсными воздействиями и с неоднородными по времени коэффициентами представляют собой математическую модель реальных нестационарных процессов с кратковременными возмущениями, длительностью которых можно пренебречь. Такие процессы протекают в природных, сложных робото- и вибротехнических системах, обеспечивают функционирование различных систем в импульсной технологии. Отметим, что стационарные импульсные процессы с учетом начальных условий сводятся к абстрактной задаче Коши для дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и неограниченными, независимыми от времени операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Такие уравнения изучены в работах [1, 2]. В настоящей работе излагаются утверждения о разрешимости абстрактной задачи Коши в случае неоднородных по времени коэффициентов. Рассматривается пример из теории дифференциальных уравнений в частных производных с импульсами. Доказательство основных результатов содержит некоторые идеи и конструкции, изложенные в работах [3—5].

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, $\|E, [E]$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих в E , R — действительная ось, N — множество натуральных чисел. Пусть последовательность чисел $\{t_i\} \in [0, s] \subset R$, $i \in N$, — фиксированные моменты времени, причем

$t_i < t_j$ при $i < j$. Обозначим через $\tilde{C}(E)$ пространство непрерывных на $[0, s] \setminus \{t_i\}$ и непрерывных справа при $t = t_i$, $i \in N$, ограниченных функций $\varphi = \varphi(t)$ со значениями в E с нормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{C}(E)} = \sup_{0 \leq t \leq s} \|\varphi(t)\|_E, \quad \varphi \in \tilde{C}(E);$$

$L_1(E)$ — банахово пространство абсолютно интегрируемых по Бохнеру функций $f = f(t)$ со значениями в E с нормой

$$\|f\|_{L_1(E)} = \int_0^s \|f(t)\|_E dt, \quad f \in L_1(E);$$

$l_1(E)$ — банахово пространство определенных на $\{t_i\}$ функций $g_i = g(t_i)$ со значениями в E с нормой

$$\|g_i\| = \sum_{0 < t_i < s} \|g(t_i)\|_E, \quad g(t_i) \in l_1(E).$$

Через $E \oplus L_1 \oplus l_1$ обозначим банахово пространство функций $\{h, f(t), g(t_i)\}$, где $h \in E$, $f \in L_1(E)$, $g(t_i) \in l_1(E)$ с нормой

$$\|\{h, f(t), g(t_i)\}\|_{E \oplus L_1 \oplus l_1} = \|h\|_E + \int_0^s \|f(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|g(t_i)\|_E.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$du/dt = A(t)u = F(t), \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$\Delta u|_{t=t_i} \equiv u(t_i) - u(t_i - 0) = B_i u(t_i - 0) + g_i, \quad (2)$$

в которой функции du/dt , $F(t) \in L_1(E)$, $g_i \in l_1(E)$.

Относительно операторов $A(t)$ и B_i предполагается следующее:

A_1 . Оператор A замкнут и имеет плотную область определения $D(A(t)) \subset E$.

A_2 . Существует такое ω , что все $\lambda > \omega$ принадлежат резольвентному множеству оператора A .

A_3 . Функция $(A(t) - \lambda E)^{-1}x$ ($\lambda > \omega$, $x \in E$, I — тождественный оператор) интегрируема по Бохнеру.

A_4 . Существует такое $M > 0$, что для любого разбиения $s \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n \geq 0$ ($\tau_i \neq t_i$)

$$\|(A(\tau_1) - \lambda)^{-1}(A(\tau_2) - \lambda)^{-1} \dots (A(\tau_n) - \lambda)^{-1}\| \leq M(\lambda - \omega)^n.$$

B_1 . Операторы B_i замкнуты с плотными областями определения $D(B_i)$ в E .

B_2 . Существует такое ω_i , что все $\lambda > \omega_i$ принадлежат резольвентному множеству оператора B_i , $i \in N$.

B_3 . Последовательность $(B_i - \lambda)^{-1}x$ ($\lambda > \omega_i$, $x \in E$) сходится по норме $\|\cdot\|_E$.

B_4 . Существует такое $M_i > 0$, $i \in N$, что

$$\|(B_i - \lambda)\|_{l_1} \leq M_i/(\lambda - \omega_i), \quad i \in N.$$

B_5 . Существуют ограниченные операторы $(I + B_i)^{-1}$, $i \in N$.

Системе (1), (2) соответствует оператор $L \in \tilde{C}(E) \rightarrow E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)$, определенный равенством

$$Lu = \{u(0), du/dt = A(t)u, u(t_i) - (I + B_i)u(t_i - 0)\}, \quad (3)$$

где $u(0) \in E$. Область определения оператора L множество $D(L)$ есть пересечение областей определения операторов

$$du/dt \in \tilde{C}(E) \rightarrow L_1(E), \quad A(t) \in \tilde{C}(E) \rightarrow L_1(E), \quad I + B_i \in l_1(E) \rightarrow l_1(E).$$

Сформулируем утверждение, содержащее оценку решений импульсного эволюционного уравнения (1), (2) с начальным условием

$$u(0) = u_0 \in E. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть семейство операторов $A(t)$ имеет свойства $A_1 - A_4$, а операторы $B_i, i \in N$, — свойства $B_1 - B_5$. Тогда оператор L , заданный равенством (3), имеет непрерывный обратный и для решения системы (1) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u(t)\| \leq M_i e^{\omega_1 s} \left\{ \|u(0)\|_E + \int_0^s \|F(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|g_i\|_E \right\}, \quad \omega_1 > \omega. \quad (*)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы

$$\mathcal{J}_\delta(t) = (1 - \delta A(t))^{-1}, \quad A_\delta(t) = A(t) \mathcal{J}_\delta(t) \quad (5)$$

и

$$\mathcal{J}_{\delta_i} = (1 - \delta B_i)^{-1}, \quad B_{\delta_i} = B_i \mathcal{J}_{\delta_i}. \quad (6)$$

Оператор $\mathcal{J}_\delta(t)$ в (5) ограничен. Действительно,

$$\mathcal{J}_\delta(t) = \left[\frac{1}{\delta} - A(t) \right]^{-1} \delta^{-1},$$

а так как $\|[\lambda - A(t)]^{-1}\| \leq M/(\lambda - \omega)$, то $\|\mathcal{J}_\delta\| \leq M\delta^{-1} \left(\frac{1}{\delta} - \omega \right)^{-1}$.

Положим $\delta \leq 1/2\omega$, тогда $\|\mathcal{J}_\delta(t)\| \leq 2M$. Оператор $B_\delta(t)$ также ограничен, так как

$$A_\delta(t) = A(t) \mathcal{J}_\delta(t) = A(t) \frac{1}{1 - \delta A(t)} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{1 - \delta A(t)} - 1 \right) = \frac{\mathcal{J}_\delta(t)}{\delta} - \frac{1}{\delta}.$$

Следовательно,

$$\|A_\delta(t)\| \leq (2M + 1)/\delta.$$

Оператор $\mathcal{J}_{\delta_i}$ в (6) также ограничен. Действительно,

$$\mathcal{J}_{\delta_i} = \left[\frac{1}{\delta} - B_i \right]^{-1} \delta^{-1},$$

а так как $\|(\lambda - B_i)^{-1}\|_{E_1} \leq M_i/(\lambda - \omega)$, то, повторяя приведенные выше рассуждения, установим ограниченность операторов $\mathcal{J}_{\delta_i}, B_{\delta_i}$ при $\delta \leq 1/2\omega$.

Далее отметим, что $\mathcal{J}_\delta(t) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$ на $D(A(t)) \subset E$ и $\mathcal{J}_{\delta_i} \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$ на $D(B_i) \subset E$. Отсюда следует, что $A_\delta(t) \rightarrow A(t)$ и $B_{\delta_i} \rightarrow B_i$ на соответствующих областях. Обозначим далее через $L_\delta(t)$:

$$\tilde{C}(E) \rightarrow E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)$$

оператор, действующий следующим образом на $D\left(\frac{d}{dt}\right) \subset \tilde{C}(E)$:

$$L_\delta(t)u(t) = \{u(0), du/dt - A_\delta(t)u(t), u(t_i) - (I + B_{\delta_i})u(t_i - 0)\}, \quad (7)$$

и докажем, что $L_\delta \rightarrow L$ в смысле нормы пространства $E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)$ на элементах множества $D(L) \subset \tilde{C}(E)$. Для этого вычтем из равенства (7) почленно равенство (3) и вычислим норму

$$\begin{aligned} \|L_\delta u - Lu\|_{E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)} &= \|\{0, A_\delta(t)u - A(t)u, B_{\delta_i}u(t_i - 0) - \\ &- B_i u(t_i - 0)\}\| = \int_0^s \|A_\delta(t) - A(t)\|_E \|u(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|B_{\delta_i} - B_i\| \times \\ &\times \|u(t_i - 0)\|_E = I_\delta + S_\delta. \end{aligned}$$

Докажем, что правая часть $I_\delta + S_\delta$ стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$. Сначала рассмотрим интеграл I_δ .

Как установлено выше, подынтегральное выражение для $\mathcal{J}_\delta$ стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$. Остается доказать, что это выражение ограничено интегрируемой функцией. Но $A(t) - A_\delta(t) \leq \|1 - \mathcal{J}_\delta(t)\| A(t)$, и так как $\|\mathcal{J}_\delta\| \leq 2M$, то $\|1 - \mathcal{J}_\delta(t)\| \leq 2M + 1$, следовательно,

$$\| [1 - \mathcal{J}_\delta(t)] A(t) u(t) \|_E \leq (2M + 1) \| A(t) u(t) \|_E.$$

Поскольку $u(t) \in D(L) \subset D(A(t))$, где $A(t) \in \tilde{C}(E) \rightarrow L_1(E)$, то $\| A(t) u(t) \|_E$ интегрируема. По теореме Осгуда можно утверждать, что

$$I_\delta = \int_0^s \| [A(t) - A_\delta(t)] u(t) \|_E dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Рассмотрим сумму S_δ . Эта сумма стремится к 0, поскольку выражение, стоящее под знаком суммы, стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$ и оно ограничено суммируемой функцией. Остается сослаться на сумматорный аналог теоремы Осгуда.

Итак, $L_\delta \rightarrow L$ при $\delta \rightarrow 0$ в $E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)$ на $D(L) \subset \tilde{C}(E)$. Теперь докажем, что обратные операторы

$$L_\delta^{-1} \in E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E) \rightarrow \tilde{C}(E)$$

ограничены в совокупности, т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \| u_\delta(t) \|_E \leq c \left\{ \| u(0) \|_E + \int_0^s \| F(t) \|_B dt + \sum_{0 < t_i < s} \| g(t_i) \|_E \right\}, \quad (8)$$

если $L_\delta u_\delta = \{u(0), F(t), g(t_i)\}$.

Чтобы получить оценку (8), введем в рассмотрение задачу

$$du_\delta(t)/dt - A_\delta(t) u_\delta(t) = F(t), \quad t \neq t_i, \quad (9)$$

$$u_\delta(t_i) - (I + B_{\delta i}) u_\delta(t_i - 0) = g_i, \quad (10)$$

$$u_\delta(0) = u_0. \quad (11)$$

Сделаем замену $u_\delta = e^{-t/\delta} v$. Тогда задача (9) — (11) с учетом того, что

$$\frac{1}{\delta} + A_\delta(t) = \frac{1}{\delta} \mathcal{J}_\delta(v),$$

примет вид

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{\delta} \mathcal{J}_\delta(t) v(t) = F(t) e^{-t/\delta}, \quad t \neq t_i, \quad (12)$$

$$v(t_i) - (I + B_{\delta i}) v(t_i - 0) = g_i e^{t_i/\delta}, \quad (13)$$

$$v(0) = u_0. \quad (14)$$

Из ограничений на $\mathcal{J}_\delta(t)$ и $B_{\delta i}$ следует, что система (12) — (14) имеет единственное решение $\bar{v}(t)$, $t \geq \tau$, удовлетворяющее условию $\bar{v}(\tau) = v_0$. Определим оператор $S(t, \tau) : E \rightarrow E$ равенством $S(t, \tau) \bar{v}_0 = \bar{v}(t)$. Этот оператор будем называть линейным эволюционным оператором системы (12) — (14).

Пусть $t_k, t_i \in \{t_i\}$, $i \in N$, причем $t_k < t_i$ и $(t_k, t_i) \cap \{t_i\} = \emptyset$, а $u_\delta(t, \tau)$, $t_k < \tau \leq t < t_i$, — эволюционный оператор дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\delta} \mathcal{J}_\delta(t) v(t). \quad (15)$$

Из ограничений на $\mathcal{J}_\delta(t)$ вытекает соотношение

$$u(t_l - 0, t_k) = \lim_{t \rightarrow t_l - 0} u(t, t_k) \in [E].$$

Пусть $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \in [\tau, s] \cap \{t_i\}$, $i \in N$, $m \geq 2$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Используя результаты работы [6], получаем следующие соотношение для эволюционного оператора $S_\delta(t, \tau)$:

$$S_\delta(t, \tau) = \begin{cases} u_\delta(t, t_m)(I + B_{\delta m})u_\delta(t_m - 0, t_{m-1}) \times \dots \times (I + B_{\delta 2})u_\delta(t_2 - 0, t_1) \times \\ \times (I + B_{\delta 1})u_\delta(t_1 - 0, \tau), & \tau < t_1; \\ u_\delta(t, t_m)(I + B_{\delta m})u_\delta(t_m - 0, t_{m-1}) \times \dots \times (I + B_{\delta 2}) \times \\ \times u_\delta(t_2 - 0, t_1), & \tau = t_1. \end{cases} \quad (16)$$

Если множество $[\tau, s] \cap \{t_i\}$, $i \in N$, состоит из одного элемента t_i , то

$$S_\delta(t, \tau) = \begin{cases} u_\delta(t, t_i)(I + B_{\delta i})u_\delta(t_i - 0, \tau), & \text{если } \tau < t_i; \\ u_\delta(t, t_i), & \text{если } \tau = t_i. \end{cases} \quad (17)$$

Если же $[\tau, s] \cap \{t_i\} = \emptyset$, то

$$S_\delta(t, \tau) = u_\delta(t, \tau). \quad (18)$$

Подробнее остановимся на эволюционном операторе $u_\delta(t, \tau)$ уравнения (15), где $0 < \tau \leq t \leq t_1$. Применяя теорию эволюционных операторов [8] к уравнению (5), получаем формулу для $u_\delta(t, \tau)$

$$u_\delta(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_{\tau}^t \mathcal{J}_\delta(t_1) dt_1 \int_{\tau}^{t_1} \mathcal{J}_\delta(t_2) dt_2 \dots \int_{\tau}^{t_{n-1}} \mathcal{J}_\delta(t_n) dt_n. \quad (19)$$

Операторный ряд (19) сходится в топологии $[E]$, поскольку

$$\begin{aligned} \|u_\delta(t, \tau)\|_{[E]} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \left\| \int_{\tau}^t \mathcal{J}_\delta(t_1) dt_1 \dots \int_{\tau}^{t_{n-1}} \mathcal{J}_\delta(t_n) dt_n \right\|_{[E]} \leq \\ &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n}{\delta^n (1-\delta\omega)^n n!} = M e^{\frac{t-\tau}{\delta(1-\omega\delta)}}. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь соотношениями (16) — (18), имеем

$$\|S_\delta(t, \tau)\|_{[E]} \leq M e^{(a+b)(t-\tau)+b/\delta(1-\omega\delta)}, \quad (20)$$

где

$$a = \sup_{0 \leq t \leq s} \|A(t)(1 - \delta A(t))^{-1}\|_{[E]}, \quad b = \sup_{0 \leq t \leq s} \|B_i(I - \delta B_i)^{-1}\|_{[E]}.$$

Оценка (20) позволяет перейти от системы (12) — (14) к интегрально-сумматорному уравнению вида

$$v(t) = S_\delta(t, 0)v(0) + \int_0^t S_\delta(t, \tau) e^{\tau/\delta} F(\tau) d\tau + \sum_{0 < t_i < t} S_\delta(t, t_i) e^{t_i/\delta} g(t_i - 0).$$

При этом

$$\begin{aligned} \|v\|_E &\leq M e^{\frac{(a+b)t+b}{\delta(1-\omega\delta)}} \|v_0\|_E + M \int_0^s e^{\frac{(a+b)(t-\tau)+b}{\delta(1-\omega\delta)}} e^{\tau/\delta} \|F(\tau)\|_E d\tau + \\ &+ \sum_{0 < t_i < s} e^{\frac{(a+b)(t-\tau)+b}{\delta(1-\omega\delta)}} e^{\tau/\delta} \|g_i\|_E \leq M e^{\frac{(a+b)t+b}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \|v_0\|_E + \int_0^s e^{-\frac{(a+b)\tau}{\delta(1-\omega\delta)} + \frac{\tau}{\delta}} \times \right. \\ &\times \|F(\tau)\|_E d\tau + \sum_{0 < t_i < s} e^{-\frac{(a+b)t_i}{\delta(1-\omega\delta)} + \frac{t_i}{\delta}} \|g_i\|_E \Big\} \leq M e^{\frac{(a+b)t+b}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \|v_0\|_E + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^s \|F(\tau)\|_E d\tau + \sum_{0 < t_i < s} \|g_i\|_E \}.$$

Теперь получим требуемую оценку для $u_\delta(t)$. Напомним, что равенство $u_\delta(t) = e^{-t/\delta} v(t)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \|u_\delta(t)\|_E = e^{-t/\delta} \|v(t)\|_E &\leq M e^{\frac{(a+b)t}{\delta(1-\omega\delta)} - \frac{t}{\delta} + \frac{b}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^t \|F(t_1)\|_E \times \right. \\ &\times dt_1 + \sum_{0 < t_i < t} \|g_i\|_E \} \leq M e^{\left(\frac{a+b}{1-\omega\delta} - 1\right) \frac{t}{\delta} + \frac{b}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^t \|F(t_1)\|_E dt_1 + \right. \\ &+ \sum_{0 < t_i < t} \|g_i\|_E \} = M e^{\frac{1}{\delta} \left(\frac{a+b}{1-\omega\delta} - 1\right)} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^t \|F(t_1)\|_E dt_1 + \sum_{0 < t_i < t} \|g_i\|_E \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем $\bar{\omega} < \min \left\{ \frac{a+b-1}{\delta}, \omega \right\}$. Тогда при всех достаточно малых δ $\bar{\omega} > \frac{1}{\delta} \left(\frac{a+b}{1-\omega\delta} - 1 \right)$. Учитывая это, можем записать

$$\begin{aligned} \|u_\delta(t)\|_E &\leq M_1 e^{\omega_1 t} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^s \|F(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|g_i\|_E \right\} \leq \\ &\leq M_1 e^{\omega_1 s} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^s \|F(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|g_i\|_E \right\}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от t и, следовательно, та же оценка верна и для $\max_{0 \leq t \leq s} \|u_\delta(t)\|_E$, т. е.

$$\max_{0 \leq t \leq s} \|u_\delta(t)\|_E \leq M_1 e^{\omega_1 s} \left\{ \|u_0\|_E + \int_0^s \|F(t)\|_E dt + \sum_{0 < t_i < s} \|g_i\|_E \right\}.$$

Полученное неравенство означает что

$$\|L_\delta^{-1}\| \leq M_1 e^{\omega_1 s}.$$

Таким образом, семейство операторов L_δ^{-1} ограничено в совокупности. Тогда в силу теоремы об обратных операторах [3] существует оператор L^{-1} такой, что $L^{-1} = \lim_{\delta \rightarrow 0} L_\delta^{-1}$, причем L^{-1} ограничен той же константой M_1 . А это означает, что для решения задачи (1), (2), (4) имеет место оценка (*). Теорема доказана.

Пусть семейство операторов $A(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, и B_i , $i \in N$, имеет следующие дополнительные свойства:

A_{11} . Выполняется неравенство

$$\| [I - \varepsilon A(t)]^{-1} \|_{[E]} \leq 1 \quad \forall t \neq t_i, \quad \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (21)$$

A_{12} . Последовательность семейств операторов $A_n(t)$, $t \neq t_i$, удовлетворяющих условию (21), интегрально сходится к семейству $A(t)$, $t \neq t_i$, на некотором плотном в $\tilde{C}(E)$ множестве D_t кусочно-дифференцируемых в $L_1(E)$ функций $\psi(t)$, т. е.

$$\int_0^t \| [A_n(t) - A(t)] \psi(t) \|_E dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

B_{11} . Выполняется неравенство

$$\| [I - \varepsilon B_i]^{-1} \|_{[E]} \leq 1 \quad \forall i \in N, \quad \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (23)$$

Последовательность семейств операторов B_{i_n} , $i \in N$, удовлетворяющих условию (23), сумматорно сходится к семейству B_i , $i \in N$, на некотором плотном в $l_1(E)$ множестве, т. е.

$$\sum_{0 < t_i < t} \| [B_{i_n} - B_i] \psi(t_i) \|_E \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Теперь сформулируем основное утверждение теории возмущений эволюционных уравнений с импульсными воздействиями. Его главным содержанием является утверждение о том, что множество троек $\{u(0), F(t), g_i\}$, где $u(t)$ — решение системы (1)–(4), замкнуто в $E \oplus L_1(E) \oplus l_1(E)$.

Теорема 2. *Решение $u_n(t)$ уравнения*

$$du_n/dt - A_n(t)u_n(t) = F_n(t), \quad t \neq t_i,$$

с импульсными воздействиями

$$u_n(t_i) - (I + B_i)u_n(t_i - 0) = g_{i_n},$$

удовлетворяющее условию

$$u_n(0) = u_{0n},$$

где $u_{0n} \rightarrow u_0$ в E ,

$$\int_0^t \|F_n(t) - F(t)\|_E dt \rightarrow 0, \quad \sum_{0 < t_i < t} \|g_{i_n} - g_i\|_E \rightarrow 0,$$

сходится сильно в E к решению $u(t)$ задачи (1)–(4).

Доказательство. Рассмотрим операторы L_n и L из $\tilde{C}(E)$ в $E \oplus \oplus L_1(E) \oplus l_1(F)$:

$$L_n u_n(t) = \{u_n(0), du_n(t)/dt - A_n(t)u_n(t), u_n(t_i) - (I + B_{i_n})u_n(t_i - 0)\},$$

$$L u(t) = \{u(0), du(t)/dt - A(t)u(t), u(t_i) - (I + B_i)u_n(t_i - 0)\}.$$

Из условий (22) и (24) следует, что последовательность $\{L_n\}$ сходится к оператору L . Из теоремы 1 следует $\|L_n^{-1}\|_{[E]} \leq 1$, поэтому в силу теоремы об обратных операторах (см., например, [3]), получаем требуемое утверждение.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$i \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} - n^{1-\delta} t^n \Delta u_n(t, x) + C^2(x, t) u_n(t, x) = F_n(t, x), \quad t \neq t_i,$$

$$u_n(t_i, x) - u_n(t_i - 0, x) - b_{i_n} \frac{\partial u_n(t_i - 0, x)}{\partial x} = g_{i_n},$$

$$u_n(0) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \delta > 0,$$

$$F_n(t, x) \in C(L_2), \quad t \neq t_i$$

(L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций, заданных в прямоугольнике), $C^2(x, t)$ — кусочно-непрерывная по t и непрерывная по x функция, b_{i_n} — последовательность чисел, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$

Легко установить, что для дважды дифференцируемой по x и один раз кусочно-дифференцируемой по t функции $v(x, t)$

$$\int_0^1 \|n^{1-\delta} t^n \Delta v(t)\|_{L_2} dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Далее, для один раз дифференцируемой по x функции $v(x, t)$

$$\sum_{0 \leq t_i \leq 1} b_{i_n} \frac{\partial v(t_i - 0)}{\partial x} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Кроме того, оператор $n^{1-\delta} t^n \Delta$ удовлетворяет условию (21), а оператор $b_{in} \frac{\partial}{\partial x}$ — условию (23).

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Следовательно, решение $u_n(t, x)$ сходится в среднем по x и равномерно по $0 \leq t \leq 1$ к функции

$$v(t) = \int_0^t K(t, \tau, x) F(x, \tau) d\tau + \sum_{0 < t_i < t} K(t, t_i, x) g_i,$$

где

$$K(t, \tau, x) = e^{-i \int_{t_m}^t C^2(x, \tau) d\tau} (1 + b_{mn}) e^{-i \int_{t_{m-1}}^{t_m} C^2(x, \tau) d\tau} \times \dots$$

$$\dots \times (1 + b_{1n}) e^{-i \int_{\tau}^{t_1} C^2(x, \tau) d\tau},$$

$$F(x, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, \tau), \quad g_i = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{in}.$$

1. Розовченко Ю. В., Трофимчук С. И. Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость. — Киев, 1986. — 44 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86-65).
2. Самойленко А. М., Илюлов М. К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН СССР. — 1991. — 316, № 3. — С. 821—825.
3. Маслов В. П. Асимптотические методы в теории возмущений. — М.: Наука, 1988. — 309 с.
4. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
5. Носиди К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
6. Слюсарчук В. Е. Об экспоненциальной дихотомии решений импульсных систем // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, № 6. — С. 779—783.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

Получено 18.10.91