

УДК 517.926

А. М. Самойленко, чл.-корр. АП Украины,

В. Л. Кулик, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

К вопросу о существовании знакопеременных функций Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений

Исследуются вопросы о существовании знакопеременных функций Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Досліджуються питання про існування знакозмінних функцій Ляпунова для лінійних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

Пусть система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2, \quad x_i \in R^{n_i}, \quad n_1 + n_2 = n, \quad \dot{x}_i = dx_i/dt,$$

с непрерывной и ограниченной на всей оси R $n \times n$ -мерной матрицей коэффициентов $A(t) = \{A_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$, $A(t) \in C^0(R)$, обладает следующими свойствами.

1. Существует $n \times n$ -мерная симметричная матрица $S_1(t) \in C^1(R)$ (непрерывно дифференцируема и ограниченная на R), удовлетворяющая неравенству

$$\langle [\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^*(t)S_1(t)]x, x \rangle \geq \|x_1\|^2. \quad (2)$$

2. Существует $n_2 \times n_2$ -мерная симметричная матрица $S_{22}(t) \in C^1(R)$, имеющая свойство

$$\langle [\dot{S}_{22}(t) + S_{22}(t)A_{22}(t) + A_{22}^*(t)S_{22}(t)]x_2, x_2 \rangle \geq \|x_2\|^2 \quad (3)$$

Тогда непосредственно можно проверить, что производная квадратичной формы $V_p(t, x) = p \langle S_1(t)x, x \rangle + \langle S_{22}(t)x_2, x_2 \rangle$ в силу системы (1) при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет положительно определенной:

Обозначая

$$W[S] = \dot{S} + SA + A^*S, \quad (4)$$

$$P_1 = \text{diag}\{I_{n_1}, 0\}, \quad P_2 = \text{diag}\{0, I_{n_2}\}, \quad (5)$$

$$S_2(t) = \text{diag}\{0, S_{22}(t)\}, \quad (6)$$

неравенства (2), (3) запишем в виде

$$\langle W[S_1]x, x \rangle \geq \|P_1x\|^2, \quad (7)$$

$$\langle W[S_2]P_2x, P_2x \rangle \geq \|P_2x\|^2. \quad (8)$$

Теперь предположим, что симметричная матрица S_2 в неравенстве (8) не является блочно-диагональной, а имеет более общий вид $S_2(t) = \{S_{ij}(t)\}_{i,j=1}^2$. В дальнейшем убедимся, что это предположение не создает особых трудностей для доказательства того, что производная квадратичной формы $V_p(t, x) = p \langle S_1(t)x, x \rangle + \langle S_2(t)x, x \rangle$ в силу системы (1) будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p > 0$. С другой стороны, предположение о более общем виде матрицы S_2 ведет к тому, что условие (3) можно заменить более слабым

$$\langle [\dot{S}_{22}(t) + S_{22}(t)A_{22}(t) + A_{22}^*(t)S_{22}(t)]x_2, x_2 \rangle + \langle [S_{21}(t)A_{12}(t) + A_{12}^*(t)S_{21}^*(t)]x_2, x_2 \rangle \geq \|x_2\|^2. \quad (9)$$

Рассмотрим это на конкретном примере системы двух уравнений

$$\dot{x}_1 = (\sin t)x_1 + \lambda(\cos^2 t)x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - (\sin t)x_2, \quad \lambda > 0. \quad (10)$$

Производная квадратичной формы $V = x_1x_2$ в силу системы (10) равна $\dot{V} = x_1^2 + \lambda(\cos^2 t)x_2^2 \geq x_1^2$. Поэтому неравенство (2) выполняется при $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, не существует непрерывно дифференцируемой и ограниченной на R функции $s(t)$, для которой бы выполнялось неравенство $\dot{s}(t) - 2s(t)\sin t \geq 1$. Следовательно, неравенство (3) в рассматриваемом случае не выполняется. Однако неравенство (9) выполняется при $S_{22}(t) = -\sin t$, $S_{21} = 1/\lambda : -\cos t + 2\sin^2 t + 2\cos^2 t \geq 1$. Таким образом, система уравнений (10) является экспоненциально дихотомичной на всей оси R при любом значении параметра $\lambda > 0$ [1, с. 71].

Обобщая неравенства (7), (8) на случай произвольных матриц P_i , приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть существуют две $n \times n$ -мерные симметричные

матрицы $S_i(t) \in C^1(R)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие неравенствам

$$\langle W[S_1]x, x \rangle \geq \|M_1(t)x\|^2, \quad (11)$$

$$\langle W[S_2]M_2(t)x, M_2(t)x \rangle \geq \|M_2(t)x\|^2, \quad (12)$$

где матрицы размера $n \times n$ $M_i(t) \in C^0(R)$ имеют следующие свойства:

$$M_1(t)M_2(t) \equiv M_2(t)M_1(t) \quad \forall t \in R, \quad (13)$$

$$\det M(t) \neq 0 \quad \forall t \in R, \quad M(t) = M_1(t) + M_2(t) \quad (14)$$

и при этом

$$\|M^{-1}(t)\| \leq \text{const} < \infty. \quad (15)$$

Тогда производная квадратичной формы

$$V_p(t, x) = p \langle S_1(t)x, x \rangle + \langle S_2(t)x, x \rangle \quad (16)$$

в силу системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_p(t, x) \geq \alpha(p) \|x\|^2, \quad (17)$$

где $\alpha(p) > 0$ при достаточно больших значениях параметра p :

$$p > \|W[S_2]\|_0 \|M^{-1}\|_0^2 + \|W[S_2]\|_0^2 \|M^{-1}\|_0^4 \|M\|_0^2.$$

Доказательство. Записывая производную $\dot{V}_p(t, x)$ и учитывая обозначение (4) и неравенство (11), имеем

$$\dot{V}_p(t, x) \geq p \|M_1x\|^2 + \langle W[S_2]x_1, x \rangle. \quad (18)$$

Второе слагаемое запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle W[S_2](M_1 + M_2)M^{-1}x, (M_1 + M_2)M^{-1}x \rangle &= \langle W[S_2]M_1M^{-1}x, \\ M_1M^{-1}x \rangle + 2 \langle W[S_2]M_1M^{-1}x, M_2M^{-1}x \rangle &+ \langle W[S_2]M_2M^{-1}x, M_2M^{-1}x \rangle = \\ &= W_1 + 2W_2 + W_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая тождество (13), имеем $M_i(t)M^{-1}(t) \equiv M^{-1}(t)M_i(t)$, $i = 1, 2$. Поэтому первое и второе слагаемые в равенстве (19) можно оценить так:

$$\begin{aligned} W_1 = \langle W[S_2]M^{-1}M_1x, M^{-1}M_1x \rangle &\geq -\|W[S_2]\|_0 \|M^{-1}M_1x\|^2 \geq \\ &\geq -\|W[S_2]\|_0 \|M^{-1}\|_0^2 \|M_1x\|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} W_2 = \langle W[S_2]M^{-1}M_1x, M^{-1}M_2x \rangle &\geq -\|W[S_2]\|_0 \|M^{-1}M_1x\| \|M^{-1}M_2x\| \geq \\ &\geq -\|W[S_2]\|_0 \|M^{-1}\|_0^2 \|M_1x\| \|M_2x\|. \end{aligned}$$

Третье слагаемое в равенстве (19), используя неравенство (12), оценим следующим образом:

$$W_3 \geq \|M_2M^{-1}x\|^2 = \|M^{-1}M_2x\|^2 \geq \|M\|_0^{-2} \|M_2x\|^2. \quad (21)$$

Обозначая $\omega = \|W[S_2]\|_0$, $k = \|M^{-1}\|_0^2$, $m = \|M\|_0^{-2}$ и учитывая неравенства (20), (21), продолжаем оценку (18):

$$\dot{V}_p(t, x) \geq (p - \omega k) \|M_1x\|^2 - 2\omega k \|M_1x\| \|M_2x\| + m \|M_2x\|^2. \quad (22)$$

Рассматривая соответствующую правой части неравенства (22) квадратичную форму $(p - \omega k)t_1^2 - 2\omega k t_1 t_2 + m t_2^2$, найдем ее наименьшее значение на единичной окружности $t_1 = \cos \varphi$, $t_2 = \sin \varphi$. Имеем

$$(p - \omega k) \cos^2 \varphi - 2\omega k \cos \varphi \sin \varphi + m \sin^2 \varphi = \frac{p - \omega k - m}{2} \cos 2\varphi -$$

$$-\omega k \sin 2\varphi + \frac{p - \omega k + m}{2} \geq -\sqrt{\left(\frac{p - \omega k - m}{2}\right)^2 + \omega^2 k^2} +$$

$$+ \frac{p - \omega k + m}{2} \geq \frac{m\left(p - \omega k - \omega^2 \frac{k^2}{m}\right)}{p - \omega k + m} = \gamma(p) > 0.$$

При этом предполагаем выполнение неравенства

$$p > \omega k + \omega^2 \frac{k^2}{m}. \quad (23)$$

Таким образом, из оценки (22) следует

$$\dot{V}_p(t, x) \geq \gamma(p)(\|M_1 x\|^2 + \|M_2 x\|^2) \geq \frac{\gamma(p)}{2}(\|M_1 x\| + \|M_2 x\|) \geq$$

$$\geq \frac{\gamma(p)}{2} \|Mx\|^2 \geq \frac{\gamma(p)}{2\|M^{-1}\|_0} \|x\|^2 = \frac{\gamma(p)}{2k} \|x\|^2.$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 1 дополнительно предположить, что $|\det S_1(t)| \geq \delta - \text{const} > 0$, то система уравнений (1) будет экспоненциально дихотомичной на всей оси R [2, 3].

З а м е ч а н и е 2. Отказ от выполнения тождества (13) в условиях теоремы 1 может привести к тому, что не будет существовать квадратичная форма, которая имела бы знакоопределенную производную в силу системы (1). Проследим это на примере системы двух уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2. \quad (24)$$

Здесь $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Полагая $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ имеем $W[S_1] = S_1 A +$
 $+ A^* S_1 = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $\langle W[S_1]x, x \rangle = 2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = 2 \times$
 $\times (x_1 - x_2)^2 \geq \|M_1 x\|^2$, где $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь непосредственно про-

веряем, что при $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ выполняется неравенство $\langle (S_2 A + A^* S_2) M_2 x,$
 $M_2 x \rangle \geq \|M_2 x\|^2$, где $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что $M_1 M_2 \neq M_2 M_1$. Таким

образом, все условия теоремы 1, кроме (13), выполняются, но при этом не существует квадратичная форма, имеющая знакоопределенную производную в силу системы (24). Если бы такая форма существовала, то все решения системы (24) на бесконечности либо экспоненциально возрастали, либо затухали к нулю, но это не так: $x_1(t) = c_1 t + c_2$, $x_2(t) = c_1 t + c_2 + c_1$, $c_i - \text{const}$.

Следует отметить, что тождество (13) для некоторых матриц M_i может не выполняться, но тем не менее система (1) будет экспоненциально дихотомичной на всей оси R . В этом можно убедиться, производя замену переменных $x = Ny$ в неравенстве (8), $M_1 = P_1$, $M_2 = NP_2$. При этом всегда можно подобрать такую матрицу N , чтобы $M_1 M_2 = P_1 N P_2 \neq M_2 M_1 = N P_2 P_1$.

Теперь предположим, что исходную систему линейных уравнений можно записать в виде

$$x_1 = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + A_{13}(t)x_3,$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + A_{23}(t)x_3, \quad (25)$$

$$\dot{x}_3 = A_{31}(t)x_1 + A_{32}(t)x_2 + A_{33}(t)x_3, \quad x_i \in R^{n_i}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Обозначим $\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} A_{32} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, $\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и предположим, что существуют

три симметричные матрицы $S_1(t)$, $\hat{S}_2(t)$, $S_{33}(t) \in C^1(R)$ размеров соответственно $n \times n$, $(n_2 + n_3) \times (n_2 + n_3)$, $n_3 \times n_3$, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \langle [\dot{S}_1(t) + S_1(t)A(t) + A^*(t)S_1(t)]x, x \rangle &\geq \|x_1\|^2, \\ \langle [\dot{\hat{S}}_2(t) + \hat{S}_2(t)\hat{A}_2(t) + \hat{A}_2^*\hat{S}_2(t)]\hat{x}_2, \hat{x}_2 \rangle &\geq \|x_2\|^2, \\ \langle [\dot{S}_{33}(t) + S_{33}(t)A_{33}(t) + A_{33}^*(t)S_{33}(t)]x_3, x_3 \rangle &\geq \|x_3\|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Возникает вопрос: существует ли при этих условиях квадратичная форма, имеющая знакоопределенную производную в силу системы (25)? Если да, то в каком виде такую форму можно искать?

Обозначая $S_2 = \text{diag}\{0, \hat{S}_2(t)\}$, $S_3 = \text{diag}\{0, S_{33}(t)\}$, $P_1 = \text{diag}\{I_{n_1}, 0, 0\}$, $P_2 = \text{diag}\{0, I_{n_2}, 0\}$, $P_3 = \text{diag}\{0, 0, I_{n_3}\}$, неравенства (26) запишем в виде

$$\begin{aligned} \langle W[S_1]x, x \rangle &\geq \|P_1x\|^2, \\ \langle W[S_2](P_2 + P_3)x, (P_2 + P_3)x \rangle &\geq \|P_2x\|^2, \\ \langle W[S_3]P_3x, P_3x \rangle &\geq \|P_3x\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, предполагая, что матрицы S_2, S_3 в неравенствах (27) не обязательно блочно-диагонального вида, а матрицы P_1, P_2 , вообще говоря, не проекционные, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть существуют три симметричные матрицы размера $n \times n$ $S_i(t) \in C^1(R)$, $i = \overline{1, 3}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\langle W[S_1]x, x \rangle \geq \|M_1(t)x\|^2. \quad (28)$$

$$\langle W[S_2](M_2(t) + M_3(t))x, (M_2(t) + M_3(t))x \rangle \geq \|M_2(t)x\|^2, \quad (29)$$

$$\langle W[S_3]M_3(t)x, M_3(t)x \rangle \geq \|M_3(t)x\|^2, \quad (30)$$

где $n \times n$ -мерные матрицы $M_i(t) \in C^0(R)$ имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} M_1(t)|M_2(t) + M_3(t)| &= |M_2(t) + M_3(t)|M_1(t), \\ \det M(t) &\neq 0 \quad \forall t \in R, \quad \|M^{-1}(t)\| \leq \text{const} < \infty, \\ M(t) &= M_1(t) + M_2(t) + M_3(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда производная квадратичной формы

$$V_p(t, x) = p^{2+\lambda} \langle S_1(t)x, x \rangle + p \langle S_2(t)x, x \rangle + \langle S_3(t)x, x \rangle \quad (32)$$

в силу системы (25), где λ — произвольно фиксированное действительное положительное число, будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p > 0$.

Доказательство. Покажем, что при достаточно больших значениях параметра $\sigma > 0$ для матрицы $\sigma S_2(t) + S_1(t)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \langle W[\sigma S_2 + S_1](M_2(t) + M_3(t))x, (M_2(t) + M_3(t))x \rangle &\geq \\ &\geq \alpha(\sigma) \|(M_2(t) + M_3(t))x\|^2, \quad \alpha(\sigma) > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя неравенства (29), (30), имеем

$$\begin{aligned} \langle (\sigma W[S_2] + W[S_3])(M_2 + M_3)x, (M_2 + M_3)x \rangle &= \sigma \langle W[S_2](M_2 + M_3)x, \\ &(M_2 + M_3)x \rangle + \langle W[S_3]M_2x, M_2x \rangle + 2 \langle W[S_3]M_2x, M_3x \rangle + \\ &+ \langle W[S_3]M_3x, M_3x \rangle \geq \sigma \|M_2x\|^2 - \|W[S_3]\|_0 \|M_2x\|^2 - \end{aligned}$$

$$-2 \|W[S_3]\|_0 \|M_2 x\| \|M_3 x\| + \|M_3 x\|^2 \geq \frac{\sigma - \|W[S_3]\|_0 - \|W[S_3]\|_0^2}{\sigma - \|W[S_3]\|_0 + 1} \times \\ \times (\|M_2 x\|^2 + \|M_3 x\|^2).$$

Таким образом, неравенство (33) выполняется при следующем значении $\alpha(\sigma)$:

$$\alpha(\sigma) = \frac{\sigma - \|W[S_3]\|_0 - \|W[S_3]\|_0^2}{2(\sigma - \|W[S_3]\|_0 + 1)}, \quad (34)$$

где параметр σ удовлетворяет неравенству

$$\sigma > \|W[S_3]\|_0 + \|W[S_3]\|_0^2. \quad (35)$$

Теперь обозначим

$$\hat{S}_\sigma(t) = \frac{1}{\alpha(\sigma)} [\sigma S_2(t) + S_3(t)], \quad \hat{M}_2(t) = M_2(t) + M_3(t)$$

и заметим, что выполняются условия теоремы 1, где в качестве матриц S_2 , M_2 используются соответственно матрицы $\hat{S}_\sigma$, $\hat{M}_2$. Поэтому производная в силу системы (25) квадратичной формы $V_\eta(t, x) = \eta \langle S_1(t)x, x \rangle + \langle \hat{S}_\sigma(t)x, x \rangle$ будет положительно определенной при достаточно большом значении параметра η :

$$\eta > \|W[\hat{S}_\sigma]\|_0 \|M^{-1}\|_0^2 + \|W[\hat{S}_\sigma]\|_0^2 \|M^{-1}\|_0^4 \|M\|_0^2. \quad (36)$$

Величина $\alpha(\sigma)$, определяемая равенством (34), стремится к 1/2 при $\sigma \rightarrow +\infty$. Поэтому $\|\hat{S}_\sigma(t)\| \sim \sigma$, а следовательно, $\|W[\hat{S}_\sigma]\|_0 \sim \sigma$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Таким образом, правая часть неравенства (36) эквивалентна σ при больших σ . Полагая $\sigma = \rho$, $\eta = \rho^{2+\lambda}$, где $\lambda = \text{const} > 0$, при достаточно больших значениях ρ , очевидно, будут выполняться неравенства (35) и (36). Это и убеждает нас в справедливости теоремы.

Замечание 3. Фиксированное число $\lambda > 0$ в квадратичной форме (32) можно выбирать произвольно, например всегда можно положить $\lambda = 1$. Более того, эту форму можно выбирать в виде $V_p(t, x) = p^{2\lambda_1 + \lambda_2} \langle S_1(t)x, x \rangle + p^{\lambda_1} \langle S_2(t)x, x \rangle + \langle S_3(t)x, x \rangle$, где λ_i — произвольно фиксированные положительные постоянные.

В качестве примера, иллюстрирующего применение теоремы 2, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - (\sin^2 t) x_2 + (\sin^2 t) x_3, \\ \dot{x}_2 &= (1 - \text{th } t) x_1 - (\text{th } t) x_2, \\ \dot{x}_3 &= (\text{th } t) x_1 + x_2 + (\text{th } t) x_3. \end{aligned} \quad (37)$$

Непосредственно можно проверить, что производная квадратичной формы

$$V_0 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad (38)$$

в силу системы (37) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}_0 = x_1^2 + (\cos^2 t) x_2^2 + (\sin^2 t) x_3^2 \geq x_1^2.$$

Кроме того, производная квадратичной формы $v_0 = x_2 x_3$ в силу системы $\dot{x}_2 = -(\text{th } t) x_2$, $\dot{x}_3 = x_2 + (\text{th } t) x_3$ имеет вид $\dot{v}_0 = x_2^2$ и, наконец, производная функции $v = (\text{th } t) x_3^2$ в силу уравнения $\dot{x}_3 = (\text{th } t) x_3$ удовлетворяет неравенству $\dot{v} \geq \delta x_3^2$, $\delta = \text{const} > 0$. Таким образом, на основании теоремы 2

можно утверждать, что квадратичная форма

$$V_p(t, x) = p^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + px_2x_3 + (\operatorname{th} t)x_3^2 \quad (39)$$

при достаточно больших значениях параметра $p > 0$ будет иметь положительно определенную производную в силу системы (37). Поскольку квадратичная форма (38) является невырожденной, то и форма (39) также будет невырожденной при больших значениях параметра $p > 0$, следовательно, система (37) является экспоненциально дихотомичной на всей оси R .

В заключение сформулируем утверждение, обобщающее теорему 2.

Теорема 3. Пусть существует m симметричных матриц размера $n \times n$ $S_i(t) \in C^1(R)$, $i = \overline{1, m}$, каждая из которых удовлетворяет при всех $x \in R^n$ неравенствам

$$\langle W[S_1]x, x \rangle \geq \|M_1(t)x\|^2,$$

$$\langle W[S_2]\left(\sum_{i=2}^m M_i(t)\right)x, \left(\sum_{i=2}^m M_i(t)\right)x \rangle \geq \|M_2(t)x\|^2,$$

.....

$$\langle W[S_{m-1}](M_{m-1}(t) + M_m(t))x, (M_{m-1}(t) + M_m(t))x \rangle \geq \|M_{m-1}(t)x\|^2,$$

$$\langle W[S_m]M_m(t)x, M_m(t)x \rangle \geq \|M_m(t)x\|^2,$$

где $n \times n$ -мерные матрицы $M_i(t) \in C^0(R)$, $i = \overline{1, m}$, такие, что их сумма $M(t) = M_1(t) + \dots + M_m(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\det M(t) \neq 0 \quad \forall t \in R,$$

$$\|M^{-1}(t)\| \leq \text{const} < \infty,$$

$$M_1(t)M(t) \equiv M(t)M_1(t) \quad \forall t \in R.$$

Тогда производная квадратичной формы

$$V_p(t, x) = p^{3m-2}\langle S_1(t)x, x \rangle + p^{3m-3}\langle S_2(t)x, x \rangle + \dots + p^3\langle S_{m-2}(t)x, x \rangle + \\ + p\langle S_{m-1}(t)x, x \rangle + \langle S_m(t)x, x \rangle$$

в силу системы $\dot{x} = A(t)x$ будет положительно определенной при достаточно больших значениях параметра $p > 0$.

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1990.— 272 с.
2. Самойленко А. М., Кулик В. Л. О регулярных на всей оси линейных системах дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1990.— 26, № 8.— С. 1338—1343.
3. Валеев К. Г., Финин Г. С. Построение функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1981.— 412 с.

Получено 01.02.91