

УДК 517.928.5

В. П. Яковец, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Асимптотический анализ сингулярно возмущенной линейной системы с сингулярным предельным пучком матриц

С помощью методов возмущений и диаграмм Ньютона проводится асимптотический анализ общего решения линейной сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в] случае вырождения матрицы при производной при стремлении малого параметра к нулю. Предполагается, что пучок предельных матриц системы сингулярный и имеет по одному минимальному индексу для строк и столбцов.

© В. П. ЯКОВЕЦ, 1992

За допомогою методів збурень та діаграм Ньютона проводиться асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку виродження матриці при похідній, коли малий параметр прямує до нуля. Передбачається, що пучок граничних матриць системи сингулярний і має по одному мініальному індексу для рядків і стовпців.

1. Постановка задачі. Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) dx/dt = A(t, \varepsilon) x, \quad (1)$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомый n -мерный вектор, $t \in [t_0; T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, h — натуральное число, $A(t, \varepsilon)$ и $B(t, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n , допускающие на отрезке $[t_0; T]$ сходящиеся или асимптотические разложения по степеням ε :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_k(t). \quad (2)$$

Вопросам построения асимптотических решений системы (1) посвящено большое количество работ. Достаточно подробно исследован случай, когда матрица $B(t, \varepsilon)$ единична [1—5] или $\det B_0(t) \neq 0 \forall t \in [t_0; T]$ [6, 7]. В последнее время появились работы, в которых система (1) рассматривается при условии вырождения матрицы $B_0(t)$ [6, 8—13]. На основании теории приведения линейного пучка матриц к каноническому виду в этих работах изучен случай, когда пучок предельных матриц данной системы $\mathcal{L}(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t)$ регулярный при $t \in [t_0; T]$.

В настоящей работе исследуется асимптотика общего решения системы (1) в более сложном случае, когда пучок матриц $\mathcal{L}(t, \lambda)$ сингулярный, т. е. $\det \mathcal{L}(t, \lambda) = 0$ при всех λ и $t \in [t_0; T]$. При этом предполагается выполнение следующих условий:

1°. Матрицы $A_k(t)$, $B_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, бесконечно дифференцируемы на отрезке $[t_0; T]$;

2°. Пучок матриц $\mathcal{L}(t, \lambda)$ имеет по одному, не зависящему от t , минимальному индексу [14] для строк и столбцов: $p \geq 0$ — для столбцов и $q = n - p - 1$ — для строк.

2. Некоторые вспомогательные сведения. Согласно теореме Кронекера о приведении сингулярного пучка матриц к каноническому виду [14] существует такая пара неособенных матриц $P(t)$ и $Q(t)$, с помощью которых данный пучок матриц $\mathcal{L}(t, \lambda)$ при выполнении условия 2° приводится к виду

$$\mathcal{L}(\lambda) = P(t) \mathcal{L}(t, \lambda) Q(t) = \text{diag} \{L_2(\lambda), L_2(\lambda)\}, \quad (3)$$

где

$$L_1(\lambda) = \left[\begin{array}{cccccc} \overbrace{-\lambda \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0}^{p+1} \\ 0 \quad -\lambda \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -\lambda \quad 1 \end{array} \right]_p,$$

$$L_2(\lambda) = \left[\begin{array}{cccc} \overbrace{-\lambda \quad 0 \quad \dots \quad 0}^q \\ 1 \quad -\lambda \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad -\lambda \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \end{array} \right]_{q+1}.$$

Не умаляя общности, будем предполагать в дальнейшем, что в системе (1) пучок матриц $\mathcal{L}(t, \lambda)$ приведен к виду (3). В противном случае этого можно достичь, умножив систему (1) слева на матрицу $P(t)$ и сделав замену $x = Q(t) y$. При этом условие 1° не нарушится в силу теоремы о дифференцируемости преобразующих матриц, доказанной в [6].

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что пучок матриц имеет циклически повторяющуюся жорданову цепочку векторов длины $p + 1$, состоящую из собственного вектора

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^p \lambda^i e_{i+1} \quad (4)$$

и p присоединенных векторов

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1} \varphi(\lambda)}{d\lambda^{i-1}}, \quad i = \overline{2, p+1}, \quad (5)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$(A_0 - \lambda B_0) \varphi(\lambda) = 0, \quad (A_0 - \lambda B_0) \varphi_i(\lambda) = B_0 \varphi_{i-1}(\lambda), \quad i = \overline{2, p+1},$$

причем $B_0 \varphi_{p+1} = 0$. Через e_k здесь обозначен вектор, k -я координата которого равна единице, а все остальные — нулю.

Аналогичную цепочку векторов (только длины $q + 1$) имеет и сопряженный пучок $\mathcal{L}^*(\lambda) = A_0^* - \bar{\lambda} B_0^*$:

$$\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda) = \sum_{i=0}^q \bar{\lambda}^i e_{p+1+i}, \quad \psi_i(\lambda) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1} \psi(\lambda)}{d\bar{\lambda}^{i-1}}, \quad i = \overline{2, q+1}. \quad (6)$$

Обозначим через $H(\lambda)$ матрицу размера $n \times n$ вида

$$H(\lambda) = \text{diag}\{H_1(\lambda), H_2(\lambda)\},$$

$$H_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{p-1} & \lambda^{p-2} & \dots & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{q-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda^{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

которая является обобщенной обратной [6] к матрице $\mathcal{L}(\lambda)$. Используя эту матрицу, присоединенные векторы пучков $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{L}^*(\lambda)$ можно определять также по формулам

$$\varphi_i(\lambda) = [H(\lambda) B_0]^{i-1} \varphi(\lambda), \quad i = \overline{2, p+1}; \quad \psi_j(\lambda) = [H^*(\lambda) B_0^*]^{j-1} \psi(\lambda), \quad j = \overline{2, q+1}; \quad (7)$$

из которых получаются те же векторы, что по формулам (5), (6). Отсюда, в частности, следует

$$d\varphi(\lambda)/d\lambda = H(\lambda) B_0 \varphi(\lambda), \quad d\psi(\lambda)/d\bar{\lambda} = H^*(\lambda) B_0^* \psi(\lambda). \quad (8)$$

Справедлива также формула

$$dH(\lambda)/d\lambda = H(\lambda) B_0 H(\lambda). \quad (9)$$

Непосредственная проверка показывает, что векторы $\tilde{\varphi}_i = e_{p+2-i}$, $i = \overline{1, p+1}$, образуют циклически повторяющуюся A_0 -жорданову цепочку векторов матрицы B_0 , соответствующую ее нулевому собственному значению, а векторы $\tilde{\psi}_i = e_{n-i}$, $i = \overline{1, q+1}$, составляют аналогичную A_0^* -жорданову цепочку матрицы B_0^* . Используя матрицу $G = B_0^*$, которая является обобщенной обратной к матрице B_0 , для этих векторов получаем соотношения

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi} = e_{p+1}, \quad \tilde{\varphi}_i = (GA_0)^{i-1} \tilde{\varphi}, \quad i = \overline{2, p+1}; \quad \tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi} = e_n,$$

$$\tilde{\psi}_i = (GA_0)^{i-1} \tilde{\psi}, \quad i = \overline{2, q+1}. \quad (10)$$

Исходя из определения жордановых цепочек и учитывая их цикличность, имеем

$$(B_0 [H(\lambda) B_0]^i \varphi(\lambda), \psi(\lambda)) = 0, \quad (A_0 (GA_0)^i \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (11)$$

(символом $(\cdot)$ обозначено скалярное произведение векторов в n -мерном евклидовом пространстве).

Перейдем теперь к исследованию вопроса об асимптотике решений системы (1).

3. Вывод уравнения разветвления. В случае регулярного пучка предельных матриц $\mathcal{L}(\lambda)$ построение асимптотических решений системы (1) существенно зависит от структуры собственных значений и собственных векторов этого пучка, которые выступают в качестве главных членов асимптотики [8—13]. Поскольку в рассматриваемом случае $\det \mathcal{L}(\lambda) \equiv 0$, то ситуация коренным образом изменяется, и для построения соответствующих асимптотических разложений необходимо использовать другой подход.

Будем искать решения системы (1) в виде

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^t (\lambda_0(t) + \lambda(t, \varepsilon)) dt\right), \quad (12)$$

где $u(t, \varepsilon)$ — n -мерный вектор, $\lambda_0(t)$, $\lambda(t, \varepsilon)$ — скалярные функции, подлежащие определению. Подставив вектор (12) в систему (1), получим

$$[\Gamma_0 + \Gamma(t, \varepsilon)] u(t, \varepsilon) = \lambda(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon), \quad (13)$$

где

$$\Gamma_0 = \mathcal{L}(\lambda_0), \quad \Gamma(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \Gamma_k(t), \quad (14)$$

$$\Gamma_k(t) = A_k(t) - \lambda_0 B_k(t) - B_{k-h} \frac{d}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Таким образом, задача поиска функции $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектора $u(t, \varepsilon)$ сведена к задаче о возмущении нулевого собственного значения и соответствующего собственного вектора линейного оператора Γ_0 относительно линейного оператора B_0 . Как известно [15], решение таких задач сводится к поиску ветвления собственного значения невозмущенного оператора под воздействием возмущающих операторов. Следуя [15], выведем соответствующее уравнение разветвления. Для этого уравнение (13) запишем в виде

$$\Gamma_0 u = (\lambda B - \Gamma) u.$$

Оно будет разрешимо, если

$$((\lambda B - \Gamma) u, \psi(\lambda_0)) = 0. \quad (16)$$

При выполнении этого условия вектор $u(t, \varepsilon)$ можно определить по формуле

$$u = [\lambda H(\lambda_0) B - H(\lambda_0) \Gamma] u + \varphi(\lambda_0).$$

Предполагая, что при малых λ и ε оператор $E = \lambda H B + H \Gamma$ (E — единичная матрица) обратим, находим

$$u = (E - \lambda H B + H \Gamma)^{-1} \varphi(\lambda_0). \quad (17)$$

Подставив это выражение в (16), получим искомое уравнение разветвления

$$L(\lambda, \varepsilon) = ((\lambda B - \Gamma)(E - \lambda H B + H \Gamma)^{-1} \varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)) = 0. \quad (18)$$

Теперь задача поиска функции $\lambda(t, \varepsilon)$ свелась к нахождению малых решений уравнения (18). Используя некоторые идеи работы [13], предста-

вим выражение $L(\lambda, \epsilon)$ в виде формального разложения

$$L(\lambda, \epsilon) = \sum_{k, s \geq 0} L_{ks} [\lambda^k] \epsilon^s, \quad (19)$$

где k — суммарная степень функции λ , содержащейся в записи операторной функции $L_{ks}[\lambda^k]$. Обозначим

$$\tilde{L} = (\lambda B - \Gamma)(E - \lambda HB + H\Gamma)^{-1}.$$

Поскольку при достаточно малых ϵ и λ справедливо разложение [16]

$$(E - \lambda HB + H\Gamma)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k, \quad (20)$$

то

$$H\tilde{L} = \lambda HB - H\Gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda HB - H\Gamma)^k. \quad (21)$$

Рассмотрим выражения $(\lambda HB - H\Gamma)^k$. Учитывая, что

$$\Gamma\lambda = \lambda\Gamma - \epsilon^h (D\lambda) B,$$

где D — оператор дифференцирования по переменной t , будем иметь

$$(\lambda HB - H\Gamma)^2 = (H\Gamma)^2 - \lambda(HB\Gamma + H\Gamma HB) + \epsilon^h (D\lambda)(HB)^2 + \lambda^3 (HB)^2,$$

$$(\lambda HB - H\Gamma)^3 = - (H\Gamma)^3 + \lambda[HB(H\Gamma)^2 + H\Gamma HB\Gamma + (H\Gamma)^2 HB] - \\ - \epsilon^h (D\lambda)[(HB)^2 H\Gamma + HB\Gamma HB + H\Gamma (HB)^2] + \epsilon^{2h} (D^2\lambda)(HB)^3 -$$

$$- \lambda^2 [(HB)^2 H\Gamma + HB\Gamma HB + H\Gamma (HB)^2] + \epsilon^h (\lambda D\lambda + D\lambda^2)(HB)^3 + \lambda^3 (HB)^3 \\ \dots \dots \dots$$

Введем следующие обозначения. Через $\sigma(x_i; y_j)$ обозначим сумму всевозможных произведений i множителей x и j множителей y . Символом $\mathcal{D}^i[\lambda^k]$ обозначим сумму всех возможных произведений i «множителей» D и k множителей λ . При этом последним множителем во всех слагаемых выражения $\mathcal{D}^i[\lambda^k]$ должен быть λ . Например,

$$\mathcal{D}[\lambda^2] = D\lambda^2 + \lambda D\lambda = 2\lambda\lambda' + \lambda\lambda' = 3\lambda\lambda',$$

$$\mathcal{D}^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda'.$$

Используя эти обозначения и проведя индукцию по k , получаем

$$(\lambda HB - H\Gamma)^k = (-1)^k (H\Gamma)^k + \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{i+j+k} \epsilon^{hi} \sigma((HB)_{i+j}, (H\Gamma)_{k-i-j}) \times \\ \times \mathcal{D}^i[\lambda^j], \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим далее

$$(\lambda HB - H\Gamma)^k = \sum_{j=0}^k V_{kj}[\lambda^j],$$

где

$$V_{k0} = (-1)^k (H\Gamma)^k, \quad V_{kj} = \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{i+j+k} \epsilon^{hi} \sigma((HB)_{i+j}, (H\Gamma)_{k-i-j}) \mathcal{D}^i. \quad (22)$$

Тогда согласно (21)

$$H\tilde{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k V_{kj}[\lambda^j] + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k0} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{b=i}^{\infty} V_{bi}[\lambda^i] + \sum_{b=1}^{\infty} V_{b0}.$$

Поменяв в первом слагаемом индекс k на $k + j$, получим

$$H\tilde{L} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} V_{k+j,j} [\lambda^j] + \sum_{k=1}^{\infty} V_{k0}. \quad (23)$$

Согласно (22)

$$V_{k+j,j} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} e^{hi} \sigma((HB)_{i+j}, (H\Gamma)_{k-i}) \mathcal{D}^i. \quad (24)$$

Преобразуем последнее выражение с учетом разложений (2), (14) для $B(t, e)$ и $\Gamma(t, e)$. Подставив эти разложения в (24) и сгруппировав члены при одинаковых степенях e , получим

$$V_{k+j,j} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} e^{s+hi} \tilde{P}_{i+j,k-i}^s(HB; H\Gamma) \mathcal{D}^i, \quad (25)$$

где символом $\tilde{P}_{i,j}^s(HB; H\Gamma)$ обозначается сумма всех возможных произведений i множителей вида $HB_{k_1}, HB_{k_2}, \dots, HB_{k_i}$ и j множителей вида $H\Gamma_{s_1}, H\Gamma_{s_2}, \dots, H\Gamma_{s_j}$, сумма индексов которых $k_1 + \dots + k_i + s_1 + \dots + s_j = s$ (согласно разложениям (2), (14) индексы k_i — наборы целых неотрицательных чисел, а индексы s_j — наборы только натуральных чисел).

Аналогично имеем

$$V_{k0} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^k e^s \tilde{P}_k^s(H\Gamma), \quad (26)$$

где $\tilde{P}_k^s(H\Gamma)$ — сумма всевозможных произведений k множителей $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \dots, H\Gamma_{j_k}$ с натуральными индексами, сумма которых равна s . Перегруппировав слагаемые в (25), окончательно получим

$$V_{k+j,j} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[s/h]} (-1)^{k+i} e^{s-hi} \tilde{P}_{i+j,k-i}^{s-hi}(HB; H\Gamma) \mathcal{D}^i \quad (27)$$

([a] — целая часть числа a).

Подставив (26), (27) в (23) и приняв во внимание, что выражение $\tilde{P}_{i+j,k-i}^{s-hi}(HB; H\Gamma)$ имеет смысл только при $k-i \leq s-hi$, т. е. при $i \leq k \leq s+i-hi$, а выражение $\tilde{P}_k^s(H\Gamma)$ — при $1 \leq k \leq s$, будем иметь

$$\begin{aligned} H\tilde{L} = & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[s/h]} \sum_{k=i}^{s+i-hi} (-1)^{k+i} \tilde{P}_{i+j,k-i}^{s-hi}(HB; H\Gamma) \mathcal{D}^i [\lambda^j] e^s + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s (-1)^k \tilde{P}_k^s(H\Gamma) e^s. \end{aligned}$$

Сделав перестановку индексов, для оператора $\tilde{L}(\lambda, e)$ получим следующее разложение:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda, e) = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{[s/h]} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^j \tilde{P}_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma) \mathcal{D}^i [\lambda^k] e^s + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^s (-1)^j \tilde{P}_j^s(H\Gamma) e^s, \end{aligned} \quad (28)$$

где выражения $\tilde{P}_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma)$ и $\tilde{P}_j^s(H\Gamma)$ отличаются от $\tilde{P}_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma)$,

$\tilde{P}_i^s(H\Gamma)$ тем, что в них первые множители во всех слагаемых не содержат H . Отсюда получаем следующие формулы для коэффициентов разложения (19):

$$L_{00} = 0, \quad L_{k0} = (B_0(HB_0)^{k-1}\varphi, \psi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^j (P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{\lfloor s/h \rfloor} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^j (P_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma)\varphi, \psi) \mathcal{D}^i[\lambda^k], \quad (31)$$

$k, s = 1, 2, \dots$

4. Исследование уравнения разветвления. Для определения функции $\lambda_0(t)$ и вида разложения функции $\lambda(t, \epsilon)$ по ϵ используем метод диаграмм Ньютона [15], поставив в соответствие каждому отличному от нуля коэффициенту L_{ks} уравнения разветвления (18) точку $(k; s)$ в прямоугольной системе координат xOy . При этом, поскольку нас интересуют малые решения уравнения разветвления, будем рассматривать только убывающие участки соответствующих диаграмм. Для этого рассмотрим некоторые свойства коэффициентов уравнения разветвления (18).

Учитывая (12), из (29) имеем

$$L_{k0}(\lambda_0) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (32)$$

Следовательно, на оси абсцисс в соответствующих диаграммах для уравнения (18) точки отсутствуют.

Л е м м а. Справедливо равенство

$$\partial^k L_{0s}(\lambda_0) / \partial \lambda_0^k = k! \sum_{j=1}^s (-1)^j (P_{k,j}^s(HB; H\Gamma)\varphi, \psi), \quad k, s = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о равенства (33) проведем методом математической индукции сначала по s , а затем по k .

Покажем, что

$$\partial L_{0s}(\lambda_0) / \partial \lambda_0 = \sum_{j=0}^s (-1)^j (P_{1,j}^s(HB; H\Gamma)\varphi, \psi), \quad s = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Так как согласно (30) $L_{01} = -(\Gamma_1, \varphi, \psi)$, то, используя соотношения (8), (15), будем иметь

$$\partial L_{01} / \partial \lambda_0 = ((B_1 - \Gamma_1 HB_0 - B_0 H \Gamma_1)\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^1 (-1)^j (P_{1,j}^1(HB; H\Gamma)\varphi, \psi).$$

Следовательно, при $s = 1$ формула (33) справедлива. Допустим, что она справедлива при $s < k$. Тогда, поскольку

$$\frac{\partial L_{0,k-i}}{\partial \lambda_0} = \left(\left(\frac{\partial \tilde{L}_{0,k-i}}{\partial \lambda_0} + \tilde{L}_{0,k-i} HB_0 + B_0 H \tilde{L}_{0,k-i} \right) \varphi, \psi \right),$$

то

$$\frac{\partial \tilde{L}_{0,k-i}}{\partial \lambda_0} + \tilde{L}_{0,k-i} HB_0 + B_0 H \tilde{L}_{0,k-i} = \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j P_{i,j}^{k-i}(HB; H\Gamma), \quad (35)$$

$i = \overline{1, k-1}.$

Учитывая (35), (8), (9) и очевидное равенство

$$P_i^k(H\Gamma) = \sum_{i=1}^{k+1-i} P_{i-1}^{k-i}(H\Gamma) H \Gamma_i,$$

$$\begin{aligned}
 L_{0k} &= -(\Gamma_k \varphi, \psi) + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^{k+1-j} (-1)^j (P_{j-1}^{k-i} (H\Gamma) H\Gamma_i \varphi, \psi) = -(\Gamma_k \varphi, \psi) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (-1)^{j+1} (P_j^{k-i} (H\Gamma) H\Gamma_i \varphi, \psi) = -(\Gamma_k \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^{k-1} (\tilde{L}_{0,k-i} H\Gamma_i \varphi, \psi), \\
 \partial L_{0k} / \partial \lambda_0 &= (B_k \varphi, \psi) - ((\Gamma_k H B_0 + B_0 H \Gamma_k) \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\left(\frac{\partial \tilde{L}_{0,k-i}}{\partial \lambda_0} + \right. \right. \\
 &+ \tilde{L}_{0,k-i} H B_0 + B_0 H \tilde{L}_{0,k-i} H \Gamma_i - \tilde{L}_{0,k-i} H B_i + \tilde{L}_{0,k-1} H \Gamma_i H B_0 \Big) \varphi, \psi \Big) = \\
 &= (B_k \varphi, \psi) - ((\Gamma_k H B_0 + B_0 H \Gamma_k) \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j P_{1,j}^{k-i} (HB; H\Gamma) \times \\
 &\times H\Gamma_i \varphi, \psi + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (-1)^j (P_j^{k-i} (H\Gamma) H B_i \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-i} (-1)^j (P_j^{k-i} (H\Gamma) \times \\
 &\times H\Gamma_i H B_0 \varphi, \psi) = (B_k \varphi, \psi) - ((\Gamma_k H B_0 + B_0 H \Gamma_k) \varphi, \psi) + \\
 &+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} (-1)^{j+1} (P_{1,j}^{k-i} (HB; H\Gamma) H\Gamma_i \varphi, \psi) + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=1}^{k-j-1} (-1)^{j+1} (P_{j+1}^{k-i} (H\Gamma) \times \\
 &\times H B_i \varphi, \psi) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} (P_{j+1}^k (H\Gamma) H B_0 \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^{k-1} (P_1^{k-i} (HB) H\Gamma_i \varphi, \psi) = \\
 &= (B_k \varphi, \psi) - ((\Gamma_k H B_0 + B_0 H \Gamma_k) \varphi, \psi) + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{j+1} \left[\sum_{i=1}^{k-j} (P_{1,j}^{k-i} (HB; H\Gamma) \times \right. \\
 &\times H\Gamma_i \varphi, \psi) + \sum_{i=0}^{k-j-1} (P_{i+1}^{k-i} (H\Gamma) H B_i \varphi, \psi) \Big] - \sum_{i=1}^{k-1} (P_1^{k-i} (H\Gamma) H B_i \varphi, \psi) - \\
 &- \sum_{i=1}^{k-1} (P_1^{k-i} (HB) H\Gamma_i \varphi, \psi) + (-1)^k [(P_k^k (H\Gamma) H B_0 \varphi, \psi) + \\
 &+ (P_{1,k-1}^{k-1} (HB; H\Gamma) H\Gamma_1 \varphi, \psi)].
 \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^{k-j} P_{1,j}^{k-i} (HB; H\Gamma) H\Gamma_i + \sum_{i=0}^{k-j-1} P_{i+1}^{k-i} (H\Gamma) H B_i = P_{1,j+1}^k (HB; H\Gamma),$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \partial L_{0k} / \partial \lambda_0 &= (B_k \varphi, \psi) + \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^j (P_{1,j}^k (HB; H\Gamma) \varphi, \psi) - (P_{1,1}^k (HB; H\Gamma) \varphi, \psi) + \\
 &+ (-1)^k (P_{1,k}^k (HB; H\Gamma) \varphi, \psi) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (P_{1,j}^k (HB; H\Gamma) \varphi, \psi),
 \end{aligned}$$

откуда следует, что формула (33) справедлива при $s = k$, а значит, она справедлива при любом k .

Докажем теперь формулу

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_0} \sum_{j=0}^s (-1)^j (P_{k,j}^s(HB; H\Gamma) \varphi, \psi) = (k+1) \sum_{j=0}^s (-1)^j (P_{k+1,j}^s(HB; H\Gamma) \varphi, \psi). \quad (36)$$

Ее справедливость при $k=0$ доказана выше. Допустим, что она справедлива при $k < r$. Воспользовавшись соотношением

$$P_{k,j}^s(HB; H\Gamma) = \sum_{i=0}^{s-j} P_{k-1,j}^{s-i}(HB; H\Gamma) HB_i + \sum_{i=1}^{s-j+1} P_{k,j-1}^{s-i}(HB; H\Gamma) H\Gamma_i$$

и введя для сокращения записи обозначение

$$\sum_{j=0}^s (-1)^j P_{k,j}^s(HB; H\Gamma) = R_{ks},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} R_{rs} &= \sum_{j=0}^s \sum_{i=0}^{s-j} (-1)^j P_{r-1,j}^{s-i}(HB; H\Gamma) HB_i + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{s-j+1} (-1)^j P_{r,j-1}^{s-i}(HB; H\Gamma) H\Gamma_i = \\ &= \sum_{i=0}^s R_{r-1,s-i} HB_i - \sum_{i=1}^s R_{r,s-i} H\Gamma_i. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (8), (9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} (R_{rs} \varphi, \psi) &= \sum_{i=0}^s \left(\left(\frac{\partial R_{r-1,s-i}}{\partial \lambda_0} + R_{r-1,s-i} HB_0 + B_0 H R_{r-1,s-i} \right) HB_i \varphi, \psi \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^s (R_{r-1,s-i} HB_i HB_0 \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^s \left(\left(\frac{\partial R_{r,s-i}}{\partial \lambda_0} + R_{r,s-i} HB_0 + B_0 H R_{r,s-i} \right) \times \right. \\ &\times H\Gamma_i \varphi, \psi) - \sum_{i=1}^s (R_{r,s-i} H\Gamma_i HB_0 \varphi, \psi) + \sum_{i=1}^s (R_{r,s-i} HB_i \varphi, \psi) = \\ &= r \left(\left(\sum_{i=0}^s R_{r,s-i} HB_i - \sum_{i=1}^s R_{r+1,s-i} H\Gamma_i \right) \varphi, \psi \right) + \left(\left(\sum_{i=0}^s R_{r-1,s-i} HB_i - \right. \right. \\ &- \sum_{i=1}^s R_{r,s-i} H\Gamma_i) HB_0 \varphi, \psi) + \left(\left(\sum_{i=1}^s R_{r,s-i} HB_i - \sum_{i=1}^s R_{r+1,s-i} H\Gamma_i \right) \varphi, \psi \right) = \\ &= r (R_{r+1,s} \varphi, \psi) + \left(\left(\sum_{i=0}^s R_{r,s-i} HB_i - \sum_{i=1}^s R_{r+1,s-i} H\Gamma_i \right) \varphi, \psi \right) = \\ &= r (R_{r+1,s} \varphi, \psi) + (R_{r+1,s} \varphi, \psi) = (r+1) (R_{r+1,s} \varphi, \psi), \end{aligned}$$

откуда следует, что формула (36) справедлива при $k=r$. Следовательно, она справедлива при любом k . Из формулы (36) легко получаем равенство (33). Лемма доказана.

С учетом (33) формула (31) преобразуется к виду

$$L_{hs} [\lambda^k] = \sum_{i=0}^{\lfloor s/h \rfloor} \frac{1}{(k+i)!} \frac{\partial^{k+i} L_{0,s-hi}}{\partial \lambda_0^{k+i}} \mathcal{D}^i [\lambda^k], \quad k, s = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

откуда, в частности, следует, что при $s \leq h$ выражение L_{hs} не содержит

оператора дифференцирования $\mathcal{D}$:

$$L_{ks} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k L_{0s}}{\partial \lambda_0^k}, \quad s = \overline{1, h}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Поскольку коэффициенты L_{hs} уравнения разветвления (18) зависят от λ_0 , то от λ_0 будет зависеть и структура соответствующих диаграмм Ньютона. Рассмотрим выражение $L_{01}(\lambda_0)$. Учитывая (4), (6), (10), (11), (15), имеем

$$\begin{aligned} L_{01}(\lambda_0) &= -(\Gamma_1 \varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)) = -((A_1 - \lambda_0 B_1) \varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)) + \\ &+ \lambda_0 \delta_{1,h} (B_0 H B_0 \varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)) = \lambda_0 \left(\sum_{i=0}^p \lambda_0^i B_1 (GA_0)^{p-i} \tilde{\varphi}, \sum_{j=0}^q \bar{\lambda}_0^j (G^* A_0^*)^{q-j} \tilde{\psi} \right) - \\ &- \left(\sum_{i=0}^p \lambda_0^i A_1 (GA_0)^{p-i} \tilde{\varphi}, \sum_{j=0}^q \bar{\lambda}_0^j (G^* A_0^*)^{q-j} \tilde{\psi} \right) = - \sum_{i=0}^n M_{i1} \lambda_0^{n-i}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$M_{i1} = (P_i^1(GA) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - (P_{i,1}^1(GA; \tilde{G}\tilde{B}) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad i = \overline{0, n}. \quad (40)$$

Символом $P_{i,j}^s(GA; \tilde{G}\tilde{B})$ здесь обозначено выражение, которое составляется по такому же правилу, что и введенное выше выражение $P_{i,j}^s(HB; H\Gamma)$, с тем лишь отличием, что в данном выражении используются коэффициенты разложений

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad \tilde{B}(t, \varepsilon) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k B_k(t)$$

и матрица G вместо H . То же относится и к обозначению $P_i^1(GA)$. Здесь учтено также следующее легко проверяемое свойство матрицы A_0 : $(GA_0)^i = 0$ при $i \geq \max\{p+1, q\}$, $(A_0 G)^j = 0$ при $j \geq \max\{p, q+1\}$.

Таким образом, $L_{01}(\lambda_0)$ представляет собой многочлен относительно λ_0 , степень которого не превышает n . Пусть $\lambda_0(t)$ — корень уравнения

$$L_{01}(\lambda_0) = 0 \quad (41)$$

кратности $r \leq n$. Допустим, что он удовлетворяет условию

$$L_{02}(\lambda_0) = ((\Gamma_1 H(\lambda_0) \Gamma_1 - \Gamma_2) \varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T]. \quad (42)$$

Тогда согласно (38)

$$L_{h1}(\lambda_0) \equiv 0, \quad k = \overline{1, r-1}, \quad L_{r1}(\lambda_0) \neq 0 \quad (43)$$

и соответствующая диаграмма Ньютона представляет собой отрезок, соединяющий точки $(0; 2)$ и $(r; 1)$. Поскольку тангенс угла наклона этого отрезка к отрицательному направлению оси абсцисс равен $1/r$, то согласно методу диаграмм Ньютона [15] функция $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектор $u(t, \varepsilon)$ будут разлагаться в формальные ряды по степеням $\mu = \varepsilon^{1/r}$ и таких разложений можно построить ровно r . При этом первый коэффициент $\lambda_1(t)$ разложения $\lambda(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$L_{02}(\lambda_0) + L_{r1}(\lambda_0) \lambda_1' = 0, \quad (44)$$

откуда находим r различных отличных от нуля функций $\lambda_1(t)$:

$$\lambda_1(t) = \sqrt[r]{\left| \frac{L_{02}(\lambda_0)}{L_{r1}(\lambda_0)} \right|} \exp \left[\frac{i}{r} \left(\arg \left(- \frac{L_{02}(\lambda_0)}{L_{r1}(\lambda_0)} \right) + 2\pi(j-1) \right) \right], \quad j = \overline{1, r}. \quad (45)$$

Последующие коэффициенты разложения $\lambda(t, \varepsilon)$ определим непосредственно из уравнения разветвления (18), используя метод неопределенных

коэффициентов. Для этого подставим формальный ряд

$$\lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k(t) \quad (46)$$

в уравнение (18). Сгруппировав члены при одинаковых степенях μ , получим

$$L(\lambda, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor i/r \rfloor} \sum_{k=0}^{i-rs} L_{hs} [P_k^{i-rs}(\lambda)] \mu^i = 0,$$

где символом $P_k^j(\lambda)$ обозначена сумма всевозможных произведений k множителей $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_k}$ с натуральными индексами, сумма которых равна j , а операторы $\mathcal{D}^j$ в составе L_{hs} действуют на каждое слагаемое выражения $P_k^{i-rs}(\lambda)$ в отдельности по такому же правилу, как на λ^k в формуле (31). При этом по определению полагаем $L_{0s}[P_0^j(\lambda)] = L_{0s}$, $s = 0, 1, \dots$.

Приравнявая здесь коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем систему уравнений

$$\sum_{s=0}^{\lfloor i/r \rfloor} \sum_{k=0}^{i-rs} L_{hs} [P_k^{i-rs}(\lambda)] = 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (47)$$

Учитывая (32), (43), приходим к выводу, что при $i < 2r$ уравнения (47) являются тождествами, а при $i = 2r$ получим уравнение (44), из которого определяется $\lambda_1(t)$. Допустим, что функции $\lambda_i(t)$ известны при $i < m$. Тогда для определения $\lambda_m(t)$ используем уравнение (47) при $i = 2r + m - 1$, которое с учетом (32), (43) записывается в виде

$$r\lambda_1^{r-1}\lambda_m L_{r1} + g_m(t) = 0,$$

где

$$g_m(t) = \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{2r+m-1}{r} \rfloor} \sum_{k=0}^{2r+m-1-rs} L_{hs} [P_k^{2r+m-1-rs}(\lambda)] + \sum_{k=r+1}^{r+m-1} L_{h1} P_k^{r+m-1}(\lambda) + L_{r1} \hat{P}_r^{r+m-1}(\lambda)$$

— известное выражение, в котором $\hat{P}_r^{r+m-1}(\lambda)$ — та часть выражения $P_r^{r+m-1}(\lambda)$, которая не содержит λ_m . Отсюда однозначно определяется функция $\lambda_m(t)$:

$$\lambda_m(t) = - \frac{g_m(t)}{r\lambda_1^{r-1}L_{r1}(\lambda_0)}. \quad (48)$$

Для определения коэффициентов разложения вектора $u(t, \varepsilon)$ воспользуемся формулой (17). Учитывая (20), (21), получаем

$$u(t, \varepsilon) = \varphi(\lambda_0) + H(\lambda_0) \tilde{L}\varphi(\lambda_0) = \varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} H \tilde{L}_{hs} [\lambda^k] \varepsilon^s \varphi,$$

где $\tilde{L}_{hs}$ — коэффициенты разложения (28) ($(\tilde{L}_{hs}\varphi, \psi) = L_{hs}$).

Подставив сюда построенное разложение (46) для $\lambda(t, \varepsilon)$ и сгруппировав члены при одинаковых степенях μ , будем иметь

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i u_i(t) = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor i/r \rfloor} \sum_{k=0}^{i-rs} H(\lambda_0) \tilde{L}_{hs} [P_k^{i-rs}(\lambda)] \varphi \mu^i,$$

откуда получаем следующие формулы для коэффициентов разложения вектора $u(t, \varepsilon)$ по степеням μ :

$$u_0(t) = \varphi(\lambda_0), \quad u_i(t) = \sum_{s=0}^{[i/r]} \sum_{k=0}^{i-rs} H(\lambda_0) \tilde{L}_{ks} [P_k^{i-rs}(\lambda)] \varphi, \quad i = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Легко убедиться, что построенные таким образом разложения для $\lambda(t, \varepsilon)$ и $u(t, \varepsilon)$ удовлетворяют системе (1) в смысле равенства формальных рядов.

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если уравнение (41) имеет корень $\lambda_0(t)$ кратности r , для которого выполняется условие (42), то система (1) имеет r формальных частных решений вида (12), где функция $\lambda(t, \varepsilon)$ и вектор $u(t, \varepsilon)$ представляются в виде разложений по степеням $\mu = \varepsilon^{1/r}$, коэффициенты которых определяются с помощью рекуррентных формул (45), (48), (49).

Отметим, что если данный корень $\lambda_0(t)$ уравнения (41) не удовлетворяет условию (42) (тождественно по t), то необходимо проверить, удовлетворяет ли он условию $L_{0i}(\lambda_0) \neq 0$ при некотором $i > 2$. Если для некоторого m $L_{0i}(\lambda_0) \equiv 0$ при $i < m$, то

$$L_{0m}(\lambda_0) \neq 0, \quad (50)$$

то убывающий участок диаграммы Ньютона для этого корня будет иметь более сложный вид и может состоять из нескольких звеньев, так как на диаграмме могут находиться точки прямых $y = s$, $s = \overline{2, m-1}$, если соответствующие коэффициенты L_{ks} , $k = \overline{1, r-1}$, отличны от нуля. В этом случае [15] разложения для $\lambda(t, \varepsilon)$ и $u(t, \varepsilon)$ будут строиться отдельно для каждого звена диаграммы. Показатели степени параметра ε , по которым следует вести эти разложения, равняются тангенсам углов наклона соответствующих звеньев к отрицательному направлению оси абсцисс. Количество различных разложений в этом случае будет равно кратности r данного корня $\lambda_0(t)$, поскольку этой кратности равна сумма длин проекций всех звеньев диаграммы на ось абсцисс. Следует однако иметь в виду, что при $m > h$ коэффициенты разложения для $\lambda(t, \varepsilon)$ могут определяться не из алгебраических уравнений, как при доказательстве теоремы 1, а из дифференциальных, поскольку согласно (37) коэффициенты $L_{ks}[\lambda^k]$ при $k > h$ могут содержать оператор дифференцирования $\mathcal{D}$.

Решения второй группы. Из проведенного выше анализа следует, что если уравнение (41) имеет n корней (с учетом их кратности), каждый из которых удовлетворяет условию (42) или (50) при некотором m (своим для каждого корня), то можно построить n различных линейно независимых формальных решений системы (1), которые составят ее общее формальное решение.

Уравнение (41) имеет n корней, если коэффициент при λ_0^n в нем отличен от нуля, т. е.

$$(B, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T]. \quad (51)$$

Легко убедиться, что это условие обеспечивает неособенность матрицы $B(t, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, поскольку если матрицу $B(t, \varepsilon)$ рассматривать как полиномиальный пучок матриц относительно ε , то из выполнения условия (51) следует его регулярность [17].

Допустим, что условие (51) тождественно не выполняется и, кроме коэффициента $M_{01}(t)$, в уравнении (41) равны нулю все коэффициенты $M_{i1}(t)$ при $i < s$. Тогда это уравнение имеет $n - s$ корней и, следовательно, решений вида (12) можно построить только $n - s$. В этом случае возникает проблема поиска остальных решений системы (1). В дальнейшем решения вида (12) будем называть решениями первой группы, а искомые недостающие решения — решениями второй группы.

Следуя [9—11], эти решения будем строить в виде

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int \xi^{-1}(t, \varepsilon) dt \right). \quad (52)$$

Для определения вида разложений для функции $\xi(t, \varepsilon)$ и вектора $v(t, \varepsilon)$ поступим таким же образом, как и при исследовании решений вида (12). Подставляя (52) в систему (1), получаем задачу о возмущении нулевого собственного значения и соответствующего собственного вектора линейного оператора B_0 относительно линейного оператора A_0 :

$$[B_0 + \tilde{B}(t, \varepsilon)]v(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon)K(t, \varepsilon)v(t, \varepsilon), \quad (53)$$

где

$$\tilde{B}(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s \tilde{B}_s(t), \quad K(t, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s K_s(t), \quad (54)$$

$$\tilde{B}_s(t) = B_s(t), \quad s = 1, 2, \dots; \quad K_s(t) = A_s(t) - B_{s-h}D, \quad s = 0, 1, \dots \quad (55)$$

Уравнение разветвления для этой задачи имеет вид

$$M(\xi, \varepsilon) = (\tilde{M}(\xi, \varepsilon)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = ((\xi K - \tilde{B})(E - \xi GK - G\tilde{B})^{-1}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = 0. \quad (56)$$

Как и в предыдущем случае, представим операторное выражение в виде формального разложения

$$M(\xi, \varepsilon) = \sum_{k, s \geq 0} M_{ks}[\xi^k] \varepsilon^s, \quad (57)$$

где k — суммарная степень функции ξ , содержащейся в записи операторной функции $M_{ks}[\xi^k]$. Имеем

$$G\tilde{M} = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi GK - G\tilde{B})^k. \quad (58)$$

Используя соотношение

$$K\xi = \xi K - \varepsilon^h(D\xi)B$$

и проводя индукцию по k , получаем следующую формулу:

$$(\xi GK - G\tilde{B})^k = (-1)^k (G\tilde{B})^k + \sum_{s=1}^k \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^{i+s+j} \varepsilon^{hi} \sigma((GB)_i; (G\tilde{B})_j; (GK)_{s-1-i}[\xi^{s-1}]\xi GK (G\tilde{B})^{k-s-j}), \quad (59)$$

где зависимость $\sigma((GB)_i; (G\tilde{B})_j; (GK)_{s-1-i}[\xi^{s-1}])$ от ξ определяется по такому правилу. Каждому слагаемому операторного выражения $\sigma((GB)_i; (G\tilde{B})_j; (GK)_{s-1-i})$ отвечает произведение i множителей $D\xi$, которые соответствуют множителям B , и $s-1-i$ множителей ξ , соответствующих множителям K . Порядок размещения множителей $D\xi$ и ξ таков же, как и порядок размещения множителей B и K в соответствующем слагаемом. При этом оператор дифференцирования D действует на все выражение, находящееся справа перед ним. Например,

$$\begin{aligned} \sigma((GB)_1; (G\tilde{B})_1; (GK)_1[\xi^2]) &= GBGKG\tilde{B}D\xi^2 + GBG\tilde{B}GKD\xi^2 + \\ &+ \tilde{G}BGBGKD\xi^2 + \tilde{G}B GKG\tilde{B}D\xi + GKGBG\tilde{B}D\xi + GK G\tilde{B}GBD\xi. \end{aligned}$$

Подставив выражение (59) в (58) и проводя такие же выкладки, как и при исследовании операторного выражения $L(\lambda, \varepsilon)$, для коэффициентов уравнения разветвления (56) получим следующие формулы:

$$M_{00} = 0, \quad M_{k0} = (A_0(GA_0)^{k-1}\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (60)$$

$$M_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^j (P_j^s(G\tilde{B})\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (61)$$

$$M_{ks}[\xi^k] = \sum_{i=0}^{[s/h]} \sum_{j=0}^{s-hi} \sum_{i_1=0}^j \sum_{i_2=j_1}^{s-hi+i_1-j} \sum_{i_3=0}^{s-hi+i_1-j-i_2} (-1)^{i+j} (P_{i,k-1-i,i_1}^{i_2} \times \\ \times (GB; GK; \tilde{GB})[\xi^{k-1}] \xi GK_{j_3} P_{j-i_1}^{s-hi-i_2-i_3} (\tilde{GB}) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad k, s = 1, 2, \dots, \quad (62)$$

где зависимость операторной функции $P_{i,k-1-i,i_1}^{i_2}(GB, GK, \tilde{GB})[\xi^{k-1}]$ от ξ определяется по такому же правилу, что и в формуле (59). Соответствующие выражения $[\xi^{k-1}]$ составляются для каждого слагаемого в отдельности; порядок размещения множителей $D\xi$ и ξ соответствует порядку размещения множителей B_i , K_j и не зависит от их индексов. Например,

$$P_{1,1,1}^1(GB; GK; \tilde{GB})[\xi^2] = B_0 GK_0 \tilde{GB}_1 D\xi^2 + B_0 \tilde{GB}_1 GK_0 D\xi^2 + K_0 GB_0 \tilde{GB}_1 \xi D\xi + \\ + K_0 \tilde{GB}_1 GB_0 \xi D\xi + \tilde{B}_1 GB_0 GK_0 D\xi^2 + \tilde{B}_1 GK_0 GB_0 \xi D\xi.$$

Проанализируем полученные формулы. Принимая во внимание (11), заключаем, что

$$M_{k0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (63)$$

Следовательно, на диаграммах Ньютона, соответствующих уравнению разветвления (56), как и в предыдущем случае, отсутствуют точки оси абсцисс.

Из формулы (62) имеем

$$M_{k1}[\xi^k] = ((P_k^1(GK) - P_{k,1}^1(GK; \tilde{GB})) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \xi^k - \\ - \delta_{1,h} (P_{1,k-2}^0(GB; GK) GK_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) [\xi^{k-1}] \xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

($\delta_{1,h}$ — символ Кронекера). Так как $GB_0 = B_0^* B_0 = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0\}$, то используя соотношения (11), нетрудно показать, что

$$P_{1,k-2}^0(GB; GK) GK_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} = 0.$$

Кроме того, $P_{k,1}^1(GK; \tilde{GB})$ содержит только $K_0 = A_0$, а все слагаемые в составе $P_k^1(GK)$, содержащие $B_0 D$, равны нулю, поскольку не имеют множителей, зависящих от t . Следовательно,

$$M_{k1} = ((P_k^1(GA) - P_{k,1}(GA; \tilde{GB})) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (64)$$

Сравнивая (64) с (39), (40), приходим к выводу, что коэффициенты M_{i1} уравнения разветвления (56) совпадают с коэффициентами при λ_0^{n-1} в уравнении (41).

Этот вывод дает решение вопроса о построении s решений системы (1), дополняющих уже построенные $n - s$ решений первой группы. Допустим, что

$$M_{02}(t) = (B_1 GB_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) - (B_2 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T]. \quad (65)$$

Тогда, если

$$M_{i1}(t) = 0, \quad M_{s1}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0; T], \quad i = \overline{1, s-1}, \quad (66)$$

то соответствующая диаграмма Ньютона для уравнения разветвления (56) представляет собой отрезок, соединяющий точки (0; 2) и (s; 1), тангенс угла наклона которого к отрицательному направлению оси абсцисс равен $1/s$. Следовательно, функция $\xi(t, \varepsilon)$ и вектор $v(t, \varepsilon)$ разлагаются в ряды по степеням $v = \varepsilon^{1/s}$, и таких разложений будет равно s . При этом первый коэффициент $\xi_1(t)$ разложения для $\xi(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$M_{02} + \xi_1^s M_{s1} = 0, \quad (67)$$

откуда в силу условий (65), (66) найдем s различных отличных от нуля функций $\xi_1(t)$:

$$\xi_1(t) = \sqrt[s]{\left| \frac{M_{02}}{M_{s1}} \right|} \exp \left[\frac{i}{s} \left(\arg \left(-\frac{M_{02}}{M_{s1}} \right) + 2\pi(j-1) \right) \right], \quad i = \overline{1, s}. \quad (68)$$

Для определения последующих коэффициентов разложения $\xi(t, \varepsilon)$, как и при построении решений первой группы, воспользуемся непосредственно уравнением разветвления (56), применив метод неопределенных коэффициентов. Подставив формальный ряд

$$\xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \xi_k(t) \quad (69)$$

в уравнение (56) и сгруппировав в нем коэффициенты при одинаковых степенях v , а затем приравняв их нулю, получим систему уравнений

$$\sum_{i=0}^{[k/s]} \sum_{j=0}^{k-si} M_{ji} [P_j^{k-si}(\xi)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (70)$$

где оператор M_{ji} действует отдельно на каждое слагаемое в составе $P_j^{k-si}(\xi)$ таким же образом, как и на ξ^j , не нарушая установленного размещения множителей $\xi_1, \xi_2, \dots$. При этом по определению полагаем $M_{0i} [P_0^k(\xi)] = M_{0i}$, $i = 0, 1, \dots$.

Согласно (65), (66), при $k < 2s$ уравнения (70) являются тождествами, а при $k = 2s$ получаем уравнение (67). Решая эти уравнения при $k > 2s$, находим любые коэффициенты разложения $\xi(t, \varepsilon)$. Так, если коэффициенты $\xi_k(t)$ известны при $k < m$, то, положив в (70) $k = 2s + m - 1$, найдем

$$\xi_m(t) = - \frac{f_m(t)}{s \tilde{\xi}_1^{s-1} M_{s1}}, \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} f_m(t) = & \sum_{i=2}^{\left[\frac{2s+m-1}{s} \right]} \sum_{j=0}^{2s+m-1-si} M_{ji} [P_j^{2s+m-1-si}(\xi)] + \\ & + \sum_{j=s+1}^{s+m-1} M_{j1} [P_j^{s+m-1}(\xi)] + \hat{P}_s^{s+m-1}(\xi) M_{s1} \end{aligned}$$

— известное выражение, в котором $\hat{P}_s^{s+m-1}(\xi)$ — та часть $P_s^{s+m-1}(\xi)$, которая не содержит ξ_m .

Для определения коэффициентов $v_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, разложения вектора $v(t, \varepsilon)$ по степеням v воспользуемся формулой

$$v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi} + G\tilde{M}(\xi, \varepsilon)\tilde{\varphi}.$$

Подставив сюда разложения (57), (69) и сгруппировав коэффициенты при одинаковых степенях параметра v , получим следующие формулы:

$$v_0 = \tilde{\varphi}, \quad v_k(t) = \sum_{i=0}^{[k/s]} \sum_{j=0}^{k-si} G_{ji} \tilde{M}_{ji} [P_j^{k-si}(\xi)] \tilde{\varphi}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (72)$$

В результате получим следующую теорему.

Теорема 2. Если выполняются условия (65), (66), то система уравнений (1) имеет s формальных частных решений вида (52), где функция $\xi(t, \varepsilon)$ и вектор $v(t, \varepsilon)$ представляются разложениями по степеням $v = \varepsilon^{1/s}$, коэффициенты которых определяются с помощью рекуррентных формул (68), (71), (72).

6. Некоторые выводы. Выполнение условий теорем 1 и 2 позволяет построить ровно n частных формальных решений системы (1),

часть из которых имеет вид (12), а вторая часть — (52). Методами [6] можно показать, что эти решения линейно независимы и, следовательно, дают общее формальное решение данной системы.

Заметим, что главным условием, обеспечившим существование s решений второй группы, явилось условие (65). Если существует такой номер k , что $M_{0i}(t) \equiv 0$ при $i < k$, но $M_{0k}(t) \neq 0 \forall t \in [t_0; T]$, то при выполнении условия (66) также будет строиться s решений второй группы. Только диаграмма Ньютона будет иметь более сложный вид и при $k > h$ коэффициенты разложений для функции $\xi(t, \varepsilon)$ могут определяться не из алгебраических, а из дифференциальных уравнений.

Как уже отмечалось, отличие от нуля хотя бы одного из коэффициентов $M_{0i}(t)$ обеспечивает неособенность матрицы $B(t, \varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, что и позволяет построить n линейно независимых решений системы (1). Если окажется, что все $M_{0i}(t) \equiv 0$, то матрица $B(t, \varepsilon)$ будет вырожденной и при выполнении условия (66) решений второй группы будет меньше, чем s .

Количество этих решений определяется поведением коэффициентов M_{ji} , $j = \overline{1, s-1}$, $i = 2, 3, \dots$. А именно, если $M_{ji} = 0$ при $j = \overline{1, m}$, $m < s$, $i = 2, 3, \dots$, то на соответствующей диаграмме Ньютона будут отсутствовать точки прямых $x = i$, $i < m$ и, значит, решений будет $s - m$. Всего же в этом случае будет $n - m$ решений системы (1) вместе с решениями первой группы.

Если окажется, что $L_{01}(\lambda_0) = 0$ при любых λ_0 , то согласно (38) все $L_{11}(\lambda_0) = 0$ и на координатной плоскости, соответствующей уравнению разветвления (18), будут отсутствовать точки прямой $y = 1$. В этом случае функция $\lambda_0(t)$ будет определяться из уравнения $L_{02}(\lambda_0) = 0$, которое, как и уравнение (41), будет представлять собой целое алгебраическое уравнение n -й степени, причем коэффициентами при λ_0^{n-i} будут выражения $M_{2i}(t)$. Если и $L_{02}(\lambda_0) = 0$ при любых λ_0 , то для определения $\lambda_0(t)$ используется уравнение $L_{03}(\lambda_0) = 0$, и т. д.

Наконец, если окажется, что все $L_{0s}(\lambda_0) \equiv 0$, то согласно (37) и все $L_{hs}(\lambda_0) \equiv 0$. В этом случае решения первой группы будут отсутствовать. Поскольку коэффициенты M_{hs} уравнения разветвления (56) связаны с L_{hs} , то они также будут равны нулю, а значит, будут отсутствовать и решения второй группы. Можно показать, что отличие от нуля хотя бы одного коэффициента $L_{0i}(\lambda_0)$ обеспечивает регулярность системы (1) [18, 19], что и гарантирует существование ее общего решения в виде линейной комбинации $k \leq n$ линейно независимых частных решений. Если же все $L_{0i} \equiv 0$, то система (1) сингулярна и ее общее решение имеет другую структуру.

В заключение отметим, что, используя методы работ [1, 6], можно доказать, что все формальные решения системы (1), строящиеся по описанному выше алгоритму, при определенных условиях имеют асимптотический характер в смысле [20].

1. Феценко С. Ф., Шкиль Н. П., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.— 464 с.
3. Шкиль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— Київ: Вища шк., 1971.— 226 с.
4. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
5. Жикова Г. С. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем.— Киев, 1983.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.38).
6. Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев: Вища шк., 1989.— 287 с.
7. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем.— М.: Наука, 1973.— 431 с.
8. Старун И. И. Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем // Дифференц. уравнения.— 1985.— 21, № 10.— С. 1822—1823.
9. Яковец В. П. Об асимптотических решениях линейных сингулярно возмущенных систем с вырождением // Асимптотические методы в уравнениях математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 156—161.

10. Яковец В. П. Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождением // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1559—1566.
11. Яковец В. П. Асимптотика решений одного класса линейных сингулярно возмущенных систем // Докл. АН УССР.— 1991.— № 1.— С. 18—21.
12. Старун И. И. Система с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1535—1537.
13. Жукова Г. С. Асимптотика решений одного класса линейных систем с вырожденной матрицей при производной.— Киев, 1990.— 24 с.— (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 90.36).
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М. : Наука, 1988.— 548 с.
15. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 527 с.
16. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 495 с.
17. Lancaster P., Maroulas J. Inverse Eigenvalue Problems for Damped Vibrating Systems // J. Math. Anal. and Appl.— 1987.— 120, N 1.— P. 238—261.
18. Campbell S. L. Singular systems of differential equations.— San Francisco: Titman, 1982.— 234 p.
19. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1980.— 222 с.
20. Боголюбов Н. И., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1963.— 412 с.

Получено 18.06.91