

Топологические аспекты динамических систем

Дано определение минимального векторного поля, особые элементы которого гиперболичны. Для некоторого класса гладких многообразий вычислено число минимальных векторных полей Морса—Смейла. Найденные необходимые и достаточные условия L -эквивалентности векторных полей Морса—Смейла. Для полей Купки—Смейла введена 1-форма Ляпунова, на основании которой выписаны неравенства для сингулярных элементов.

Дано визначення мінімального векторного поля, особливі елементи якого гіперболічні. Для деякого класу гладких многовидів підраховано число мінімальних векторних полів Морса—Смейла. Знайдені необхідні і достатні умови L -еквівалентності мінімальних векторних полів Морса—Смейла. Для полів Купки—Смейла введена 1-форма Ляпунова, на основі якої виписані нерівності для сингулярних елементів.

Введение. Обозначим через M^n гладкое замкнутое многообразие, через $\mathcal{X}(M^n)$ пространство C^r -векторных полей на M^n , $r \geq 2$, с C^r -нормой. Два векторных поля $X, Y \in \mathcal{X}(M^n)$ называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, который преобразует траектории поля X в траектории поля Y , сохраняя их ориентацию. Топологическая эквивалентность определяет отношение эквивалентности на пространстве $\mathcal{X}(M^n)$. Одной из основных задач в теории динамических систем на гладких многообразиях является выяснение условий, при которых два векторных поля будут топологически эквивалентны [1]. Очевидно, что особые элементы (особые точки и замкнутые траектории) сохраняются при топологической эквивалентности. Поэтому в первую очередь необходимо выяснить структуру и взаимосвязь особых элементов того класса векторных полей, которые подвергаются исследованию на предмет топологической эквивалентности. Затем можно использовать дополнительные объекты, в частности функции Ляпунова, если они существуют, вводя для них подходящее отношение эквивалентности. В настоящей работе предлагается подход для изучения топологической эквивалентности векторных полей, основанный на рассмотрении их функций Ляпунова.

1. Минимальные векторные поля. Обозначим через $G(M^n) \subset \mathcal{X}(M^n)$ множество, состоящее из тех векторных полей, у которых все особые элементы гиперболические и их конечное число [1]. Хорошо известно, что $G(M^n)$ не всегда всюду плотно в $\mathcal{X}(M^n)$. Рассмотрим векторное поле $X \in G(M^n)$ и обозначим через $N_i(X)$ ($\bar{N}_i(X)$) число особых точек

(замкнутых орбит) индекса i . Введем на множестве $G(M^n)$ отношение частичного упорядочения. Будем говорить, что $X > Y$, если $N_i(X) \geq N_i(Y)$, $\bar{N}_i(X) \geq \bar{N}_i(Y)$ для всех индексов i и найдется индекс i_0 такой, что $N_{i_0}(X) > N_{i_0}(Y)$ или $\bar{N}_{i_0}(X) > \bar{N}_{i_0}(Y)$, $X, Y \in G(M^n)$. Исходя из этого частичного упорядочения на множестве $G(M^n)$ можно построить связный ориентированный граф K . В качестве вершины графа K необходимо взять все векторные поля $\{X_{i \in J}\} \in G(M^n)$, у которых $N_i(X_{j_1}) = N_i(X_{j_2})$ и $\bar{N}_i(X_{j_1}) = \bar{N}_i(X_{j_2})$ для всех индексов $i, j_1, j_2 \in J$. Если $X, Y \in G(M^n)$ и $X > Y$, то вершина $[X]$, представляющая поле X , и вершина $[Y]$, представляющая поле Y , соединяются стрелкой, идущей из X в Y : $[X] \rightarrow [Y]$.

О п р е д е л е н и е 1. Векторное поле $X \in G(M^n)$ называется минимальным, если не существует векторного поля $Y \in G(M^n)$ такого, что $X > Y$.

Возникает проблема описания числа минимальных элементов в множестве $G(M^n)$ для фиксированного многообразия M^n . Обозначим через $Q(M^n)$ число минимальных векторных полей в $G(M^n)$.

П р е д л о ж е н и е 1. Число $Q(M^n)$ является конечным.

Доказательство этого предложения основано на рассмотрении функций распределения значений числа особых элементов векторных полей из $G(M^n)$.

Аналогичные вопросы возникают, если рассматривать векторные поля Кунки — Смейла или Морса — Смейла, которые являются подмножествами из $G(M^n)$. В дальнейшем будем рассматривать только векторные поля Морса — Смейла.

Напомним, что векторное поле $X \in G(M^n)$ называется векторным полем Морса — Смейла, если устойчивые и неустойчивые многообразия критических элементов поля X пересекаются трансверсально, а множество неблуждающих точек $\Omega(X)$ совпадает с объединением критических элементов поля X .

Обозначим через $Q(M^n)$ число минимальных векторных полей Морса — Смейла на многообразии M^n . Несложно показать, что $Q(M^n)$ также конечно.

Предложение 2. Если $M^n = S^n$ (сфера), то

$$Q(S^n) = (k+1)(k+2)/2, \quad n = 2k,$$

$$Q(S^n) = (k+1)(k+2)/2 + 1, \quad n = 2k+1.$$

Предложение 3. Пусть $M^n, n = 4k$, — замкнутое односвязное многообразие, $H_{2k}(M^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_i(M^n, \mathbb{Z}) = 0$ для $0 < i < 2k, k \geq 2$. Тогда $Q(M^n) = (k+1)(4k^2 + 8k + 3)/3$.

Предложение 4. Пусть $M^n, n = 4k$, — замкнутое односвязное многообразие, $H_{2k}(M^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i(M^n, \mathbb{Z}) = 0$ для $0 < i < 2k, k \geq 2$. Тогда $Q(M^n) = (k+1)(4k^3 + 16k^2 + 19k + 6)/6$.

Предложение 5. Пусть $M^n, n \geq 6$, — замкнутое односвязное многообразие, у которого $\text{Tors}(H_i(M^n, \mathbb{Z})) = 0$. Тогда $Q(M^n) = P(n)$,

где $P(x)$ — полином, $\deg P(x) = \sum_{i=0}^n b_i(M^n)$ и $b_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n, \mathbb{Z})$.

2. Ф у н к ц и и Л я п у н о в а и векторные поля Морса — Смейла. Пусть X — векторное поле Морса — Смейла на замкнутом многообразии M^n . Майер показал, что для X всегда существует функция Ляпунова [2]. А именно, существует такая гладкая функция класса $C^\infty, f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполняются следующие условия: 1) $X(f)_p > 0$ для всех точек $p \in M^n$, которые не являются особыми и не лежат на замкнутых орбитах; 2) $Df(p) = 0$ тогда и только тогда, когда p — особая точка или точка из замкнутой орбиты; 3) f является функцией Морса — Ботта.

Используя рассуждения Смейла из [3], можно всегда построить такую функцию Ляпунова $f: M^n \rightarrow [0, n]$ для векторного поля Морса — Смейла

X , которая удовлетворяет следующим условиям: многообразие $M_i(X, f) = f^{-1}[0, i + 1/2]$ ($\bar{M}_i(X, f) = f^{-1}[0, i + 2/3]$) содержит все особые точки (замкнутые орбиты) индексов $j \leq i$. Такую функцию будем называть «пiсе» функцией Ляпунова.

Лемма 1. Пусть X — векторное поле Морса — Смейла на замкнутом многообразии M^n , f и g — две «пiсе» функции Ляпунова для поля X . Тогда существует диффеоморфизм, изотопный тождественному, $h: M^n \rightarrow M^n$, такой, что $M_i(X, f) = h(M_i(X, g))$, $\bar{M}_i(X, f) = h(\bar{M}_i(X, g))$.

Определение 2. Два векторных поля Морса — Смейла X и Y на замкнутом многообразии M^n называются L -эквивалентными, если существуют «пiсе» функции Ляпунова f и g для поля X и Y соответственно и диффеоморфизм $h: M^n \rightarrow M^n$, изотопный тождественному, такой, что $M_i(X, f) = h(M_i(Y, g))$, $\bar{M}_i(X, f) = h(\bar{M}_i(Y, g))$.

Теорема 1. Пусть M^n , $n \geq 6$, — замкнутое односвязное многообразие. Тогда существует конечное число L -эквивалентных минимальных векторных полей Морса — Смейла без замкнутых орбит.

В этом случае число L -эквивалентных минимальных векторных полей Морса — Смейла явно вычисляется через гомологии многообразия M^n . Доказательство этой теоремы можно найти в [4].

Теорема 2. Существует односвязное замкнутое многообразие, которое обладает бесконечным числом типов L -эквивалентных минимальных векторных полей Морса — Смейла.

Дадим необходимое и достаточное условие L -эквивалентности минимальных векторных полей Морса — Смейла. Рассмотрим группы G и H и два гомоморфизма $\varphi, \psi: G \rightarrow H$. Будем говорить, что гомоморфизмы φ и ψ эквивалентны, если существует изоморфизм $\xi: G \rightarrow G$ такой, что $\varphi = \psi \circ \xi$.

Пусть X — векторное поле Морса — Смейла на многообразии M^n , f — «пiсе» функция Ляпунова для поля X . Рассмотрим фильтрацию, построенную по функции f : $M_0(X, f) \subset \bar{M}_0(X, f) \subset \dots \subset M_i(X, f) \subset \bar{M}_i(X, f)$. Вложения $\theta: M_i(X, f) \rightarrow M^n$, $\bar{\theta}: \bar{M}_i(X, f) \rightarrow M^n$ индуцируют гомоморфизм групп гомологий

$$\theta_*: H_*(M_i(X, f), \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(M^n, \mathbb{Z}) \leftarrow \bar{\theta}_*: H_*(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}).$$

Заметим, что группы $H_j(M_i(X, f), \mathbb{Z})$ и $H_j(M^n, \mathbb{Z})$ изоморфны для $j < i$, группы $H_j(M_i(X, f), \mathbb{Z}) = 0$ — для $j > i$ и $H_i(M_i(X, f), \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа. Группы $H_j(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z})$ и $H_j(M^n, \mathbb{Z})$ изоморфны для $j < i$, группы $H_j(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}) = 0$ — для $j > i + 1$ и $H_{i+1}(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа.

Теорема 3. Пусть M^n , $n \geq 6$, — замкнутое односвязное многообразие, X и Y — минимальные векторные поля Морса — Смейла на M^n такие, что $N_i(X) = N_i(Y)$ и $\bar{N}_i(X) = \bar{N}_i(Y)$ для всех i . Тогда поля X и Y — L -эквивалентны тогда и только тогда, когда для «пiсе» функций Ляпунова f и g векторных полей X и Y соответственно выполняются условия:

$$H_i(M_i(X, f), \mathbb{Z}) \approx H_i(M_i(Y, g), \mathbb{Z}),$$

$$H_i(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}) \approx H_i(\bar{M}_i(Y, g), \mathbb{Z}),$$

$$H_{i+1}(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}) \approx H_{i+1}(\bar{M}_i(Y, g), \mathbb{Z})$$

и индуцированные гомоморфизмы

$$\begin{array}{ccccc} H_i(M_i(X, f), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\theta_{ii}} & H_i(M^n, \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\bar{\theta}_{ij}} & H_i(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}) \\ & \nearrow \eta_{ii} & & \nwarrow \bar{\eta}_{ii} & \\ H_i(M_i(Y, g), \mathbb{Z}) & & & & H_i(\bar{M}_i(Y, g), \mathbb{Z}) \\ & & H_{i+1}(\bar{M}_i(X, f), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{\theta}_{i+1}} & H_{i+1}(M^n, \mathbb{Z}) \\ & & \nearrow \bar{\eta}_{i+1} & & \\ & & H_{i+1}(\bar{M}_i(Y, g), \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

эквивалентны для всех i .

Рассмотрим кобордизм (W^n, V_0, V_1) , $\partial W^n = V_0 \cup V_1$ и векторное поле X на W^n , у которого интегральные кривые трансверсальны к краю W^n . Предположим, что X является векторным полем Морса — Смейла. Несложно показать, что на кобордизме W^n существует функция Ляпунова для поля X , $f: (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$. Если $n \geq 6$ и $\pi_1(W^n) = \pi_1(V_0) = \pi_1(V_1)$, то справедливы теоремы 1 — 3 для кобордизмов такого вида.

3. Векторные поля Купки — Смейла. Попытка перенести результаты предыдущих пунктов на более широкий класс векторных полей из $G(M^n)$, чем поля Морса — Смейла, затруднена поведением множества неблуждающих точек $\Omega(X)$. Рассмотрим векторные поля Купки — Смейла. Векторное поле $X \in G(M^n)$ называется полем Купки — Смейла, если его устойчивые и неустойчивые многообразия сингулярных элементов пересекаются трансверсально. Выделим среди полей Купки — Смейла подмножество Γ . Будем говорить что векторное поле $X \in \Gamma$, если множество наблюдающих точек $\Omega(X)$ состоит из несвязного объединения сингулярных элементов поля X и вложенных торов T^k размерности k , $2 \leq k \leq n-2$, которые имеют гиперболическую структуру. Это означает, что ограничение касательного расслоения многообразия M^n на множество неподвижных точек $T(M^n)/\Omega(X)$ представимо в виде непрерывного разложения на подрасслоения $E^s, E^u, T(\Omega(X)), T(M^n)/\Omega(X) = E^s \oplus E^u \oplus T(\Omega(X))$, где $T(\Omega(X))$ — касательное расслоение к $\Omega(X)$, причем это разложение инвариантно под действием потока поля X_t . Кроме этого, существует такая риманова метрика на многообразии M^n и такие константы $\lambda \in (0, 1)$ и c , что справедливы неравенства $\|X_t(v)\| \leq ce^{-\lambda t} \|v\|$, $v \in E^s$, $t \geq 0$, $\|X_{-t}(w)\| \leq ce^{-\lambda t} \|w\|$, $w \in E^u$, $t \geq 0$. Число s называется индексом компоненты связности $\Omega_j \in \Omega(X)$, $\Omega(X) = \bigcup_j \Omega_j$.

Пусть (W^n, V_0, V_1) — кобордизм с краем $\partial W^n = V_0 \cup V_1$; случай, когда одно из $V_i = \emptyset$, $i = 0, 1$, или оба не исключается. Рассмотрим гладкую функцию $f: (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$. Предположим, что особые точки функции f лежат во внутренней части W^n и представлены в виде несвязного объединения изолированных точек x_i , S_j^1 , окружностей и торов T_i^k , $2 \leq k \leq n-2$, которые являются невырожденными многообразиями в смысле Ботта, т. е. если точка $y \in S_j^1$ ($y \in T_i^k$), то сужение f на маленький трансверсальный диск к S_j^1 (T_i^k), проходящий через точку y , является функцией Морса. В этом случае будем говорить, что f — функция Морса — Ботта. Индекс критической точки ограничения функции f на трансверсальный диск называется индексом критического невырожденного подмногообразия S_j^1 (T_i^k).

Пусть (W^n, V_0, V_1) — кобордизм и X — векторное поле Купки — Смейла из подмножества Γ , удовлетворяющее условию отсутствия циклов на множестве неблуждающих точек [1]. Тогда для векторного поля X существует функция Ляпунова $f: (W^n, V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$, особые точки которой совпадают с множеством неблуждающих точек $\Omega(X)$ и которая является функцией Морса — Ботта. Индексы критических подмногообразий функции f совпадают с индексами компонент связности множества неблуждающих точек $\Omega(X)$. Предполагаем, что векторное поле X трансверсально к краю кобордизма W^n , если он непустой. Используя функции Ляпунова можно дать оценку числа сингулярных элементов и компонент связности множества неблуждающих точек поля X .

Теорема 4. Пусть X — векторное поле Купки — Смейла из подмножества Γ ($\Omega(X)$ состоит из несвязного объединения сингулярных элементов и гиперболических торов T^k , $2 \leq k \leq n-2$) на кобордизме (W^n, V_0, V_1) и удовлетворяет условию отсутствия циклов. Справедливы неравенства

$$N_\lambda^0 + N_{\lambda-1}^1 + N_\lambda^1 + \sum_{k=2}^{n-\lambda} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N_{\lambda+i}^k \geq \mu(H_\lambda(M^n, \mathbb{Z})) + \\ + \mu(\text{Tors } H_{\lambda-1}(M^n, \mathbb{Z})),$$

где N_λ^0 — число сингулярных точек индекса λ , N_λ^1 — число изолированных замкнутых орбит индекса λ , N_λ^k — число k -мерных торов индекса λ из множества неблуждающих точек $\Omega(X)$, $\mu(H)$ — минимальное число образующих группы H .

Аналогичный результат содержится в [5].

Пусть M^n — гладкое многообразие, у которого $H^1(M^n, Q) \neq 0$ и ω — замкнутая 1-форма на M^n . Точка x многообразия M^n называется особой для формы ω , если $\omega(x)$ невырождена на касательном пространстве $T_x(M^n)$. Предположим, что особые точки формы ω представлены в виде несвязного объединения конечного числа окружностей, изолированных точек и гладко вложенных торов T^k размерности k , $2 \leq k \leq n-2$. Замкнутая 1-форма локально является дифференциалом некоторой функции f ($\omega = df$). Пусть x — изолированная особая точка формы ω . Будем говорить, что она невырожденная, если эта точка невырождена для функции f . Если $S^1(T^k)$ — окружность (k -мерный тор), на которой форма ω равна нулю, то в силу теоремы Стокса в некоторой трубчатой окрестности U этой окружности (тора) форма ω также будет дифференциалом функции g . Пусть для функции g эта окружность (тор) — невырожденная в смысле Ботта. В этом случае будем говорить, что $S^1(T^k)$ — невырожденная особая окружность (тор) 1-формы ω . В дальнейшем будем рассматривать замкнутые 1-формы с невырожденными особыми точками, окружностями и торами. Такие 1-формы будем называть 1-формами Морса — Ботта.

Степенью иррациональности замкнутой 1-формы называется число рационально независимых интегралов по всевозможным одномерным циклам из группы $H_1(M^n, Q)$. Формы степени иррациональности один называются рациональными. Выберем некоторую окружность S^1 и зафиксируем на ней ориентацию. Каждой рациональной 1-форме ω на многообразии M^n , у которого $H_1(M^n, Q) \neq 0$, можно сопоставить отображение $f_\omega: M^n \rightarrow S^1$, $f_\omega(x) = \int_{x_0}^x \omega \pmod{\text{н. о. д. } (u_1, u_2, \dots, u_i)}$, где x_0 — фиксированная точка многообразия M^n , u_i — интегралы по базисным циклам из группы $H_1(M^n, Q)$. Критическими точками отображения f_ω будут в точности те точки, которые были критическими для формы ω . Если a — регулярное значение отображения f_ω , то всегда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех δ , $\varepsilon \geq \delta > 0$, многообразие $W_a^n = M^n \setminus f^{-1}(a - \delta, a + \delta)$ является кобордизмом с краем $V_a^0 = f^{-1}(a - \delta) \cup V_a^1 = f^{-1}(a + \delta)$ и ограничение отображения f_ω на W_a^n можно рассматривать как функцию

$$\bar{f}_\omega: (W_a^n, V_a^0, V_a^1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1).$$

Пусть X — векторное поле Купки — Смейла из подмножества Γ на замкнутом многообразии M^n , у которого $H^1(M^n, Q) \neq 0$.

Определение 3. Замкнутую рациональную 1-форму Морса Ботта ω будем называть 1-формой Ляпунова для векторного поля Купки — Смейла X из подмножества Γ ($\Omega(X)$ состоит из несвязного объединения сингулярных элементов и гиперболических торов T^k , $2 \leq k \leq n-2$) на многообразии M^n , если для каждого регулярного значения a отображения $f_\omega: M^n \rightarrow S^1$ кобордизм W_a^n содержит все множество неблуждающих точек $\Omega(X)$ и индуцированное отображение $\bar{f}_\omega: (W_a^n, V_a^0, V_a^1) \rightarrow ([0, 1], 0, 1)$ является функцией Ляпунова для ограничения поля X на W_a^n .

Пример. Пусть M^n — замкнутое многообразие и X — векторное поле Морса — Смейла на M^n . Рассмотрим многообразие $N^n = M^n \setminus (D_1^n \cup D_2^n)$, где D_1^n и D_2^n — маленькие открытые диски, содержащие по одной особой точке индекса 0 и n соответственно. Предполагаем, что у векторного

поля X они имеются. Рассмотрим диффеоморфизм $h: S_1^{n-1} \rightarrow S_2^{n-1}$, по которому склеим края многообразия N^n ($S_i^{n-1} = \partial(\bar{D}_i^n)$, $i = 1, 2$). Полученное многообразие обозначим через $N^n(h)$. Очевидно, что векторное поле X индуцирует векторное поле на многообразии $N^n(h)$, которое обозначим через $X(h)$. Используя прием Вилсона, подправим векторное поле $X(h)$ в окрестности подмногообразия $S_2^{n-1} = h(S_1^{n-1})$ таким образом, что бы множество неблуждающих точек $\Omega(\tilde{X}(h))$ состояло из несвязного объединения вложенных торов T^k , $2 \leq k \leq n-2$, с гиперболической структурой и критических элементов поля X [6]. Очевидно векторное поле $\tilde{X}(h)$ является векторным полем Купки — Смейла, допускающим замкнутую 1-форму Ляпунова. Понятно, что эта 1-форма Ляпунова получается из функции Ляпунова $f: M^n \rightarrow [0, 1]$ для поля X путем склейки концов отрезка $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ и очевидным подправлением f в окрестности подмногообразия $f^{-1}(\varepsilon)$.

Интересно было бы выяснить вопрос, когда векторное поле Купки — Смейла допускает замкнутую 1-форму Ляпунова?

Теорема 5. Пусть X — векторное поле Купки — Смейла из подмножества Γ ($\Omega(X)$ состоит из несвязного объединения сингулярных элементов и гиперболических торов T^k , $2 \leq k \leq n-2$) на многообразии M^n , допускающее замкнутую 1-форму Ляпунова ω . Обозначим через N_λ^0 число особых точек индекса λ , через N_λ^1 — число изолированных замкнутых орбит индекса λ , через N_λ^k — число k -мерных торов индекса λ из множества неблуждающих точек $\Omega(X)$ поля X . Тогда выполняются неравенства

$$N_\lambda^0 + N_{\lambda-1}^1 + N_\lambda^1 + \sum_{k=2}^{n-\lambda} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N_{\lambda+i}^k \geq \mu(H_\lambda(\hat{M}_\omega^n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) + \\ + \mu(\text{Tors } H_{\lambda-1}(M_\omega^n, \mathbb{Z}[\bar{t}, \bar{t}^{-1}])).$$

Здесь $\hat{M}_\omega^n$ — минимальное накрытие многообразия, на котором форма ω становится точной, $H_i(\hat{M}_\omega^n, \hat{\mathbb{Z}}^+ [t, t^{-1}])$ — гомологии, введенные С. П. Новиковым для многообразия $\hat{M}_\omega^n$ (гомологии, построенные по цепям, бесконечным в одну сторону), $\hat{\mathbb{Z}}^+ [t, t^{-1}]$ — кольцо лорановских рядов (полное групповое кольцо $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ по степеням t^i , $i > 0$), являющееся кольцом главных идеалов, $\mu(H)$ — минимальное число образующих модуля H .

Доказательство этой теоремы основано на методе, предложенном С. П. Новиковым для изучения замкнутых 1-форм, и развитом затем в работах А. В. Зорича, А. В. Пажитнова, М. Ш. Фарбера [7—10].

1. Палис Ж., Де Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
2. Mayer K. Energy functions for Morse — Smale systems // Amer. J. Math. — 1968. — 90, N 4. — P. 1031—1040.
3. Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. — 1961. — 74, N 1. — P. 199—206.
4. Шарко В. В. Деформация функций Морса. I // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, № 2. — С. 237—243.
5. Rosenberg H. A generalization of Morse — Smale inequalities // Bull. Amer. Math. Soc. — 1964. — 70, N 3. — P. 422—427.
6. Тамара И. Топология слоений. — М.: Мир, 1979. — 317 с.
7. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. — 1982. — 37, № 5. — С. 3—49.
8. Зорич А. В. Квазипериодическая структура поверхностей уровня Морсовской формы, близкой к рациональной, — задача С. П. Новикова // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. 51, № 6. — С. 1322—1344.
9. Пажитнов А. В. О точности неравенств Новикова для многообразий со свободной абелевой фундаментальной группой // Мат. сб. — 1990. — 180, № 11. — С. 1486—1523.
10. Фарбер М. Ш. Точность неравенств Новикова // Функцион. анализ и его прил. — 1985. — 19, № 1. — С. 49—59.

Получено 10.09.91