

Об одном методе решения задачи Коши для сигнатурных параболических уравнений

Рассматривается система параболического типа с сингулярными коэффициентами на граничных гиперплоскостях. Решение задачи Коши сводится к интегральному уравнению и фундаментальное решение определяется как ядро обратного оператора задачи Коши.

Розглядається система параболического типу з сингулярними коефіцієнтами на граничних гіперплощинах. Розв'язування задачі Коші зводиться до інтегрального рівняння і фундаментальний розв'язок визначається як ядро оберненого оператора задачі Коші.

Известно [1], что для решения задачи Коши в классах гельдеровых функций методом Э. Леви строится фундаментальное решение параболических систем, с помощью которого определяется решение задачи Коши и устанавливаются его оценки. В классах Дини [2] более эффективен при изучении этой задачи прием Э. Хопфа. В настоящей статье предлагается простой способ редукции сингулярной задачи Коши к интегральным уравнениям, получения решения задачи и построения фундаментального решения.

Рассмотрим в области $\Pi = (0, T) \times E_r \times E_{n-r}^+$ точек $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (t, x', x'')$ задачу Коши для системы уравнений с особенностями на координатных гиперплоскостях

$$L(t, x, D)u \equiv D_t u - \sum_{|k'|+2|k''| \leq 2b} A_k(t, x) D_{x'}^{k'} B_{x''}^{k''} u = f(t, x), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x_l} \Big|_{x_l=0} = 0, \quad l = r+1, \dots, n, \quad (2)$$

где

$$B_{x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} = \frac{2\nu_l + 1}{x_l} \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad B_{x''}^{k''} = B_{x_{r+1}}^{k_{r+1}} \dots B_{x_n}^{k_n}, \quad \nu_l \geq -\frac{1}{2}.$$

Предположим, что для (1) выполнено условие В-параболичности: все корни уравнения

$$\det \left\| \sum_{|k'|+2|k''|=2b} A_k(t, x) (i\sigma')^{k'} (-\sigma_{r+1}^2)^{k_{r+1}} \dots (-\sigma_n^2)^{k_n} - \lambda E \right\| = 0 \quad (3)$$

удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda(t, x, \sigma) \leq -\delta_0 |\sigma|^{2b}$ для всех $(t, x) \in \Pi$, $\sigma \in E_r \times E_{n-r}^+ \equiv E_n^+$, $\delta_0 = \operatorname{const} > 0$

Для решения задачи (1), (2) рассмотрим систему с «замороженными» коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k'|+2|k''|=2b} A_k(t, y) D_{x'}^{k'} B_{x''}^{k''} u, \quad (t, y) \in \Pi. \quad (4)$$

Матрица Грина задачи (4), (2) определяется формулой

$$G(t, \tau, x, \xi; y) = T_{x_{r+1}}^{\tau_{r+1}+1} \dots T_{x_n}^{\tau_n} G(t, \tau, x' - \xi', x''; y) \equiv T_{x''}^{\xi''} G, \quad (5)$$

в которой $G(t, \tau, x; y)$ — преобразование Фурье — Бесселя,

$$G(t, \tau, x, y) = \int_{E_r} e^{i\sigma' x'} d\sigma' \int_{E_{n-r}^+} Q(\tau, \tau, \sigma, y) j_{\nu_{r+1}}(\sigma_{r+1} x_{r+1}) \dots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n) (\sigma'')^{\nu_0} d\sigma, \\ (\sigma'')^{\nu_0} \equiv \sigma_{r+1}^{2\nu_{r+1}+1} \dots \sigma_n^{2\nu_n+1},$$

$Q(t, \tau, \sigma; y)$ — нормальная фундаментальная матрица решений двойственной к (4) системы

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, y) (i\sigma')^{k'} (-\sigma_{r+1}^2)^{kr+1} \dots (-\sigma_n^2)^{kn} v, \quad (6)$$

$T_{x_l}^{\xi_l}$ — оператор обобщенного сдвига,

$$T_{x_l}^{\xi_l} f(x) = C_{v_l} \int_0^\pi f(\dots, \sqrt{x_l^2 + \xi_l^2 - 2x_l \xi_l \cos \alpha}, \dots) \sin^{2v_l} \alpha d\alpha.$$

Если $A_k(t, y)$ непрерывны по $t \in [0, T]$, причем равномерно относительно y при $|k| \leq 2b$, то $Q(t, \tau, s; y)$, $s = \sigma + i\gamma$, целая функция аргументов $\hat{s} = s(t - \tau)^{-1/2b}$ и в силу условия B -параболичности выполняется оценка

$$|Q(t, \tau, \hat{s}; y)| \leq C_0 \exp \{-c|\sigma|^{2b} + c_1|\gamma|^{2b}\}. \quad (7)$$

На основании лемм о преобразовании Бесселя [3] и Фурье [1, с. 36] целых функций матрица Грина $G(t, \tau, x, \xi; y)$ как функция комплексных аргументов $(x' - \xi') (t - \tau)^{-1/2b}$, $x'' (t - \tau)^{-1/2b}$, $\xi'' (t - \tau)^{-1/2b}$ есть целая, четная по последним аргументам, и при действительных аргументах справедливо неравенство

$$|D_x^k D_{x''}^l B_{x''}^{k''} G(t, \tau, x, \xi; y)| \leq C_{kl} (t - \tau)^{-\frac{n_v + |k'| + l + 2|k''|}{2b}} \times \\ \times T_{x''}^{\xi''} \{\exp(-c|x - \xi'|^q)\}, \quad (8)$$

$$n_v = r + 2 \sum_{s=1}^{n-r} (v_{r+s} + 1), \quad q = 2b(2b - 1)^{-1}, \quad \hat{x} = x(t - \tau)^{-1/2b}.$$

Теперь решение задачи Коши (1), (2) ищем в виде суммы потенциалов

$$u(t, x) = \int_{E_n^+} G(t, 0, x, \xi; \xi) \varphi(\xi) (\xi'')^{v_0} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} G(t, \tau, x, \xi; \xi) \mu \times \\ \times (\tau, \xi) (\xi'')^{v_0} d\xi. \quad (9)$$

Предполагая априори $\mu(t, x)$ непрерывной при $t > 0$ по Дини, вследствие применения к $u(t, x)$ оператора $L(t, x, D)$ получаем для $\mu(t, x)$ интегральное уравнение

$$\mu(t, x) = F(t, x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} K(t, \tau, x, \xi) \mu(\tau, \xi) (\xi'')^{v_0} d\xi, \quad (10)$$

где

$$F(t, x) = f(t, x) + \int_{E_n^+} K(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) (\xi'')^{v_0} d\xi,$$

$$K(t, \tau, x, \xi) \equiv -LG(t, \tau, x, \xi; \xi) = \sum_{|k| \leq 2b} [A_k(t, x) - A_k(t, \xi) \delta_{2b, |k|}] \times$$

$$\times D_x^{k'} B_{x''}^{k''} G, \quad \delta_{2b, |k|} = 0, \quad |k| < 2b, \quad \delta_{2b, 2b} = 1.$$

Если $A_k \in C^{(\omega_0)}(\Pi)$ при $|k| = 2b$, то с учетом оценок (8) получаем неравенство

$$|K(t, \tau, x, \xi)| \leq C_0 (t - \tau)^{-\frac{n_v + 2b}{2b}} \omega_0(2b \sqrt{t - \tau}) T_{x''}^{\xi''} \{e^{-c|x - \xi'|^q}\}. \quad (11)$$

Для степенного модуля непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$ строятся резольвента ядра $K \equiv K_1$

$$R(t, \tau, x, \xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} K_1(t, \beta, x, y) K_p(\beta, \tau, y, \xi) (y'')^{v_0} dy + K_1(t, \tau, x, \xi) \quad (12)$$

как уравнения с квазирегулярным ядром.

В случае общего модуля непрерывности $\omega_0(t)$, удовлетворяющего условию Дини $A\omega_0(n) = \int_0^h \omega_0(\tau) \tau^{-1} d\tau \equiv F_0(h) < \infty$, равномерная и абсолютная сходимость ряда Неймана (12) устанавливается с помощью методики работы [2]. Решение уравнения (10) однозначно определяется по формуле

$$\mu(t, x) = F(t, x) + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} R(t, \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) (\xi'')^{v_0} d\xi \quad (13)$$

и удовлетворяет неравенствам

$$|\mu(t, x)| \leq C(|f|_c + \omega_0(2^b \sqrt{t}) t^{-1} |\varphi|_c), \quad (14)$$

$$|\Delta_x \mu(t, x)| \leq C\{\omega_f(|\Delta x|) + F_0(|\Delta x|) + \omega_1(|\Delta x|)\} t^{-1}(|\varphi|_c + |f|_{\omega_f}),$$

где $\omega_f(t)$ — модуль непрерывности функции $f(t, x)$, а $\omega_1(t)$ — коэффициенты $A_k(t, x)$ с $|k| < 2b$.

Подставляя $\mu(t, x)$ из (13) в формулу (9) и выполняя замену порядка интегрирования, получаем

$$u(t, x) = \int_{E_n^+} Z(t, 0, x, \xi) \varphi(\xi) (\xi'')^{v_0} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} Z(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) (\xi'')^{v_0} d\xi. \quad (15)$$

Здесь

$$Z(t, \tau, x, \xi) = G(t, \tau, x, \xi; \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} G(t, \beta, x, y; y) R(\beta, \tau, y, \xi) (y'')^{p_0} dy. \quad (16)$$

Если функция $\omega^*(t) = \omega_f(t) + F_0(t) + \omega_1(t)$ в неравенстве (14) удовлетворяет условию $\int_{+0}^{\infty} \omega^*(t) t^{-1} dt < \infty$, то объемные потенциалы в (9) и (16)

имеют входящие в оператор $L(t, x, D)$ производные и тем самым оправдано сведение задачи (1), (2) к интегральному уравнению (10). В силу интегрального уравнения для резольвенты

$$R(t, \tau, x, \xi) = K(t, \tau, x, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{E_n^+} K(t, \beta, x, y) R(\beta, \tau, y, \xi) (y'')^{v_0} dy = \\ \equiv K + K * R \quad (17)$$

имеем $LZ = LG + R^* + LG^*R = -K - K^*R + R = 0$ т. е. $Z(t, \tau, x, \xi)$ — фундаментальная матрица решений задачи Коши (1), (2).

Теорема. Пусть система (1) равномерно В-параболическая в слое $\bar{\Pi} = [0, T] \times E_n^+$, коэффициенты $A_k(t, x)$ непрерывны по t , причем равномерно относительно x и $A_k \in C^{(\omega_0)}(\Pi)$, $A^2\omega_0(t) < \infty$ при $|k| = 2b$, а при $|k| < 2b$ $A_k \in C^{(\omega_1)}(\Pi)$, $A\omega_1(t) < \infty$.

Тогда для любых $\varphi \in C(E_n^+)$, $f \in C^{(\omega_f)}(\Pi)$ решение задачи (1), (2) определяется формулой (15) и справедливы оценки

$$|D_v^{k'} B_v^{k''} u(t, x)| \leq C t^{-\frac{|k|}{2b}} (\varphi|_c + |f|_{\omega_f}), \quad |k| < 2b, \quad (18)$$

$$|\Delta_x D_x^{k'} B_x^{k''} u(t, x)| \leq C [F_0(|\Delta x|) + F_1(|\Delta x|) + |\Delta x| (t - \tau)^{-1/2b}] \times \\ \times t^{-1} (\varphi|_c + |f|_{\omega_f}), \quad |k| = 2b. \quad (19)$$

Для произвольных $D_x^{k'} B_x^{k''} Z(t, \tau, x, \xi)$, $|k| < 2b$, выполняется неравенство (8) и

$$|\Delta_x D_x^{k'} B_x^{k''} Z(t, \tau, x, \xi)| \leq C (t < \tau)^{-\frac{n_v + 2b}{2b}} [F_0(|\Delta x|) + F_1(|\Delta x|) + \\ + |\Delta x| (t - \tau)^{-1/2b}] T_{x''}^{\xi''} (e^{-c|x + \widehat{\Delta x} - \xi|^{1^q}} + e^{-c|x - \widehat{\xi}|^{1^q}}). \quad (20)$$

Если только $A\omega_0(t) < \infty$ и $\varphi \in C^{(\omega_0)}(E_n^+)$, то решение задачи Коши определяется интегралами Стильбеса с мерой Бореля

$$u(t, x) = \int_{E_n^+} P(t, x; 0, d\xi) \varphi(\xi) (\xi'')^{v_0} + \int_0^t \int_{E_n^+} P(t, x; d\tau, d\xi) f(\tau, \xi) (\xi'')^{v_0} \quad (21)$$

и справедливы оценки вида (18), (19).

Заметим, что построение решения в виде (21), а также вывод неравенств (19) и (20) проводится с помощью приема Э. Хопфа [2].

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 С.
2. Матийчук М. И., Эйдельман С. Д. О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Тр. сем. по функцион. анализу.— Воронеж, 1967.— Вып. 9.— С. 54—83.
3. Матвийчук М. И. Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II // Дифференц. уравнения.— 1975.— 11, № 7.— С. 1293—1303.
4. Матийчук М. И. Задача оптимизации и задача с подвижной границей для параболических уравнений // Нелинейн. граничные задачи.— 1990.— Вып. 2.— С. 78—84.

Получено 16.01.91