

УДК 517.5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

## Несколько замечаний о приближении операторами Фурье функций высокой гладкости

Получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений операторов Фурье на классах функций  $\hat{C}_{\beta, \infty}^{\Psi}$  при дополнительных предположениях на их  $(\Psi, \beta)$ -производные.

Знайдені асимптотичні рівності для верхніх граней відхилень операторів Фур'є на класах функцій  $\hat{C}_{\beta, \infty}^{\Psi}$  за додаткових умов на їх  $(\Psi, \beta)$ -похідні.

Будем рассматривать классы  $\hat{L}_{\beta}^{\Psi} \mathfrak{M}$ , введенные автором в [1, 2]. Пусть  $\hat{L}_p$ ,  $p \geq 1$ , — множество функций, заданных на всей действительной оси  $R$  и имеющих там конечную норму  $\|\cdot\|_p$ , где при  $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_p = \sup_{a \in R} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+a)|^p dt \right)^{1/p}$$

и  $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_M = \text{ess sup} |\varphi(t)|$ ,  $\hat{L}_\infty \stackrel{\text{дф}}{=} M$ . Пусть, далее,  $\psi(v)$  — функция, непрерывная при всех  $v \geq 0$ , и  $\beta$  — фиксированное действительное число,

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos(vt + \beta\pi/2) dv. \quad (1)$$

Через  $\hat{L}_\beta^\psi$  обозначается множество функций  $f \in \hat{L}_1$ , которые почти при всех  $x$  представляются в виде

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x+t) \hat{\psi}(t, \beta) dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \quad (2)$$

где  $A_0$  — некоторая постоянная и  $\varphi \in \hat{L}_1$ , а интеграл понимается как предел интегралов по симметричным расширяющимся промежуткам. Если  $f \in \hat{L}_\beta^\psi$  и при этом  $\varphi \in \mathfrak{N}$ , где  $\mathfrak{N}$  — некоторое подмножество из  $\hat{L}_1$ , то полагаем  $f \in \hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ . Подмножества непрерывных функций из  $\hat{L}_\beta^\psi$  и  $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$  обозначаются соответственно через  $\hat{C}_\beta^\psi$  и  $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ . В периодическом случае, т. е. когда в (2) функция  $\varphi(\cdot)$  является  $2\pi$ -периодической, множества  $\hat{L}_\beta^\psi \mathfrak{N}$  и  $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$  представляют собой множества  $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$  и  $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ , которые введены автором ранее (см., например, [3]). Функцию  $\varphi(\cdot)$  в представлении (2) называют  $(\psi, \beta)$ -производной функции  $f(\cdot)$  и обозначают  $f_\beta^\psi(\cdot)$ .

В [1, 4] изучались аппроксимативные свойства классов  $\hat{C}_\beta^\psi M$ . Там, в частности, при достаточно общих предположениях о функциях  $\psi(\cdot)$  получены точные по порядку оценки наилучших приближений функций  $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$  посредством целых функций экспоненциального типа и рассмотрены приближения функций  $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$  с помощью операторов Фурье

$$F_\sigma(f; x) = A_0 + \int_{-\infty}^\infty f_\beta^\psi(x+t) \hat{\tau}_\sigma(t) dt, \quad (3)$$

где  $\hat{\tau}_\sigma(t) = \hat{\tau}_\sigma(t, \beta)$  — преобразование вида (1) функции

$$\tau_\sigma(v) = \begin{cases} \psi(v), & 0 \leq v \leq \sigma - 1; \\ \psi(v) - |v(\sigma - 1)| \psi(\sigma), & \sigma - 1 \leq v \leq \sigma; \\ 0, & v \geq \sigma, \end{cases} \quad (4)$$

которые в периодическом случае при  $\sigma \in N$  являются частными суммами  $S_{\sigma-1}(f; x)$  порядка  $\sigma-1$  ряда Фурье функции  $f(\cdot)$ .

В настоящей работе рассматриваются также величины

$$\rho_\sigma(f; x) = f(x) - F_\sigma(f; x) \quad (5)$$

для функций  $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$ , но при дополнительном предположении, заключающемся в том, что их  $(\psi, \beta)$ -производные  $\varphi(\cdot)$  подчинены условию

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|\varphi(t)|}{|t|+1} dt \leq K < \infty. \quad (6)$$

Подмножества функций из  $M$ , для которых выполнено (6), обозначим через  $M_1$ . Таким образом, будем исследовать величины (5) в случае, когда  $f \in \hat{C}_\beta^\psi M_1$ . Чтобы сформулировать основные утверждения, введем ряд обозначений. Положим

$$S_\infty = S_M = \{\varphi : \varphi \in M, \text{ess sup} |\varphi(t)| \leq 1\}, \\ S_M = \{\varphi : \varphi \in M_1 \cap S_M\}.$$

Далее, обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество выпуклых вниз при всех  $v \geq 1$  исчезающих на бесконечности функций  $\psi(v)$ . Функцию  $\varphi \in \mathfrak{M}$  продолжим на участок  $[0, 1)$  так, чтобы полученная функция (которую по-

прежнему будем обозначать через  $\psi(\cdot)$  была непрерывна при всех  $v \geq 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  и ее производная  $\psi'(v) = \varphi'(v+0)$  имела ограниченную вариацию на промежутке  $[0, \infty)$ :  $\bigvee_0^\infty \varphi'(t) \leq K < \infty$ . Множества таких функций обозначим через  $\mathfrak{A}$ . Подмножества функций  $\psi \in \mathfrak{A}$ , для которых

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} dt < K < \infty, \quad (7)$$

обозначим через  $F$ . В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\psi \in F$  и  $\alpha = \alpha(\sigma)$  — произвольная функция, непрерывная при всех  $\sigma \geq 1$  и такая, что  $\sigma\alpha(\sigma) \geq \alpha_0 > 0$ . Тогда если  $f \in \hat{C}_\beta^\psi S_{M_1}$ , то при всех  $x \in R$ ,  $\beta \in R$  и  $\sigma \geq 1$

$$\rho_\sigma(f; x) = -\frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{m_\alpha \leq |t| \leq 1} f_\beta^\psi(x+t) \frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} dt + b_\sigma^\psi(\alpha; f; x), \quad (8)$$

где  $m_\alpha = \min(\alpha(\sigma), 1)$  и

$$|b_\sigma^\psi(\alpha; f; x)| \leq K_1(\psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha; \psi)), \quad (9)$$

причем

$$Q_\sigma(\alpha; \psi) = \int_{1/\alpha(\sigma)}^\infty \frac{\psi(t+\sigma)}{t} dt + \int_{\alpha(\sigma)}^\infty t^{-1}(\psi(\sigma) - \psi(\sigma + 1/t)) dt \quad (10)$$

и величина  $K_1$  может зависеть только от функции  $\psi(\cdot)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\hat{C}_\beta^\psi S_{M_1} \subset \hat{C}_\beta^\psi S_M$ , то в силу теоремы 1 из [1]

$$\rho_\sigma(f; x) = v_\alpha \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{m_\alpha \leq |t| \leq M_\alpha} f_\beta^\psi(x+t) \frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} dt + \bar{b}_\sigma^\psi(\alpha; f; x), \quad (11)$$

где  $M_\alpha = \max(\alpha(\sigma), 1)$ ,  $v = \text{sign}(\alpha(\sigma) - 1)$  и  $\bar{b}_\sigma^\psi(\alpha; f; x)$  — величина, для которой справедлива оценка (9), возможно, с другой константой  $K_1$ . Поэтому если  $\alpha(\sigma) \leq 1$ , то (8) непосредственно следует из (11). Остается рассмотреть случай, когда  $\alpha(\sigma) > 1$ . Тогда  $m_\alpha = 1$  и в силу (11) и (6)

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(f; x) &= \frac{\psi(\sigma)}{\pi} \int_{1 \leq |t| \leq M_\alpha} f_\beta^\psi(x+t) \frac{\sin(\sigma t + \beta\pi/2)}{t} dt + \bar{b}_\sigma^\psi(\alpha; f; x) = \\ &= O(\psi(n)) + \bar{b}_\sigma^\psi(\alpha; f; x), \end{aligned}$$

что и заканчивает доказательство теоремы 1.

Учитывая равенство (8) и принимая во внимание доказательство теоремы 2 из [1], приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Если выполнено условия теоремы 1, то величина

$$\mathfrak{E}_\sigma(\hat{C}_\beta^\psi S_{M_1}) = \sup \{|\rho_\sigma(f; x)| : f \in \hat{C}_\beta^\psi S_{M_1}\}$$

не зависит от точки  $x \in R$  и  $\forall \sigma \geq 1$  выполняется равенство

$$\mathfrak{E}_\sigma(\hat{C}_\beta^\psi S_{M_1}) = \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) \ln^+ \frac{1}{\alpha(\sigma)} + b_\sigma^\psi(\alpha), \quad (12)$$

где  $\ln^+ t = \max(\ln t, 0)$  и

$$b_\sigma^\Psi(\alpha) = O(1) (\Psi(\sigma) + Q_\sigma(\alpha; \Psi)), \quad (13)$$

$O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\sigma$  и по  $\beta$ .

Каждой функции  $\varphi \in \mathfrak{M}$  поставим в соответствие пару функций  $\eta(t) = \varphi(\Psi(t/2))$  и  $\mu(t) = \mu(\Psi(t/2))$  и через  $F_0$  обозначим подмножество функций  $\Psi$  из  $F$ , для которых почти при всех  $t \geq 1$  справедлива оценка  $|\eta'(t)| \leq K$ , где  $K$  — некоторая постоянная. Если  $\Psi \in F_0$  и в качестве  $\alpha(\sigma)$  взять величину  $\alpha^*(\sigma) = \mu(\Psi(\sigma))/\sigma$ , то (см. [1]), соотношение (56)  $Q_\sigma(\alpha^*; \Psi) \leq K\Psi(\sigma)$  и, кроме того, если  $\Psi \in F_0$ , то  $\exists a_0 > 0$  такое, что  $\forall \sigma \geq 1$  будет  $\alpha^*(\sigma) > a_0$ . Поэтому, полагая в теореме 2  $\alpha(\sigma) = \alpha^*(\sigma) = 1/(\eta(\sigma) - \sigma)$ , приходим к такому утверждению.

**Теорема 3.** Пусть  $\Psi \in F_0$ . Тогда  $\forall \sigma \geq 1$  справедливо равенство

$$\xi_\sigma(\hat{C}_\beta^\Psi S_M) = \frac{4}{\pi^2} \Psi(\sigma) \ln^+(\eta(\sigma) - \sigma) + O(1) \Psi(\sigma), \quad (14)$$

где  $O(1)$  — величина, равномерно ограниченная по  $\sigma$  и по  $\beta$ ;  $\eta(\sigma) = \Psi^{-1}(\Psi(\sigma)/2)$ .

Теоремы 1—3 являются аналогами соответствующих утверждений, доказанных в [1], для классов  $\hat{C}_\beta^\Psi S_M$ , т. е. без предположения (6). В частности, равенство (14) является аналогом равенства (57) из [1]:

$$\xi_\sigma(\hat{C}_\beta^\Psi S_M) = \frac{4}{\pi^2} \Psi(\sigma) |\ln(\eta(\sigma) - \sigma)| + O(1) \Psi(\sigma), \quad \Psi \in F_0, \beta \in R. \quad (15)$$

Сопоставляя равенства (14) и (15), видим, что если величины  $\eta(\sigma) - \sigma$  ограничены снизу некоторым положительным числом, то их правые части по существу совпадают и тогда, естественно, следует пользоваться более общим равенством (15). Но если, к примеру,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\eta(\sigma) - \sigma) = 0, \quad (16)$$

то, начиная с некоторого  $\sigma_0$  будет  $\ln^+(\eta(\sigma) - \sigma) = 0$ . Стало быть, в этом случае  $\xi_\sigma(\hat{C}_\beta^\Psi S_M) = O(1) \Psi(n)$  и, значит, порядки величин (15) и (16) существенно различны. Заметим, что условие (16) выполняется только для быстро убывающих функций  $\Psi(\cdot)$ , определяющих множества  $\hat{C}_\beta^\Psi$  функций  $f(\cdot)$  высокой гладкости. В качестве такой функции, например, можно взять функцию  $e_r(t) = \exp(-\alpha t^r)$ ,  $\alpha > 1$ , при любом  $r > 1$ , порождающую классы целых функций. (Подробнее об этом см. [1—4].)

Отметим еще, что в периодическом случае аналог равенства (14), полученный автором в [3], имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_n(C_\beta^\Psi S_M) &= \sup_{f \in C_\beta^\Psi S_M} |f(x) - S_{n-1}(f; x)| = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \Psi(n) \ln^+(\eta(n) - n) + O(1) \Psi(n), \quad \Psi \in F_0, \beta \in R. \end{aligned}$$

1. Степанец А. И. Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 2.— С. 198—209.
2. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I // Там же.— 1990.— 42, № 1.— С. 102—112.
3. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
4. Степанец А. И. Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. II // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 3.— С. 210—222.

Получено 16.01.91