

Некоторые способы построения асимптотик для уравнения Хилла

На основании метода, рассмотренного А. Найфэ, найдено асимптотическое решение частного вида уравнения Хилла в окрестности переходных кривых. Затем методом усреднения с помощью полученных поправок до четвертого порядка исследуется то же дифференциальное уравнение. Показано, что и второй способ приводит к найденной асимптотике.

За допомогою методу, розглянутого А. Найфе, знайдено асимптотичний розв'язок окремого рівняння Хілла в околі перехідних кривих. Потім методом усереднення за допомогою одержаних поправок до четвертого порядку досліджується те ж диференціальне рівняння. Показано, що і другий спосіб приводить до знайденої асимптотики.

В последнее время данный вопрос рассматривался, в частности, в работах [1, 2]. К уравнению Хилла, кроме того, приводят, например, задачи движения заряженных частиц в периодических магнитных полях [3].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$d^2x/d\tau^2 + \varepsilon^2(a_0 + g(\tau))x = 0, \quad (1)$$

где периодическая функция $g(\tau)$ представима конечной суммой

$$g(\tau) = a \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)\tau. \quad (2)$$

Здесь $a_0, a \in \mathbb{R}_1$, $\varepsilon \ll 1$, $\tau \in [0, 2\pi]$.

По теореме Флоке уравнения Матье или Хилла обладают двумя независимыми частными решениями [4] вида

$$x_1 = \exp(i\gamma\tau) \cdot \varphi(\tau), \quad x_2 = \exp(-i\gamma\tau) \cdot \varphi(-\tau), \quad (3)$$

где функция $\varphi(\tau)$ периодическая с периодом 2π , причем для устойчивого движения необходимо, чтобы $\text{Im } \gamma = 0$.

Наибольшие трудности вызывают поиски функции $\varphi(\tau)$. Будем считать малым параметром величину ε . Наша цель — определение $\varphi(\tau)$ и частоты γ с любой степенью точности.

Т е о р е м а. *Приближенные решения, найденные для уравнения (1) на основе процедуры, предложенной Найфэ, и метода усреднения, во всех порядках приводят к одинаковому результату.*

Для доказательства теоремы вначале изложим вычислительную схему построения приближений соответствующего порядка по обеим процедурам. Пусть пока $a_0 = 0$.

Прежде всего рассмотрим так называемый метод Уиттекера, описанный в монографии [2].

Частное решение для (1) будем искать в виде $x = \exp(i\gamma\tau) \cdot \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau) = \varphi(\tau + 2\pi)$. На границе устойчивости $\gamma = 0$ (или $\gamma = 1$). Для $\varphi(\tau)$ получим уравнение

$$d^2\varphi/d\tau^2 + 2i\gamma d\varphi/d\tau - \gamma^2\varphi + \varepsilon^2 g(\tau) \cdot \varphi = 0. \quad (4)$$

Представим $\varphi(\tau)$ и γ в виде полиномов четвертого порядка по ε :

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k \varphi_k(\tau), \quad \gamma = \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k \gamma_k.$$

(К мотивации выбора порядка полинома вернемся ниже.) Подставляя $\varphi(\tau)$ и γ в (4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем цепочку уравнений

$$\ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \ddot{\varphi}_1 = -2i\gamma_1 \dot{\varphi}_0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -2i\gamma_2 \dot{\varphi}_0 - 2i\gamma_1 \dot{\varphi}_1 + \gamma_1^2 \varphi_0 - g(\tau) \varphi_0,$$

$$\ddot{\Phi}_3 = -2i\gamma_3\dot{\Phi}_0 - 2i\gamma_1\dot{\Phi}_2 - 2i\gamma_2\dot{\Phi}_1 + \gamma_1^2\Phi_1 + 2\gamma_1\gamma_2\Phi_0 - g(\tau)\Phi_1,$$

$$\ddot{\Phi}_4 = -2i\gamma_4\dot{\Phi}_0 - 2i\gamma_1\dot{\Phi}_3 - 2i\gamma_2\dot{\Phi}_2 - 2i\gamma_3\dot{\Phi}_1 + \gamma_1^2\Phi_2 + \\ + \Phi_0\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2\Phi_1 + 2\gamma_1\gamma_3\Phi_0 - g(\tau)\Phi_2.$$

Решая последовательно эти уравнения в соответствии с методикой, примененной в [2, 5] (без секулярных членов), можно найти $\varphi(\tau)$, а затем построить общее решение, согласно (3), с точностью до ε^4 в действительной форме

$$x = A[\Phi_1(\tau) \cos(\varepsilon\nu\tau + \psi) + \Phi_2(\tau) \sin(\varepsilon\nu\tau + \psi)], \quad (5)$$

где

$$\Phi_1(\tau) = 1 + \varepsilon^2 a \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)\tau + \\ + \frac{\varepsilon^4 a^2}{8} \left[F_n(\tau) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^6} \cos 2(2k+1)\tau \right], \\ \Phi_2(\tau) = -2\varepsilon^3 a \nu \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^4} \cos(2k+1)\tau, \\ F_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{(2\nu+1)^3} \left[\frac{1}{(k-\nu)^2} \cos 2(k-\nu)\tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{(k+\nu+1)^2} \cos 2(k+\nu+1)\tau \right],$$

A и ψ — произвольные постоянные, $\nu = \pi^2 \varepsilon a / 8 \cdot \sqrt{3}$. При этом было найдено, что $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, $\gamma_2^2 = \pi^4 a^2 / 192$.

Из формы решения (5), а также функций $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ легко видеть, что ограничение полиномов для $\varphi(\tau)$ и γ , например, второй степенью приведет к исчезновению $\Phi_2(\tau)$. Это обстоятельство не гарантирует общности разложения (5). Таким образом, взятые полиномы четвертой степени определяют минимальный порядок, при котором появляется общая структура решения (5). Если степень полинома по ε выше четвертого порядка, то это не приведет к изменению вида формулы (5), а выразится лишь в появлении более малых поправок к функциям $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$.

Если функция $g(\tau)$ представляется в виде ряда, то $\Phi_i(\tau)$, $i = 1, 2$, будут иметь вид

$$\Phi_1(\tau) = 1 - \frac{\pi^3}{8} \varepsilon^2 a E_2\left(\frac{\tau}{\pi}\right) + \frac{\pi^6}{3840} \varepsilon^4 a^2 E_5\left(\frac{2\tau}{\pi}\right) + \frac{\varepsilon^4}{8} a^2 F_\infty(\tau), \quad (6) \\ \Phi_2(\tau) = -\frac{\pi^4}{12} \varepsilon^3 a E_3\left(\frac{\tau}{\pi}\right).$$

Здесь $E_n(z)$ — многочлены Эйлера. Если взять поправки более высокого порядка, вплоть до ε^5 , то получим $\gamma_4 = \gamma_5 = 0$, $\gamma_6 = \pi^8 a^3 / 10080 \cdot \sqrt{3}$.

Далее используем метод Боголюбова — Митропольского. Следуя рассматриваемой теории усреднения [5], уравнение (1) представим в стандартной форме

$$dX/d\tau = \varepsilon GX, \quad (7)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

Вначале для вектора X возьмем более общее матричное уравнение

$$dX/d\tau = \varepsilon Y(\tau, X).$$

Как известно, для функции $Y(\tau, X)$ определяется операция усреднения

$$\langle Y(\tau, X) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(\tau, X) d\tau \quad (8)$$

и вводится интегрирующий оператор

$$\bar{Y}(\tau, \xi) = \int [Y(\tau, \xi) - \langle Y(\tau, \xi) \rangle] d\tau.$$

Вектор ξ находится из системы

$$d\xi/d\tau = \varepsilon \langle Y(\tau, \xi) \rangle.$$

Первое приближение определяется как

$$X(\tau) = \xi(\tau) + \varepsilon \bar{Y}(\tau, \xi).$$

В [3] близкая задача была рассмотрена с учетом второго приближения. Однако итерационным методом, последовательно прибавляя очередную поправку, можно получить любое приближение. В частности, получено

$$X(\tau) = \xi + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i Y_i, \quad (9)$$

где

$$Y_1 = \bar{Y}, \quad Y_2 = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \xi} Y_1 - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle,$$

$$Y_3 = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \xi} Y_2 - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_1 \rangle - \int \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle,$$

$$Y_4 = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \xi} Y_3 - \int \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\tau \langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_2 \rangle - \int \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} d\tau \langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_1 \rangle - \int \frac{\partial Y_3}{\partial \xi} d\tau \langle Y \rangle,$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \langle Y \rangle + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^{i+1} \langle \frac{\partial Y}{\partial \xi} Y_i \rangle.$$

Согласно [5], погрешность данного приближения будет ε^5 . В соответствии с (7) положим теперь $Y(\tau, X) = GX$.

Тогда из (9) найдем

$$X(\tau) = \left(1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i G_i\right) \xi, \quad (10)$$

где

$$d\xi/d\tau = \varepsilon \langle G \left(1 + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i G_i\right) \rangle \xi. \quad (11)$$

Матрицы G_i имеют вид

$$G_1 = \bar{G}, \quad G_2 = \overline{GG_1} - \bar{G}_1 \langle G \rangle,$$

$$G_3 = \overline{GG_2} - \bar{G}_1 \langle GG_1 \rangle - \bar{G}_2 \langle G \rangle,$$

$$G_4 = \overline{GG_3} - \bar{G}_1 \langle GG_2 \rangle - \bar{G}_2 \langle GG_1 \rangle - \bar{G}_3 \langle G \rangle.$$

Эти матрицы будут выражаться через функцию $g(\tau)$ следующим образом:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\overline{g(\tau)} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{g(\tau)}} & 0 \\ 0 & \overline{g(\tau)} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\overline{2g(\tau)}} \\ \overline{g(\tau)g(\tau)} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = \begin{pmatrix} \overline{\overline{g(\tau)g(\tau)}} & 0 \\ 0 & -\overline{\overline{2g(\tau)g(\tau)}} - \overline{\overline{g(\tau)g(\tau)}} \end{pmatrix}.$$

Здесь при усреднении оставляем только те члены, для которых предел (8) является конечной величиной. В частности,

$$\langle g(\tau) \rangle = \langle \overline{g(\tau)} \rangle = \langle \overline{\overline{g(\tau)}} \rangle = 0, \quad \langle g(\tau) \overline{\overline{g(\tau)}} \rangle = -\pi^4 a^2 / 192.$$

Вследствие первых равенств, например, каждое новое применение интегрирующего оператора к функции $g(\tau)$ сводится к ее очередному интегрированию по τ .

Из (11) после подстановки матриц G_i и усреднения для ξ можно найти простое уравнение колебаний с частотой $\pi^2 a \varepsilon / 8\sqrt{3}$. Подставляя найденное отсюда ξ в матричное выражение (10), получаем для x решение, совпадающее с (5). Как видим, различные асимптотические методы привели к одному и тому же результату.

Доказательство можно провести и при наличии a_0 в (1). Очевидно, что предложенную процедуру на основе метода математической индукции можно распространить до любого порядка по ε , при этом схема рассуждений не изменится.

Проведенное исследование имеет, по мнению автора, общий характер и может служить еще одним дополнительным аргументом, иллюстрирующим эффективность метода усреднения. Периодическая функция исходного уравнения может иметь другой вид, существенным является только наличие малого параметра и то, что доказательство ведется в области устойчивости.

1. Арнольд В. И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матве // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, вып. 4.— С. 189—203.
2. Найфа А. Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.— 535 с.
3. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей.— М.: Физматгиз, 1962.— 352 с.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1963.— Ч. 2.— 515 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 503 с.

Получено 11.06.90