DOI: 10.3842/umzh.v76i3.7810

УДК 517.587

Володимир Макаров[1] (Інститут математики НАН України, Київ),
Сергій Макаров (Національний центр „Мала академія наук України”, Київ)

ФУНКЦІЇ І ПОЛІНОМИ ЛАГЕРРА – КЕЛІ

We investigate the main properties of Laguerre – Cayley functions and related polynomials, which can be regarded as an essential component of mathematical apparatus of the functional-discrete (FD-) method for solving the Cauchy problem for an abstract homogeneous evolutionary equation of fractional order.

Досліджуються основні властивості функцій Лагерра – Келі та пов’язаних із ними поліномів, які є суттєвою складовою математичного апарату функціонально-дискретного (FD-) методу розв’язування задачі Коші для абстрактного однорідного еволюційного рівняння дробового порядку.

1. Вступ. Виникнення поліномів Лагерра – Келі пов’язане з дослідженням задачі Коші для абстрактного однорідного еволюційного рівняння дробового порядку

$$\partial_t u(t) + \partial_t^{-\alpha} A u(t) = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0,$$

розв’язок якого за допомогою функції Міттаг-Леффлера зображується у формі [1]

$$u(t) = E_{1+\alpha}\bigl(-At^{1+\alpha}\bigr)u_0 = \sum_{j=0}^{\infty}\bigl(-At^{1+\alpha}\bigr)^j \frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))}\, u_0. \tag{1}$$

Тут

$$\bigl(\partial_t^{-\alpha} u\bigr)(t) = \begin{cases} \partial_t \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\, u(s)\, ds, & -1 < \alpha < 0, \\ \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, u(s)\, ds, & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

— інтеграл у сенсі Рімана – Ліувілля, A — секторіальний оператор у комплексному банаховому просторі. Якщо формально замінити A на $(I-q)^{-1}q$ (перетворення Келі) і розвинути ряд у (1) за степенями оператора q, то отримаємо зображення

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k p_k^{\alpha}\bigl(t^{1+\alpha}\bigr), \tag{2}$$

яке містить функції $p_k^{\alpha}\bigl(t^{1+\alpha}\bigr)$, названі нами функціями Лагерра – Келі. Для спрощення викладу будемо вважати, що елемент u_0 є одиничним у відповідному банаховому просторі.

У роботі [1] запропоновано і обґрунтовано експоненціально збіжний метод знаходження наближення до векторнозначної функції (2). Інший підхід, що базується на операторному перетворенні Келі та спрямований на побудову й обґрунтування наближення до формули (2), був запропонований у роботі [2]. Цей підхід, з точки зору реалізації та обґрунтування, є конкурентоспроможним щодо методу з [1], і в ньому суттєву роль відіграють функції $p_k^{\alpha}\bigl(t^{1+\alpha}\bigr)$. Тому

[1] Відповідальний за листування, e-mail: makarov@imath.kiev.ua.

дослідження властивостей функцій Лагерра – Келі є важливим напрямком. Цілком природним є вивчення цих властивостей через властивості поліномів $p_j^\alpha(x)$, які також природно називати поліномами Лагерра – Келі.

Поліноми $p_j^\alpha(x)$ належать до класу гіперболічних поліномів (експериментально встановлено), тобто поліномів, у яких всі нулі є дійсними. Такі властивості мають, зокрема, ортогональні поліноми, що задовольняють тричленні рекурентні співвідношення. На відміну від останніх, поліноми Лагерра – Келі не мають такої властивості. Зокрема, поліноми $p_j^{-\frac{1}{2}}(x)$, як доведено в цій роботі, задовольняють чотиричленне рекурентне співвідношення (далі наведено його точний вигляд) із коефіцієнтами, що залежать від j, тобто не є ортогональними. Дослідженням поліномів, які задовольняють чотиричленні рекурентні співвідношення вигляду

$$\begin{gathered} p_m(z) + C(z)p_{m-1}(z) + B(z)p_{m-2}(z) + A(z)p_{m-3}(z) = 0, \\ m = 2, 3, \ldots, \quad p_m(z) = 0, \quad m < 0, \end{gathered} \tag{3}$$

де $C(z)$, $B(z)$, $A(z)$ — лінійні функції від z, що не залежать від m, останнім часом присвячено значну кількість робіт (див. [1 – 5]). Роботи, де досліджуються питання, пов'язані з чотиричленним рекурентним співвідношенням вигляду (3), коефіцієнти якого залежать від m, авторам не відомі.

Означення 1. *Функції $p_j^\alpha\big(t^{1+\alpha}\big)$, які утворюються після розвинення в ряд Маклорена функції Міттаг-Леффлера*

$$\begin{gathered} E_{1+\alpha}\bigg(-\frac{q}{1-q}\,t^{1+\alpha}\bigg) = \sum_{j=0}^{\infty}\bigg(-\frac{q}{1-q}\,t^{1+\alpha}\bigg)^j \frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j p_j^\alpha\big(t^{1+\alpha}\big), \\ p_j^\alpha\big(t^{1+\alpha}\big) = \frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial q^j}\,E_{1+\alpha}\bigg(-\frac{q}{1-q}\,t^{1+\alpha}\bigg)\bigg|_{q=0}, \end{gathered} \tag{4}$$

назвемо функціями Лагерра – Келі.

Використовуючи означення, знаходимо явний вираз функцій Лагерра – Келі

$$p_k^\alpha\big(t^{1+\alpha}\big) = p^{-,\alpha}_{\;k}\big(t^{1+\alpha}\big) + p^{+,\alpha}_{\;k}\big(t^{1+\alpha}\big) = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^s\,\frac{(-1)^{s+1}t^{(s+1)(1+\alpha)}}{\Gamma(1+(\alpha+1)(s+1))}, \tag{5}$$

де

$$p^{-,\alpha}_{\;k}\big(t^{1+\alpha}\big) = -\sum_{s=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} C_{k-1}^{2s-2}\,\frac{t^{(2s-1)(1+\alpha)}}{\Gamma(2s+(2s-1)\alpha)},$$

$$p^{+,\alpha}_{\;k}\big(t^{1+\alpha}\big) = \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_{k-1}^{2s-1}\frac{t^{2s(1+\alpha)}}{\Gamma(2s+1+2s\alpha)}.$$

Лема 1. *Для того щоб функції Лагерра – Келі визначались за формулою* (5), *необхідно та достатньо, щоб справджувалось інтегрально-різницеве двочленне рекурентне співвідношення*

$$p_{k+1}^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big) = p_k^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha} p_k^{\alpha}\big(s^{1+\alpha}\big)ds, \quad \alpha \in (-1,1),$$
$$k = 1,2,\ldots, \quad p_1^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big) = -\frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}. \tag{6}$$

Доведення. Зважаючи на формулу (5) і застосовуючи формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha} s^{k(1+\alpha)}\,ds = \frac{t^{k(1+\alpha)+\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha} s^{k(1+\alpha)}\,ds$$
$$= \frac{t^{(k+1)(1+\alpha)}\Gamma(k\alpha+k+1)}{\Gamma((k+1)\alpha+k+2)},$$

неважко переконатися, що права частина (6) набере вигляду її лівої частини. Обернене твердження доводимо методом повної математичної індукції.

2. Асимптотика та оцінки функцій Лагерра – Келі. Для дослідження асимптотичної поведінки функцій Лагерра – Келі, а також отримання оцінок для них, що є дуже важливим для теоретичного обґрунтування FD-методу, ефективним підходом виявилось використання апарату твірних функцій.

Введемо таку твірну функцію:

$$f^{\alpha}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big), \quad p_0^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big) = 1.$$

Помноживши обидві частини (6) на z^k та підсумувавши по k від 0 до ∞, отримаємо інтегральне рівняння

$$(1-z)f^{(\alpha)}(z,t) + \frac{z}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha} f^{(\alpha)}(z,s)\,ds = 1.$$

За допомогою прямого та оберненого перетворень Лапласа одержуємо явні розв'язки цього інтегрального рівняння. Зокрема, для найпростіших випадків $\alpha = -1/2, 0, 1/2, 1$ маємо

$$f^{(-1/2)}(z,t) = \mathrm{e}^{\frac{z^2 t}{(1-z)^2}}\left[\operatorname{erf}\left(-\frac{z\sqrt{t}}{1-z}\right) + 1\right],$$

$$f^{(0)}(z,t) = \mathrm{e}^{\frac{zt}{z-1}},$$

$$f^{(1)}(z,t) = \cos\left(t\sqrt{\frac{z}{1-z}}\right),$$

$$f^{(1/2)}(z,t) = \frac{1}{3\sqrt{\pi}(-1+z)}\left[4z\,t^{3/2}\,\mathrm{hypergeom}\left([1], \left[\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{9}{6}\right], \frac{z^2t^3}{27(-1+z)^2}\right)\right.$$

$$+\sqrt{\pi}(-1+z)2\exp\left(-\frac{z^{2/3}t}{2(-1+z)^{2/3}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}z^{2/3}t}{2(-1+z)^{2/3}}\right)$$
$$-\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{z^{2/3}t}{(-1+z)^{2/3}}\right)\Bigg].$$

Більш простий шлях отримання твірних функцій для різних значень α полягає у використанні лівої частини формули (4).

Твердження 1. *Нехай* $\alpha\in(-1,0)$, *тоді справедливою є формула*

$$\frac{1}{k!}\sum_{s=k}^{\infty}p_s^{\alpha}(1)\,\frac{k!}{(k-s)!}=(-1)^k\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^sC_{k-1}^s}{\Gamma(-\alpha-s(1+\alpha))}=\lim_{q\to1-0}\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k}{\partial q^k}\,f^{(\alpha)}(q,1). \tag{7}$$

Доведення проводиться з використанням теореми Абеля, а також аналітичних та чисельних розрахунків, виконаних за допомогою системи комп'ютерної алгебри (с.к.а.) Maple.

У випадку, коли для певних конкретних значень α використання формули (7) викликає суттєві труднощі, доцільно застосувати інший підхід. А саме, шукати розвинення лівої частини (4) не в нулі, а в точці $q=-1$. Тобто необхідно знайти коефіцієнти ряду Тейлора вигляду

$$E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)^j\frac{1}{\Gamma(1+j(\alpha+1))}=\sum_{j=0}^{\infty}(q+1)^jS_j^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big),$$

де

$$S_j^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big)=\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial q^j}\,E_{1+\alpha}\left(-\frac{q}{1-q}t^{1+\alpha}\right)\bigg|_{q=-1}=\frac{1}{j!}\sum_{s=j}^{\infty}(-1)^sp_s^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big)\,\frac{s!}{(s-j)!}. \tag{8}$$

Твердження 2. *Нехай* $\alpha\in(-1,0)$, *тоді для будь-якого натурального* j *справедливою є формула* (8).

Знайти ліву частину формули (8) технічно набагато простіше, ніж знайти праву частину формули (7), оскільки функція $E_{1+\alpha}\left(-\dfrac{q}{1-q}\,t^{1+\alpha}\right)$ і всі її частинні похідні за змінною q не мають особливостей у точці $q=-1$.

Із тверджень 1, 2 випливає, що для $\alpha\in(-1,0)$ і будь-якого цілого невід'ємного $j\le s$ буде правильною гранична рівність $\lim_{s\to\infty}p_s^{\alpha}\big(t^{1+\alpha}\big)\,\dfrac{s!}{(s-j)!}=0$.

У випадку $\alpha=0$ функції Лагерра – Келі зображуються через класичні ортогональні поліноми Лагерра $p_k^0(t)=L_k(t)-L_{k-1}(t)$, які, згідно з класичною нерівністю для поліномів Лагерра [6], задовольняють нерівність $\big|p_k^0(t)\big|\le 2\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

Для $\alpha\in(0,1)$ шляхом аналітичних розрахунків, проведених за допомогою с.к.а. Maple, показано, що існують такі натуральні показники $\mu(\alpha)$, для яких ряди $\sum_{k=1}^{\infty}p_k^{\alpha}(1)\,k^{-\mu(\alpha)}$ обчислюються точно, тобто є збіжними. Отже, виконується оцінка $|p_k^{\alpha}(1)|\le Ck^{\mu(\alpha)}$, $\alpha\in(0,1)$. Зокрема, $\mu(\alpha)=6$, $\alpha=\dfrac{1}{m}$, $m=4,\ldots,13$, $\mu(\alpha)=7$, $\alpha=\dfrac{m}{m+1}$, $m=2,3,4$, $\mu\left(\dfrac{1}{2}\right)=8$. Далі в такий же спосіб одержуємо $\sum_{k=1}^{\infty}\big|p_k^1(1)\big|k^{-4}=0.53631821\ldots$, тобто виконується оцінка $\big|p_k^1(1)\big|\le Ck^{-4}$.

***Зауваження* 1.** Для використання такої техніки необхідно одночасно перевіряти, як правило чисельно, чи прямує загальний член суми до нуля (у протилежному випадку згідно з теорією ряд є розбіжним, оскільки не виконується необхідна умова збіжності), або чи є абсолютно збіжним відповідний ряд, що, зокрема, було перевірено для випадку $\alpha = 1$.

3. Рекурентні співвідношення. Нехай $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, тоді функції Лагерра – Келі $p_k^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big)$ будуть задовольняти рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned} &n\, p_n^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) = 3(n-1)p_{n-1}^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) + (2t-3n+6)p_{n-2}^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) + (n-3)p_{n-3}^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big), \\ &n = 3,4,\ldots, \quad p_0^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) = 1, \quad p_1^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}, \\ &p_2^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{t}\big) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + t. \end{aligned} \tag{9}$$

Співвідношення (9) одержано з використанням послідовності A052887 із [7], що збігається з послідовністю чисельників дробів $p^{+,-1/2}_{k}(1)$, $k = 1,2,\ldots$, знаменники яких містять $k!$. Для інших значень α вигляду $\alpha = -\dfrac{p}{q}$, де $\dfrac{p}{q}$ — простий дріб, розроблено методику отримання рекурентних співвідношень для функцій Лагерра – Келі, яка спирається на застосування с.к.а. Maple.

У якості ілюстрації можливостей цієї методики наведемо результати її застосування для деяких значень α. Так, для $\alpha = -\dfrac{2}{3}$ маємо

$$\begin{gathered} p_{k+1}^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) - \frac{4k}{k+1}p_k^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) + \frac{6(k-1)}{k+1}p_{k-1}^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) \\ - \left(-\frac{3}{k+1}\,t + \frac{4(k-2)}{k+1}\right)p_{k-2}^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) + \frac{k-3}{k+1}\,p_{k-3}^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) = 0, \quad k = 3,4,\ldots, \\ p_1^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t^{\frac{1}{3}}, \qquad p_2^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2\Gamma(2/3)}\,t^{\frac{2}{3}}, \\ p_3^{-\frac{2}{3}}\big(t^{\frac{1}{3}}\big) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\Gamma(2/3)}\,t^{\frac{2}{3}} - t, \end{gathered}$$

для $\alpha = -\dfrac{3}{4}$

$$\begin{gathered} p_{k+1}^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) - \frac{5k}{k+1}\,p_k^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) + \frac{10(k-1)}{k+1}\,p_{k-1}^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) - \frac{10(k-2)}{k+1}\,p_{k-2}^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) \\ - \left(\frac{4}{k+1}\,t - \frac{5(k-3)}{k+1}\right)p_{k-3}^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) - \frac{k-4}{k+1}\,p_{k-4}^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) = 0, \quad k = 4,5,\ldots, \\ p_1^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)t^{\frac{1}{4}}, \quad p_2^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)t^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,t^{\frac{1}{2}}, \\ p_3^{-\frac{3}{4}}\big(t^{\frac{1}{4}}\big) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)t^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3\Gamma(3/4)}\,t^{\frac{3}{4}}, \end{gathered}$$

для $\alpha = -\dfrac{1}{3}$

$$p_{k+1}^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) - \frac{20(k-1)k}{(k+1)(4k-2)}\, p_k^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) + \frac{10(k-1)(2k-3)}{(k+1)(4k-2)}\, p_{k-1}^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big)$$

$$-\left(\frac{9}{(k+1)(4k-2)}\, t^2 + \frac{40(k-2)^2}{(k+1)(4k-2)}\right) p_{k-2}^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big)$$

$$-\frac{10(k-3)(2k-5)}{(k+1)(4k-2)}\, p_{k-3}^{-\frac{1}{3}}\Big(t^{\frac{2}{3}}\Big)$$

$$-\frac{4(k-4)(k-3)}{(k+1)(4k-2)}\, p_{k-4}^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) = 0, \quad k = 3, 4, 5, \ldots,$$

$$p_1^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) = -\frac{3}{2\Gamma(2/3)}\, t^{\frac{2}{3}}, \qquad p_2^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) = -\frac{3}{2\Gamma(2/3)} t^{\frac{2}{3}} + \frac{9\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{8\pi}\, t^{\frac{4}{3}},$$

$$p_3^{-\frac{1}{3}}\big(t^{\frac{2}{3}}\big) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) t^{\frac{1}{4}} + \frac{9\sqrt{3}\Gamma(2/3)}{4\pi}\, t^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\, t^2.$$

4. Диференціальне рівняння. Поліноми $\dfrac{p_n^{-\frac{1}{2}}(t)}{t} = u_{n-1}^{-\frac{1}{2}}(t)$ задовольняють диференціальне рівняння нескінченного порядку

$$L\left(u_n^{-\frac{1}{2}}(t)\right) - 2n\, u_n^{-\frac{1}{2}}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \frac{d^j u_n^{-\frac{1}{2}}(t)}{dt^j} - 2n\, u_n^{-\frac{1}{2}}(t), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

де коефіцієнти $q_j(t)$ не залежать від n і мають вигляд

$$q_1(t) = t - \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad q_2(t) = t^2 - \frac{9\pi - 8}{4\sqrt{\pi}}\, t + \frac{3}{2},$$

$$q_3(t) = -\frac{1}{2}\, t^3 + \frac{27\pi - 44}{12\sqrt{\pi}}\, t^2 - \frac{5}{2}\, t + \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$q_4(t) = \frac{1}{6}\, t^4 - \frac{23\pi - 48}{16\sqrt{\pi}}\, t^3 + \frac{7}{4}\, t^2 - \frac{5\pi + 32}{16\sqrt{\pi}}\, t + \frac{5}{8},$$

$$q_5(t) = -\frac{1}{24}\, t^5 + \frac{165\pi - 404}{240\sqrt{\pi}}\, t^4 - \frac{3}{4}\, t^3 + \frac{5\pi + 16}{16\sqrt{\pi}}\, t^2 - \frac{7}{8}\, t + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \ldots.$$

Введемо позначення

$$q_j(t) = \sum_{s=0}^{j} g_s^{(j)} t^j. \tag{10}$$

Тоді справджуються співвідношення

$$k_n^{(n)} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n!\, g_{n-s}^{(n-s)}}{s!} = k_n^{(n)} \lambda_n,$$

$$k_n^{(n)}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n!g_{n-s-1}^{(n-s)}}{s!}+k_{n-1}^{(n)}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(n-1)!g_{n-s-1}^{(n-s-1)}}{s!}=k_{n-1}^{(n)}\lambda_{n-1},$$

$$k_n^{(n)}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n!g_{n-s-2}^{(n-s)}}{s!}+k_{n-1}^{(n)}\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(n-1)!g_{n-s-2}^{(n-s)}}{s!}+k_{n-2}^{(n)}\sum_{s=0}^{n-3}\frac{(n-2)!g_{n-s-2}^{(n-s-2)}}{s!}=k_{n-2}^{(n)}\lambda_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$k_n^{(n)}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n!g_{n-s-2}^{(n-s)}}{s!}+\ldots+k_{n-j}^{(n)}\sum_{s=0}^{n-j-1}\frac{(n-j)!g_{n-s-j}^{(n-s-j)}}{s!}=k_{n-j}^{(n)}\lambda_{n-j},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}k_{n-j}^{(n)}\sum_{s=0}^{n-j-1}\frac{(n-j)!g_{n-s-j}^{(n-s-j)}}{s!}=k_1^{(n)}\lambda_1,$$

$$n=1,2,\ldots.$$

Із наведеної системи послідовно можна знайти коефіцієнти всіх поліномів (10) як функції від заданих „власних значень” $\lambda_j,\ j=1,2,\ldots.$

Лема 2. *В класі диференціальних рівнянь вигляду*

$$L\big(u_n^{-\frac12}(t)\big)-\lambda_n\,u_n^{-\frac12}(t)=\sum_{j=1}^{\infty}q_j(t)\frac{d^ju_n^{-\frac12}(t)}{dt^j}-\lambda_n\,u_n^{-\frac12}(t),\quad n=0,1,\ldots, \tag{11}$$

не існує диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків.

Доведення. Аналітичні викладки показують, що

$$g_3^{(3)}=-\frac12\left(-\lambda_1+\lambda_2-\frac13\,\lambda_3\right),$$

$$g_2^{(3)}=-\frac{1}{12\sqrt{\pi}}\,(9\pi\lambda_1-9\pi\lambda_2+12\lambda_1-16\lambda_2+16\lambda_3), \tag{12}$$

$$g_1^{(3)}=\frac52\,\lambda_1-\frac{11}{4}\,\lambda_2+\lambda_3,\qquad g_0^{(3)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-\lambda_1+\lambda_2-\frac13\,\lambda_3\right)=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,g_3^{(3)};$$

$$g_5^{(5)}=\frac{1}{24}\left(\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3-\lambda_4+\frac15\,\lambda_5\right),$$

$$g_4^{(5)}=-\frac{1}{480\sqrt{\pi}}\big[(60\pi-40)\lambda_1-(60\pi+320)\lambda_2+(75\pi+320)\lambda_3+(75\pi+64)\lambda_4+64\lambda_5\big],$$

$$g_3^{(5)}=\frac14\left(3\lambda_1-7\lambda_2+2\lambda_3-\frac92\,\lambda_4+\lambda_5\right), \tag{13}$$

$$g_2^{(5)}=-\frac{1}{48\sqrt{\pi}}\big[(15\pi+48)\lambda_1-(45\pi+80)\lambda_2+(45\pi+112)\lambda_3-(15\pi+96)\lambda_4+32\lambda_5\big],$$

$$g_1^{(5)} = \frac{1}{16}\left(14\lambda_1 - 31\lambda_2 + 34\lambda_3 - \frac{37}{2}\,\lambda_4 + 4\lambda_5\right),$$

$$g_0^{(5)} = -\frac{12}{\sqrt{\pi}}\,g_5^{(5)}.$$

Для того щоб у сім'ї рівнянь (11) існувало рівняння другого порядку, необхідно, щоб всі коефіцієнти у (12) дорівнювали нулю, тобто щоб однорідна система рівнянь щодо $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3,$

$$g_i^{(3)} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

мала нетривіальний розв'язок. Проте неважко переконатись, що її визначник є відмінним від нуля, отже, її розв'язок є тривіальним. Ця суперечність доводить твердження леми для цього випадку. Аналогічно доводиться неіснування рівняння четвертого порядку в сукупності рівнянь (11) шляхом аналізу системи (13).

5. Нулі поліномів Лагерра – Келі. Наведемо деякі результати щодо властивостей коренів функцій Лагерра – Келі. Для їх одержання зручно застосувати властивості нулів поліномів, породжених функціями Лагерра – Келі, використавши формулу

$$P_{k-1}^{\alpha}(x) = \frac{p_k^{\alpha}(-x)}{x}, \quad \text{заміна} \quad t^{1+\alpha} = -x. \tag{14}$$

Згідно з (5) отримуємо

$$P_{k-1}^{\alpha}(x) = \sum_{s=0}^{k-1} C_{k-1}^{s} \frac{x^s}{\Gamma(1 + (\alpha+1)(s+1))} = \sum_{s=0}^{k-1} b_{k-1,s}^{\alpha} x^s. \tag{15}$$

Виконується нерівність

$$b_{k-1,s}^{\alpha} b_{k-1,s+1}^{\alpha} - b_{k-1,s-1}^{\alpha} b_{k-1,s+2}^{\alpha} > 0, \quad s = 1, \ldots, k-3, \quad k > 3, \quad \alpha > -1, \tag{16}$$

яка свідчить про те, що поліноми (15) є стійкими або є поліномами Гурвіца, тобто такими, у яких нулі лежать у відкритій лівій комплексній півплощині [8].

Для доведення нерівності (16) розглянемо

$$\begin{aligned} & b_{k-1,s}^{\alpha} b_{k-1,s+1}^{\alpha} - b_{k-1,s-1}^{\alpha} b_{k-1,s+2}^{\alpha} \\ &\quad = \frac{[(k-1)!]^2 \Gamma((\alpha+1)s+1)^{-1} \Gamma((\alpha+1)s+3\alpha+4)^{-1}}{s!(k-s-1)!(s+1)!(k-s-2)!} \\ &\qquad \times \left[\frac{\Gamma((\alpha+1)s+1)\Gamma((\alpha+1)s+3\alpha+4)}{\Gamma((\alpha+1)s+\alpha+2)\Gamma((\alpha+1)s+2\alpha+3)} - \frac{s(k-s-2)}{(s+2)(k-s)}\right]. \end{aligned}$$

Неважко переконатись, що вираз у квадратних дужках строго додатний для $\alpha > -1$ та всіх зазначених $s,\ k$. Згідно з роботою [8], виконання нерівностей (16) є необхідною умовою, щоб поліноми (15) були поліномами Гурвіца. Звідси випливає, що корені функцій Лагерра – Келі відмінні від нуля і лежать у правій відкритій комплексній півплощині.

Варто зауважити, що на основі техніки, пов'язаної з неперервними дробами Стілтьєса, і теорем 5.1 та 5.2 із [9] у с.к.а. Maple є прості у використанні засоби автоматичної перевірки виконання необхідних і достатніх умов щодо належності цього полінома до класу поліномів Гурвіца. Зазначені засоби дали можливість переконатись у тому, що будь-який перевірений поліном є поліномом Гурвіца. Крім того, окремі компоненти дробів Стілтьєса можна знайти в явному вигляді. Так, перша компонента дробу, що відповідає поліномам $P_{2n-1}^{-1/2}(x)$, має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\nu(n)}{2^{\mu(n+1)}}\sqrt{\pi}x, \quad \nu(n)=\operatorname{numer}\left(\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}\right), \\ &\mu(n)=\mu\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n, \quad \mu(0)=0, \end{aligned} \tag{17}$$

де $\operatorname{numer}\left(\dfrac{k}{n}\right)=k$. Формулу (17) було одержано за допомогою послідовностей A005187, A098597 із [7]. Перші дві компоненти дробу, що відповідає поліномам $P_{2n+2}^{-1/2}(x)$, мають вигляд

$$\begin{gathered} 0, \quad \frac{\nu(2n+2)}{2^{\mu(n+1)}}\frac{x}{\sqrt{\pi}}, \\ \nu(2n+2)=\operatorname{numer}\left(\left(3+8n+4n^2\right)\frac{C_{2n}^n}{4^n}\right), \\ \mu(n)=\mu\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n, \quad \mu(0)=0. \end{gathered} \tag{18}$$

Формулу (18) одержано за допомогою послідовностей A161199, A005187 із [7].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. W. Mclean, V. Thomée, *Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation*, J. Integral Equations and Appl., **22**, № 1, 57 – 94 (2010); https://doi.org/10.1216/JIE-2010-22-1-57.
2. В. Б. Василик, І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров, *Експоненціально збіжний метод наближення для рівняння з дробовою похідною і необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі*, Укр. мат. журн., **74**, № 2, 151 – 163 (2022); https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6984.
3. K. Tran, A. Zumba, *Zeros of polynomials with four-term recurrence*, Involve, **11**, № 3, 501 – 518 (2018); https://doi.org/10.2140/involve.2018.11.501.
4. R. Adams, *On hyperbolic polynomials with four-term recurrence and linear coefficients*, Calcolo, **57**, Article 22 (2020); https://doi.org/10.1007/s10092-020-00373-7.
5. K. Tran, A. Zumba, *Zeros of polynomials with four-term recurrence and linear coefficients*, Ramanujan J., **55**, 447 – 470 (2021); https://doi.org/10.1007/s11139-020-00263-0.
6. Г. Сеге, *Ортогональные полиномы*, Физматлит, Москва (1962).
7. N. J. A. Sloane, S. Plouffe (Ed.), *The encyclopedia of integer sequences*, Academic Press, San Diego (1995).
8. X. Xie, *A new method of investigating the stability of linear systems*, Meeting report in Beijing, 1957 (in Chinese).
9. N. Levinson, R. M. Redheffer, *Complex variables*, eBook, Holden-Day, San Francisco (1970).

Одержано 18.09.23