

Володимир Макаров¹ (Інститут математики НАН України, Київ)

НАРИСИ СПЕКТРАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОЛІНОМІАЛЬНО ЗБУРЕНОГО ОПЕРАТОРА ЕРМІТА

We study spectral properties of a polynomially perturbed Hermite operator and deduce the formulas allowing one to find the eigenvalues of this operator by using only elementary algebraic operations.

Вивчаються спектральні властивості поліноміально збуреного оператора Ерміта. Одержано формули, які дозволяють знаходити власні значення такого оператора, використовуючи тільки елементарні алгебраїчні операції.

1. Вступ. Ця робота тісно пов'язана зі статтями [1–3] та є подальшим розвитком запропонованого в них напрямку досліджень. Розглянуто поліноміальне збурення потенціалу оператора Ерміта, який визначений на функціях $u(x) \in D_{\max}$ у такий спосіб:

$$-Au(x) = u''(x) - x^2u(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

де D_{\max} — клас абсолютно неперервних функцій $f(x)$ зі своїми похідними і таких, що $f''(x) - x^2f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Для збуреної задачі (збурення застосоване до коефіцієнта біля потенціалу x^2) використано FD-метод [4], для якого, в більшості випадків, можливі символічна реалізація та отримання кінцевого результату в аналітичному вигляді. Для наближення власних значень одержано дробові послідовності, які разом з використанням OEIS (енциклопедії цілих послідовностей) надають можливість сформулювати гіпотезу щодо формули загальних членів цих послідовностей. Доведення справедливості гіпотези здійснюється строго математично. На цьому шляху отримано красиві функціональні залежності, що суттєво зменшують об'єм обчислювальних витрат для знаходження спектральних характеристик збуреної задачі.

У другому пункті для конкретної збуреної спектральної задачі продемонстровано технологію розв'язування та обґрунтування такого роду задач, складність яких пов'язана з необмеженістю як проміжку інтегрування, так і функції збурення. У третьому пункті викладену раніше методику застосовано до дослідження ряду задач, пов'язаних зі збуренням оператора Ерміта.

2. Допоміжні результати. Методику розв'язання та обґрунтування поліноміально збуреної спектральної задачі для оператора Ерміта продемонструємо на такій задачі.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку $u(x) \in D_{\max}^+$ рівняння

$$\begin{aligned} -Au(x) + \lambda u(x) &= u''(x) + \left(\lambda - \frac{3}{2}x^2 \right) u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де D_{\max}^+ — клас абсолютно неперервних функцій $f(x)$ зі своїми першими похідними і таких, що $f''(x) - \frac{3}{2}x^2f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тут збуренням є поліном $\frac{1}{2}x^2$. Обмежимося пошуком лише парних власних функцій. Непарні власні функції можна знайти аналогічно.

¹ E-mail: makarov@imath.kiev.ua.

Розв'язок наведеного рівняння через функції Уїттекера має вигляд

$$u(x) = \frac{C_1}{\sqrt{x}} \text{WhittakerM}\left(\frac{\lambda\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{4}, \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{C_2}{\sqrt{x}} \text{WhittakerW}\left(\frac{\lambda\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{4}, \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\right).$$

Цей розв'язок належить класу D_{\max}^+ , якщо $C_1 = 0$, і водночас є власною функцією вищенаведеної спектральної задачі, якщо він задовольняє однорідну крайову умову в нулі. Це в свою чергу буде тоді, коли λ буде коренем характеристичного рівняння

$$d(\lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda\sqrt{6}}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda\sqrt{6}}{12}\right)} = 0.$$

Таке рівняння виникає, якщо покладемо таким, що дорівнює нулю, значення коефіцієнта біля x у розвиненні в ряд Тейлора функції

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \text{WhittakerW}\left(\frac{\lambda\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{4}, \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\right)$$

у випадку пошуку парної власної функції. Найменшим його додатним коренем буде

$$\lambda_0^{\text{exact}} = 1,2247448713915890490986420373529,$$

а відповідною власною функцією –

$$u_0^{\text{exact}}(x) = \frac{2^{1/4} 6^{1/8}}{\sqrt{\pi x}} \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda_0^{\text{exact}}\sqrt{6}}{12}\right) \text{WhittakerW}\left(\frac{\lambda_0^{\text{exact}}\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{4}, \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\right).$$

Далі для розв'язання задачі (1) застосовуємо простіший варіант FD-методу з базовою спектральною задачею з оператором Ерміта (див. [4])

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} u_0^{(j+1)}(x) + (1-x^2)u_0^{(j+1)}(x) \\ &= -\sum_{p=0}^{j-1} \lambda_0^{(j-p+1)} u_0^{(p)}(x) + \left(-\lambda_0^{(1)} + \frac{1}{2}x^2\right) u_0^{(j)}(x) \equiv F_0^{(j+1)}(x), \quad 0 < x < \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u_0^{(j+1)}(x) \in D_{\max}^+, \quad \frac{d}{dx} u_0^{(j+1)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$\int_0^{\infty} u_0^{(j+1)}(x) u_0^{(0)}(x) dx = 0.$$

Враховуючи умову розв'язності задачі (2), отримуємо формулу, за якою можна визначити поправку до першого власного значення:

$$\int_0^{\infty} F_0^{(j+1)}(x) u_0^{(0)}(x) dx = 0, \quad \lambda_0^{(j+1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 u_0^{(j)}(x) u_0^{(0)}(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots$$

Одержані поправки до першого власного значення є такими:

$$\lambda_0^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad \lambda_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \lambda_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32},$$

$$\lambda_0^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{128}, \quad \lambda_0^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2048}, \dots$$

З огляду на використання OEIS [5], наведені вище результати дали змогу сформулювати гіпотезу: дробі $\lambda_0^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)$ є коефіцієнтами в розвиненні в ряд Тейлора функції $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$.

Цей ряд є абсолютно збіжний для $|x| \leq 2$. Гіпотеза буде справджуватись, якщо ряд

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

буде збіжним і його сума буде збігатися з найменшим власним значенням задачі (1). Маємо

$$\lambda_0^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^j (2j-1)!}{2^{3j+1} (j-1)! (j+1)!} = \frac{(-1)^{j-1} \text{numer}\left(\frac{(2j-3)!!}{j!}\right)}{\text{denom}\left(\text{binomial}\left(\frac{1}{4}, j\right)\right)}, \quad j = 2, 3, \dots,$$

$$\text{abs}\left(\frac{\lambda_0^{(j+1)}}{\lambda_0^{(j)}}\right) = \frac{2j-1}{4(j+1)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Звідси випливає, що мають місце співвідношення

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\lambda_0^{(j)}\right) = 0, \quad \text{abs}\left(\lambda_0^{(j+1)}\right) < \text{abs}\left(\lambda_0^{(j)}\right), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\text{abs}\left(\lambda_0^{(j+1)}\right) < 2^{-j-4}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Отже, згідно з відомою теоремою про збіжність знакозмінних числових рядів, ряд (3) є збіжним. За допомогою системи комп'ютерної алгебри (с.к.а.) Maple можна знайти його суму аналітично й отримати її значення

$$\lambda_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

яке збігається з найменшим власним значенням $\lambda_0^{\text{exact}} = 1, 224744871 \dots$ спектральної задачі

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \left(\lambda - \frac{3}{2}x^2\right) u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (5)$$

$$u(x) \in D_{\text{max}}^+, \quad u'(0) = 0.$$

Вищевикладене доводить, що простіший варіант FD-методу для задачі (5) є збіжним і, згідно з (4), збігається не повільніше геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{2}$.

3. Основні результати. Розглянемо задачу, яка полягає в тому, щоб знайти таку функцію $u(x) \in D_{\max}$ і відповідне значення параметра λ , які задовольняють рівняння

$$-Au(x) + \lambda u(x) = u''(x) + (\lambda - (1+k)x^2)u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad k > -1. \quad (6)$$

Із загальної теорії відомо, що власні значення цієї задачі додатні, різні, з точкою згущення на нескінченності. Позначимо їх так:

$$\lambda_1^{\text{exact}}(k) < \lambda_2^{\text{exact}}(k) < \dots < \lambda_n^{\text{exact}}(k) < \dots$$

Мають місце такі твердження.

Твердження 1. Для власних значень задачі (2), занумерованих у порядку зростання їх величин, справджуються формули

$$\lambda_{2n+1}^{\text{exact}}(k) = \frac{4n+3}{3} \lambda_1^{\text{exact}}(k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{2n}^{\text{exact}}(k) = (4n+1) \lambda_0^{\text{exact}}(k), \quad n = 1, 2, \dots$$

Твердження 2. Для послідовності поправок до власних значень задачі (6), згідно з FD-методом з базовою задачею

$$\frac{d^2}{dx^2} u^{(0)}(x) + (\lambda^{(0)} - x^2) u^{(0)}(x) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

виконуються співвідношення

$$\lambda_{2n}^{(j)}(k) = (4n+1) \lambda_0^{(j)}(k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$$\lambda_{2n+1}^{(j)}(k) = \frac{4n+3}{3} \lambda_1^{(j)}(k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$\lambda_0^{(j)}(k) = k^j \lambda_0^{(j)}(1), \quad j = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Зауваження до твердження 1. Для того щоб для заданого k одержати всі власні значення задачі (6), достатньо знайти лише $\lambda_0^{\text{exact}}(k)$, $\lambda_1^{\text{exact}}(k)$, а всі інші можна отримати за допомогою елементарних формул (7).

Зауваження до твердження 2. Якщо шукати лише власні значення задачі (6) для різних значень k , достатньо один раз за допомогою FD-методу знайти всі поправки $\lambda_0^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, \dots$, до власного значення $\lambda_0^{\text{exact}}(1)$, оскільки з твердження 2 випливає формула

$$\lambda_n^{(j)}(k) = (2n+1) k^j \lambda_0^{(j)}(1). \quad (9)$$

У формулах (8), (9) суттєву роль відіграють величини $\lambda_0^{(j)}(1)$. Виявилось, що ці величини є коефіцієнтами в розвиненні у ряд Тейлора функції $\sqrt{1+x}$. Звідси випливає висновок: FD-метод у простішому своєму варіанті для задачі (6) буде збіжним, якщо виконується умова $|k| \leq 1$.

За допомогою засобів с.к.а. Maple отримуємо

$$\lambda_0(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}(1) = \sqrt{2}.$$

З огляду на формулу (8) одержуємо, зокрема, такі результати:

$$\lambda_0\left(\frac{3}{4}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\lambda_0\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\lambda_0\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

У наведених формулах помічено таку закономірність. Нехай $\frac{m}{n}$ — деякий алгебраїчний дріб. Тоді справджується формула

$$\lambda_0\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_0^{(j)}\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\sqrt{(m+n)n}}{n}. \quad (10)$$

У непарному випадку отримуємо

$$\lambda_1\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{(j)}\left(\frac{m}{n}\right) = 3\sqrt{\frac{m+n}{n}}.$$

Проілюструємо правильність цієї гіпотези. Візьмемо «випадковим чином» дріб $\frac{7}{9}$. Тоді з формули (10) знайдемо

$$\lambda_0\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{\sqrt{16 \cdot 9}}{9} = \frac{4}{3}.$$

Ще один «трансцендентний» приклад:

$$\lambda_0\left(\frac{\exp(1)}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{[(\exp(1) + \pi)\pi]}}{\pi} = 1,365743746\dots$$

Якщо всю послідовність поправок до $\lambda_0^{\text{exact}}\left(\frac{m}{n}\right)$ згідно з FD-методом можна знайти без його використання, а одразу як коефіцієнти ряду Тейлора функції $\sqrt{1 + \frac{m}{n}x}$, то аналогічний результат не вдається досягти стосовно відповідної власної функції. Водночас точний вираз для $u_0^{\text{exact}}(x)$ можна одержати з диференціального рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \left(\sqrt{\frac{m+n}{n}} - \frac{m+n}{n}x^2\right)u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u(x) \in D_{\max}^+, \quad u'(0) = 0,$$

і він має вигляд

$$u_0^{\text{exact}}(x) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m+n}{n}}x^2\right).$$

Розрахунки, проведені за допомогою с.к.а. Maple, показали, що наведені значення збігаються з найменшими власними значеннями задачі (6) для відповідних значень k у парному випадку, зокрема $\lambda_0(1) = \lambda_0^{\text{exact}}(1)$, що узгоджується з відповідним результатом із [3].

Застосовуючи (9), приходимо (без обчислень) до формули

$$\lambda_n^{\text{exact}}(1) = n\sqrt{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо у задачі (6) $k > 1$, то FD-метод у запропонованому вище варіанті буде розбіжний. Вихід із цієї ситуації запропонуємо такий (нетрадиційний, новий). Замість задачі (6) розглянемо задачу

$$u''(x) + (\lambda - (K + k)x^2)u(x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad |k| < 1, \quad (11)$$

де K – найбільше натуральне число і таке, що виконується нерівність $|k| < 1$. Застосування FD-методу ґрунтується на базовій задачі

$$\frac{d^2}{dx^2}u^{(0)}(x) + (\lambda^{(0)} - Kx^2)u^{(0)}(x) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

для якої

$$\lambda_0^{(0)} = \sqrt{K}, \quad u_0^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} N^{1/8} \exp\left(-\frac{\sqrt{N}}{2}x^2\right).$$

Виявилось, що найменше точне власне значення задачі (11) у парному випадку, одержане FD-методом і перевірене безпосередньо шляхом чисельного розв'язування задачі (11), визначається формулою

$$\lambda_0^{\text{exact}}(K + k) = \sqrt{K + k}.$$

Конфлікт інтересів. Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Володимир Макаров є членом редколегії „Українського математичного журналу”. Відповідальним редактором з розгляду цієї статті був інший член редколегії. Стаття пройшла належне таємне рецензування. Володимир Макаров не був залучений до процесу рецензування і прийняття рішення щодо публікації цієї статті.

Фінансування. Автор заявляє, що під час підготовки цього рукопису не було отримано коштів, грантів чи іншої підтримки.

Література

1. В. Л. Макаров, *FD-метод у спектральних задачах для оператора Шрьодінгера на $(-\infty, \infty)$ з поліноміальним потенціалом*, Доп. НАН України, № 11, 5–11 (2015).
2. В. Л. Макаров, *Точні розв'язки спектральних задач для оператора Шрьодінгера на $(-\infty, \infty)$ з поліноміальним потенціалом, одержані FD-методом*, Доп. НАН України, № 2, 1–10 (2017); <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.02.010>.
3. В. Л. Макаров, *Точні та наближені розв'язки спектральних задач для оператора Шрьодінгера на $(-\infty, \infty)$ з поліноміальним потенціалом*, Укр. мат. журн., **70**, № 1, 79–93 (2018); <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/1543>.
4. В. Л. Макаров, *FD-метод – експоненціальна швидкість збіжності*, Журн. обчислюв. та прикл. математики, № 82, 69–74 (1997).
5. *The on-line encyclopedia of integer sequences* (OEIS).

Одержано 18.09.23